1 Introducción

El Procesamiento Digital de Señales (PDS) es actualmente una de las tecnologías más poderosas, y seguramente dará forma a la ciencia y a la ingeniería en el siglo XXI. Ya ha producido cambios revolucionarios en una gran variedad de campos, como comunicaciones, medicina, radar y sonar, reproducción de música de alta fidelidad, prospección petrolera, etc. por citar algunos. Cada una de estas áreas ha desarrollado una tecnología específica para PDS, con sus propios algoritmos, herramientas matemáticas y técnicas especializadas. Esta combinación de amplitud y profundidad hace imposible que una sola persona sea capaz de dominar toda la tecnología de PDS desarrollada hasta ahora.

1.1. Orígenes del procesamiento digital de señales

El Procesamiento Digital de Señales se distingue de otras ramas de la ciencia por el tipo de datos con que trabaja: las *señales*. En la mayoría de los casos, estas señales tienen origen en elementos del mundo real: vibraciones sísmicas, imágenes, ondas de sonido, etc. El PDS comprende la matemática, los algoritmos, y las técnicas utilizadas para manipular estas señales después de que han sido convertidas a un formato *digital*. Los objetivos que se persiguen pueden ser variados: mejora de imágenes visuales, reconocimiento y generación de voz, compresión de datos para almacenamiento y transmisión, etc.

La importancia de las señales digitales se hizo evidente en 1948 con la invención de los códigos de corrección de errores. Sin embargo, los orígenes del procesamiento digital de señales se remontan hacia 1960 y 1970 cuando estuvieron disponibles las primeras computadoras digitales. En esta época las computadoras eran muy costosas, y el PDS estuvo limitado a solamente unas pocas aplicaciones críticas. Los esfuerzos pioneros tuvieron lugar en cuatro áreas fundamentales: *radar y sonar*, por intereses militares y de seguridad; *prospección petrolera*, donde con pequeñas mejoras se pueden obtener enormes ganancias; *exploración espacial*, aplicación en la que no pueden perderse datos; y *medicina*, particularmente el tratamiento de imágenes, donde hay vidas en riesgo.

La revolución de las computadoras personales en 1980 y 1990 permitió que el PDS fuese accesible para nuevas aplicaciones. Uno de los primeros productos para el público consumidor fue un juguete (“Speak and Spell”, para ayudar a los niños a aprender a deletrear) desarrollado por Texas Instruments en 1978, que utilizaba un procesador digital de seña-

Tabla 1.1: Algunas aplicaciones del procesamiento digital de señales.

Espaciales	mejora de fotografías compresión de datos análisis de datos de sondas espaciales
Medicinales	diagnóstico por imágenes análisis de electrocardiogramas almacenamiento y recuperación de información
Comerciales	compresión de imagen y sonido efectos especiales en cine videoconferencias
Telefónicas	compresión de voz y datos reducción de eco multiplexado de señales
Militares	radar, sonar comunicaciones seguras procesamiento de imágenes
Industriales	prospección petrolera y minera monitoreo y control de procesos ensayos no destructivos
Científicas	procesamiento de señales sísmicas adquisición de datos análisis espectral

les para sintetizar voz. Los reproductores de compact-disc (CD), desarrollados por Philips Electronics a partir de 1979 fueron los primeros productos de consumo masivo que se aprovecharon de la tecnología de procesamiento digital de señales. Repentinamente el PDS estuvo regido por las leyes del mercado más que por motivaciones militares o gubernamentales. Según el IEEE, en 1985 había tres nichos comerciales para los procesadores digitales de señales (DSP): codificación de voz, compresión de video y módems, representando un mercado de 50 millones de dólares. En la actualidad los DSP están presentes en todos las ramas de la electrónica, y el crecimiento proviene del desarrollo de productos nuevos e innovadores; la Tabla 1.1 muestra apenas algunas de estas variadas aplicaciones. El mercado mundial es de alrededor de 27200 millones de dólares, y la mitad de este volumen está representado por integrados donde el DSP está vinvulado a funciones específicas (aceleradores de video, módems, procesadores de audio, controladores de motores de CA, etc.), como se muestra en la Fig. 1.1.

La revolución tecnológica tuvo lugar de arriba hacia abajo. A comienzos de 1980, el PDS se enseñaba a nivel de posgrado en Ingeniería Eléctrica. Diez años más tarde, el PDS se enseña a nivel de grado. Hoy el PDS es una necesidad básica de científicos e ingenieros en muchos campos.

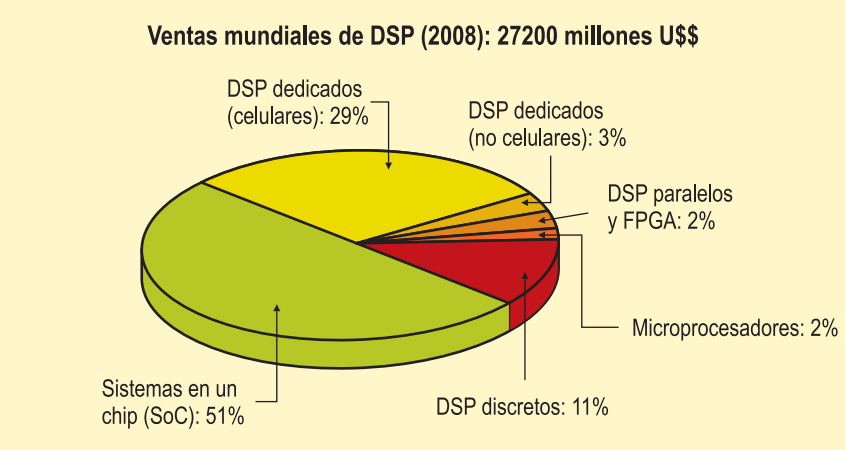


Fig. 1.1. Volumen mundial de ventas de DSPs en el año 2008.

1.2. ¿Porqué estudiar PDS?

Gran cantidad de dispositivos electrónicos y software que afectan muchas facetas de nuestra vida cotidiana están basados en aplicaciones del PDS, como reproductores multimedia, de DVD, de MP3, codificadores de voz en los modems de los teléfonos celulares, procesadores de imágenes en cámaras digitales, navegadores GPS, etc. El PDS permite la transmisión de información utilizando la infraestructura de la red telefónica y de comunicaciones, la medición y el control en equipamiento médico (audífonos, marcapasos), y en la formación y análisis de imágenes médicas, terrestres y planetarias. La lista de aplicaciones es interminable.

La tecnología del PDS es una sinergia de la teoría de señales y sistemas, algoritmos de cálculo, y arquitecturas de hardware y software. El avance continuo en estas áreas y en otras afines ha permitido que el DSP vaya más allá de reemplazar sistemas de procesamiento analógico tradicional, desarrollando aplicaciones que no se podrían haber construido o siquiera imaginado con tecnología analógica. En años recientes, los avances en herramientas de diseño (herramientas de desarrollo, compiladores para lenguajes de alto nivel, simuladores, etc.) han facilitado el diseño, desarrollo y prueba de tales sistemas, haciéndolos accesibles a mayor cantidad de usuarios.

1.3. Algunas aplicaciones del PDS

A continuación se ilustran algunas áreas clásicas donde el PDS ha producido cambios revolucionarios: telecomunicaciones, audio profesional, detección ecos en señales de sonar, radar y sísmicas, y procesamiento de imágenes. Se han preferido las aplicaciones que dieron desarrollo a algunas de las técnicas que se estudiarán en el curso, dejado de lado las más recientes (y complejas) donde la intervención del PDS es más evidente. A medida que se avance en cada aplicación, se notará que el PDS es muy interdisciplinario, basándose en el trabajo técnico de muchos campos adyacentes. Contrariamente a lo que sugiere la Fig. 1.2, las fronteras entre PDS y otras disciplinas técnicas no son definidas y abruptas, sino borrosas y solapadas.

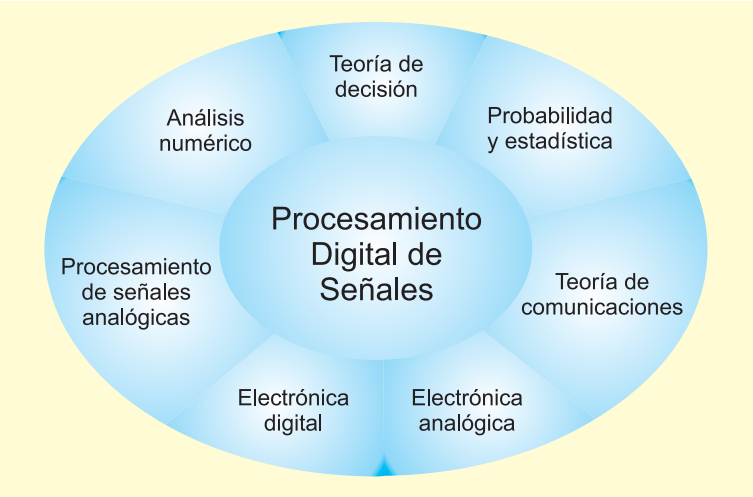


Fig. 1.2. El PDS se relaciona con otras áreas de la ciencia, la ingeniería y las matemáticas.

1.3.1. Telecomunicaciones

Las telecomunicaciones tratan de la transferencia de información de un lugar a otro: conversaciones telefónicas, señales de televisión, archivos de computadoras, y otros tipos de datos. Para transferir la información es necesario contar con un *canal* entre el emisor y el receptor. Este canal puede ser un par de cables, una señal de radio, una fibra óptica, etc. Las compañías de telecomunicaciones cobran por transferir la información de sus clientes, y deben pagar para establecer y mantener el canal. De modo que cuanto más información se pueda transferir por el canal tanto más rentable será la empresa. El PDS ha revolucionado la industria de telecomunicaciones en muchas áreas: generación y detección de tonos de señalización, desplazamiento de bandas de frecuencias, filtrado para eliminar el ruido de línea, etc.

A continuación se discutirán cuatro ejemplos específicos de la red telefónica: multiplexado, compresión, control de eco, y cancelamiento de ruido ambiente.

Multiplexado de señales

Según los últimos datos, existen alrededor de mil millones de teléfonos fijos en el mundo. Presionando algunos pocos botones, las redes de conmutación permiten conectar entre sí dos aparatos en unos pocos segundos. La magnitud de este prodigio es apabullante: hasta principios de 1960 para efectuar una conexión era necesario que las señales de voz (analógicas) sortearan llaves mecánicas y amplificadores vinculados por un par de cables. En comparación, el PDS convierte señales de audio en un flujo serial de datos digitales. El cable y los conmutadores mecánicos son caros; las compuertas lógicas digitales son muy baratas. Como los bits pueden entremezclarse (Fig. 1.3) y posteriormente separarse, por un mismo canal pueden transmitirse muchas conversaciones telefónicas. Por ejemplo, el estándar telefónico conocido como sistema *T-Carrier* permite transmitir simultáneamente 24 señales de voz. Cada canal de voz es muestreado a razón de 8000 veces por segundo, utilizando un conversor analógico-digital especial de 8 bits, denominado *compander*, que comprime logarítmicamente la amplitud de la señal. Cada señal de voz se transmite a

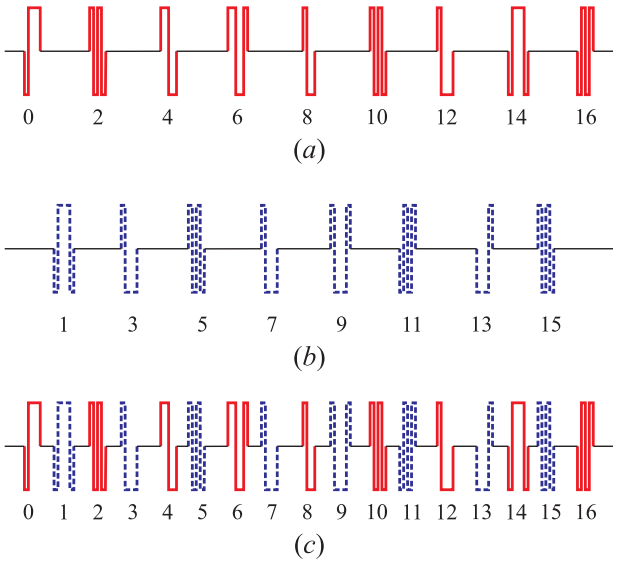


Fig. 1.3. Multiplexado en tiempo o "time-sharing". La señal que se muestra en (c) se ha obtenido mutiplexando las señales (a) y (b).

64000 bits/s, y todos los canales de audio están contenidos en un único canal de datos de 1.544 megabits/s. Esta señal puede transmitirse a 2000 metros (que es una distancia de interconexión típica) usando el cable telefónico común.

Compresión

Cuando una señal vocal se digitaliza a 8000 muestras por segundo, gran parte de la información es redundante: el valor representado por una muestra está prácticamente duplicado en las muestras vecinas. Se han desarrollado docenas de técnicas para convertir señales vocales digitalizadas en un flujo de datos de menor cantidad de bits/s que se agrupan bajo el nombre de algoritmos de *compresión* de datos. Los algoritmos de *descompresión* permiten recuperar la señal original. En general, a mayor nivel de compresión peor es la calidad del audio: la reducción de la tasa de datos de 64 kilobits/s a 32 kilobits/s no resulta en una pérdida apreciable de la calidad de la señal, que sí se percibe cuando se lleva a 8 kilobits/s. La compresión más alta que se puede obtener (de alrededor de 2 kilobits/s) desmejora la calidad de manera tan apreciable que sólo se emplea para aplicaciones militares y comunicaciones submarinas.

Control de eco

El eco es un problema serio en las conexiones telefónicas de larga distancia. Al hablar en el microteléfono la señal que representa la voz viaja hasta el receptor, donde una parte de la misma retorna como un eco. Si la distancia de interconexión es de unos pocos kilómetros, la demora de la señal es de algunos milisegundos; el oído humano está acostumbrado a estos pequeños retardos de tiempo, y no se perciben efectos anormales. Sin embargo, a medida que crece la distancia el eco se hace cada vez más notorio y molesto. En enlaces intercontinentales el retardo puede alcanzar varias centenas de milisegundos

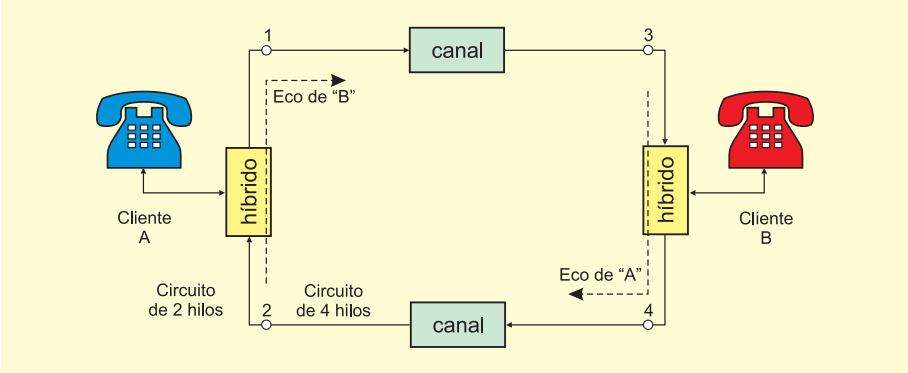


Fig. 1.4. Diagrama de un circuito telefónico simplificado.

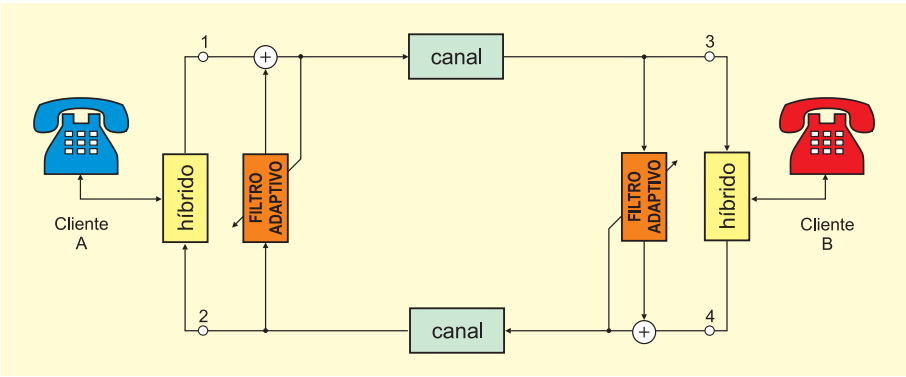


Fig. 1.5. Cancelamiento de eco en redes telefónicas de larga distancia.

e imposibilitar una comunicación fluida.

En la Fig. 1.4 se muestra un esquema simplificado de un circuito telefónico de larga distancia. El transformador híbrido en los extremos de la red convierte el circuito de dos hilos en el lado del abonado a un circuito de cuatro hilos, generando caminos separados para cada dirección de transmisión. Este cambio de 2 a 4 hilos se basa en razones económicas, por ejemplo para permitir la amplificación de la señal, el multiplexado o la transmisión simultánea de varios llamados, etc. Idealmente, la señal de voz que se origina en A viaja por el camino 1-3 hasta el híbrido en la derecha, y de ahí hasta el receptor B, mientras que la señal de B viaja por el camino 4-2 hacia A. La red híbrida en cada extremo de la red debe asegurar que la señal de voz se acopla al camino apropiado, y que ningún vestigio de la misma retorne hacia el receptor. Sin embargo, pequeñas diferencias de impedancia causan que algunas de las señales entrantes vuelvan al interlocutor en la forma de eco (líneas de puntos en la Fig. 1.4).

El PDS ataca este problema midiendo la señal de retorno, y generando una *antiseñal* apropiada de modo de cancelar el eco. En cada extremo del canal de comunicación (Fig. 1.5), la señal entrante se aplica simultáneamente al híbrido y a un *filtro adaptivo*, el que estima el eco que produciría la línea y lo resta de la señal original. El filtro adaptivo es un sistema realimentado que calcula un modelo de la línea de manera que el sistema puede cancelar el eco casi para cualquier tipo de conexión o distancia entre los abonados.



Fig. 1.6. Detalle del parlante "generador de ruido".

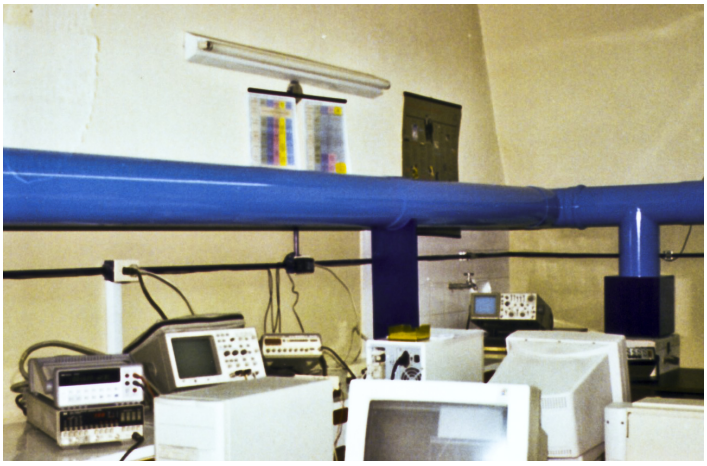


Fig. 1.7. Detalle del parlante cancelador.

Cancelamiento de ruido

Esta misma técnica se puede utilizar para reducir el ruido ambiente, cancelándolo mediante una señal de "antirruido". Un sistema activo elemental se compone de un dispositivo electroacústico que cancela la señal no deseada generando una señal de igual amplitud y fase opuesta. La señal original y el "antirruido" se combinan de modo de cancelar ambos sonidos. Aunque la idea no es nueva, ya que fue propuesta por Lueg en 1936, sólo en los últimos años la tecnología se ha desarrollado lo suficiente para poder aplicarla satisfactoriamente.

En el Laboratorio de Procesamiento de Señales y Circuitos (LaPSyC) de la UNS (Nieto *et al*, 2001; Gonzalez *et al*, 2002) se ha construido un equipo experimental para ensayar estas técnicas constituido por un par de parlantes montados sobre un tubo de PVC de 20 cm de diámetro. El tubo consta de dos secciones a 90 grados, la primera con una longitud de 5.5 m, y la segunda de 1.5 m, según se aprecia en las Figs. 1.6 y 1.7. El "generador de ruido" y el "cancelador" son un par de parlantes, el primero montado en un extremo del segmento de mayor longitud, y el segundo en la sección de longitud menor, sobre una

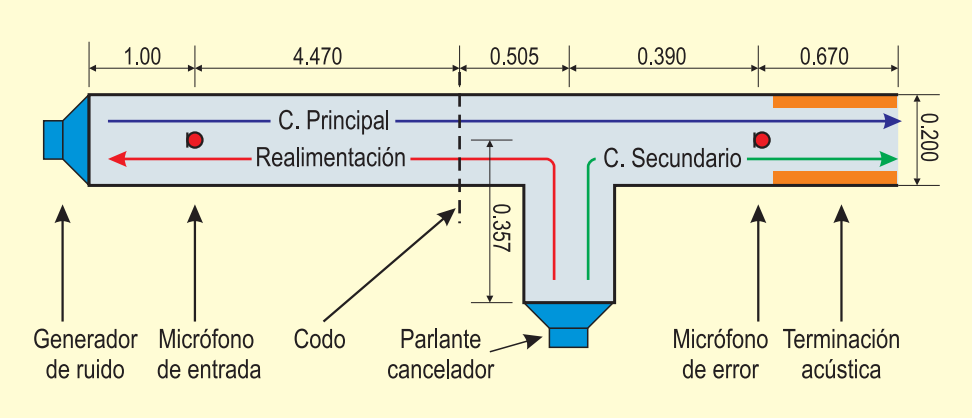


Fig. 1.8. Diagrama del prototipo experimental.

"T". Los transductores están ubicados dentro de cajas acústicas para evitar la radiación de ruido al exterior, y los micrófonos de referencia y error fueron colocados sobre el tubo. Un diagrama esquemático del sistema, junto con las dimensiones más relevantes, se muestra en la Fig. 1.8.

En las Fig. 1.9(*a*) se observan los resultados de cancelamiento de ruido ante una excitación compuesta por tonos puros, y en la Fig. 1.9(*b*) la atenuación obtenida para una excitación tipo ruido blanco.

Televisión digital

El Comité Consultivo Internacional de Radiocomunicaciones (CCIR) definió en 1982 la norma para codificar señales de video analógica entrelazadas (como las que se usan en la TV común), que se conoce como ITU-R BT.601 (ITU 1983). De acuerdo a esta norma, el flujo de datos de una señal de video común es de 166 Mb por segundo, que es demasiado elevada para los canales de transmisión o los dispositivos de almacenamiento usuales.

Entre los procesos necesarios para llevar la señales desde la fuente (una cámara, un estudio de TV) hasta su destino (una pantalla) se destacan los de *compresión* y *descompresión*. El primero reduce la señal de video con una tasa de 166 Mb/s a 20 Mb/s (o menos), y el segundo se encarga de reconstruir la señal para visualizarla. En los últimos años se

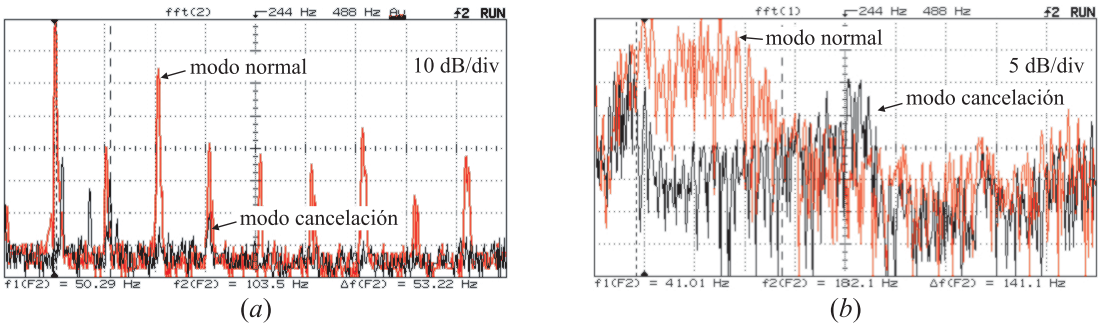


Fig. 1.9. Resultados de cancelamiento: (*a*) tonos puros; (*b*) ruido de banda ancha.

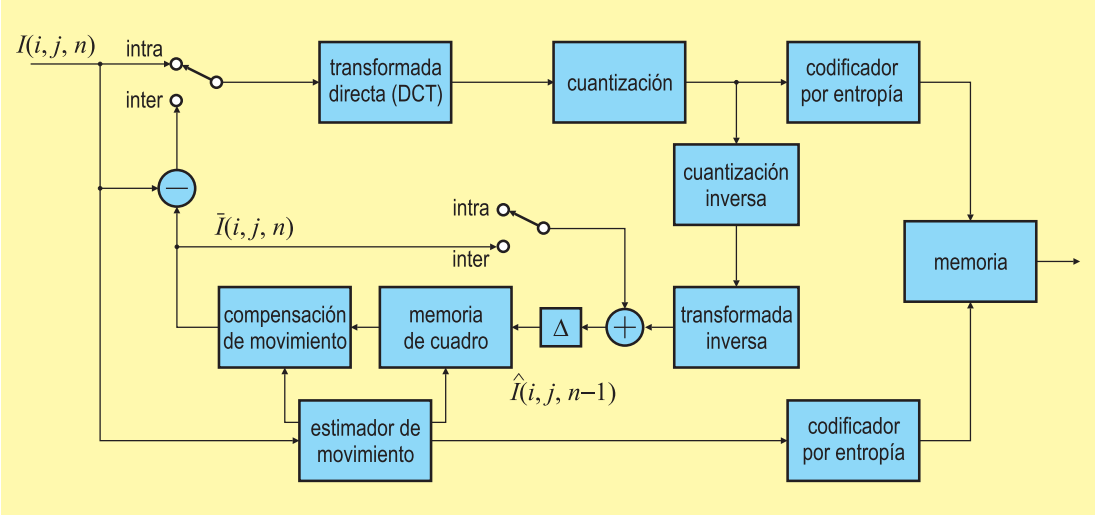


Fig. 1.10. Diagrama bloque de un sistema de compresión de video.

han propuesto varios esquemas de codificación para imagen y video, tales como JPEG para imágenes, H.263 para video con bajas tasas de transmisión, MPEG-1 para almacenamiento, MPEG-2 para transmisión y aplicaciones generales de alta calidad, MPEG-4 para aplicaciones multimedia interactivas, y H.264 para altas tasas de compresión. Aunque tienen diferentes especificaciones, el principio de funcionamiento de todos ellos es similar. Un bloque común es el de compresión, que se representa esquemáticamente en la Fig. 1.10.

El sistema de la figura puede trabajar en dos modos diferentes: *intra* en el que se explota solamente la redundancia espacial en la imagen, o *inter*, donde se aprovecha la redundancia temporal entre imágenes vecinas. Módulos de análisis de mayor jerarquía que éste se encargan de seleccionar automáticamente uno u otro modo de operación de acuerdo a las características de las imágenes.

Se analizará brevemente el funcionamiento del modo *intra*. Este es el modo usado, por ejemplo, para la primera imagen de una secuencia de video. En primer lugar, se realiza una *transformación* para decorrelar la información. La imagen se particiona en bloques de 8×8 bits, y a cada uno de ellos se aplica una transformada discreta coseno (DCT), que es similar a una transformada discreta de Fourier, pero que enfatiza las bajas frecuencias. Cada uno de los bloques se representa en un formato numérico apropiado teniendo en cuenta las peculiaridades del sistema visual humano. Este proceso que se denomina *cuantización*, y en general introduce algún grado de distorsión, que hace que la imagen decodificada sea distinta a la señal original. Los coeficientes cuantizados se codifican según su entropía[1], lo que asegura una transmisión eficiente.

Los datos cuantizados se utilizan localmente para proveer al codificador con la misma información que estará disponible en el decodificador. En otras palabras, en el codificador también se encuentra incluido un decodificador, que a través de la *cuantización inversa* y la *transformación inversa* permite obtener una réplica de la imagen decodificada, que se almacena en la *memoria de cuadro*, y que será utilizada en la codificación de los cuadros

[1]Los coeficientes más frecuentes se codifican usando símbolos más cortos. La longitud de cada símbolo es aproximadamente proporcional a menos el logartimo de su probabilidad.

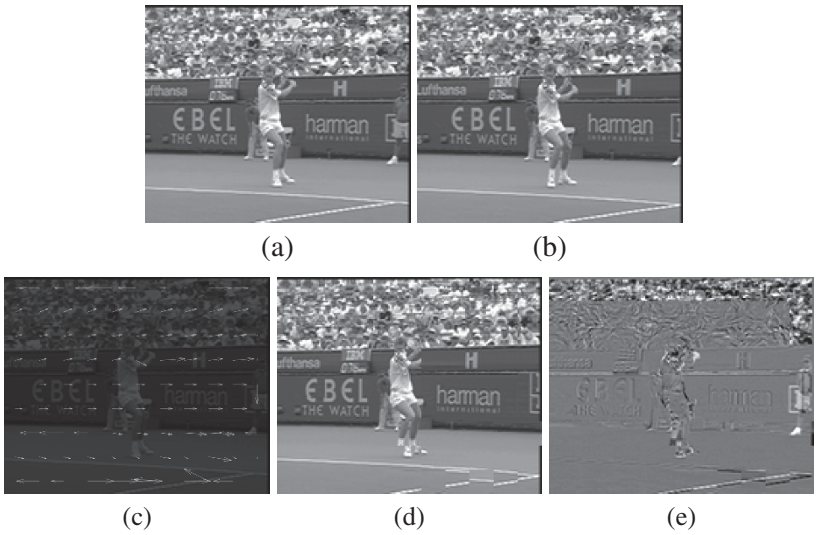


Fig. 1.11. Codificación de imágenes: Imagen número 12 (a) y número 10 (b) de la sucesión original. Campo de movimiento estimado a partir de las imágenes previas (c); sólo se muestra un vector por cada bloque de 16×16 pixels. Estimación del cuadro 12 a partir del cuadro 10 y la información de compensación del movimiento (d). Imagen error entre el cuadro 12 y la imagen compensada en movimiento (e). A fines de visualización se agregó un corrimiento de 128 a los pixeles de la imagen de error, y se escalaron los valores resultantes entre 0 (negro) y 255 (blanco).

que siguen. Esta imagen se representa como $\hat{I}(i,j,n-1)$, donde i, j, son índices que indican la posición espacial del pixel, y n la posición temporal. El sombrero "$\hat{}$" representa que no es el cuadro original, sino uno decodificado. Como durante todo este tiempo el sistema ya ha comenzado a codificar el cuadro siguiente en la sucesión, la imagen decodificada se almancena como perteneciente al instante temporal $n-1$, y este retardo se representa como Δ en la figura.

El primer paso es explotar la redundacia temporal entre las imagenes decodificadas anteriormente y la reciente. Por simplicidad, se supondrá que sólo se utiliza la imagen anterior, pero en un sistema real la memoria de cuadro puede contener varias imágenes decodificadas para utilizar en este paso.

La imagen $\hat{I}(i,j,n-1)$ decodificada previamente se utiliza para estimar la imagen actual utilizando el bloque *estimador de movimiento* que calcula el desplazamiento entre una escena y otra, asignándole a cada pixel un vector de movimiento (d_x, d_y). La información de movimiento es parte de una representación más compacta de la sucesión de video, que nuevamente se codifica de acuerdo a su entropía y se transmite.

Basado en este campo de movimiento y en la imagen decodificada almacenada en la memoria de cuadro, el bloque *compensación de movimiento* produce una estimación de la imagen actual $\bar{I}(i,j,n)$, denominada *imagen compensada por movimiento* en el instante temporal n. El sistema hace la diferencia entre la imagen compensada por movimiento $\bar{I}(i,j,n)$ y la imagen original $I(i,j,n)$ en el instante n y obtiene la imagen de error, que contiene toda la información de la imagen actual que no fue estimada correctamente utilizando la información disponible a partir de la imagen $\hat{I}(i,j,n-1)$. Las diferencias entre las distintas imágenes se ilustran en la Fig. 1.11.

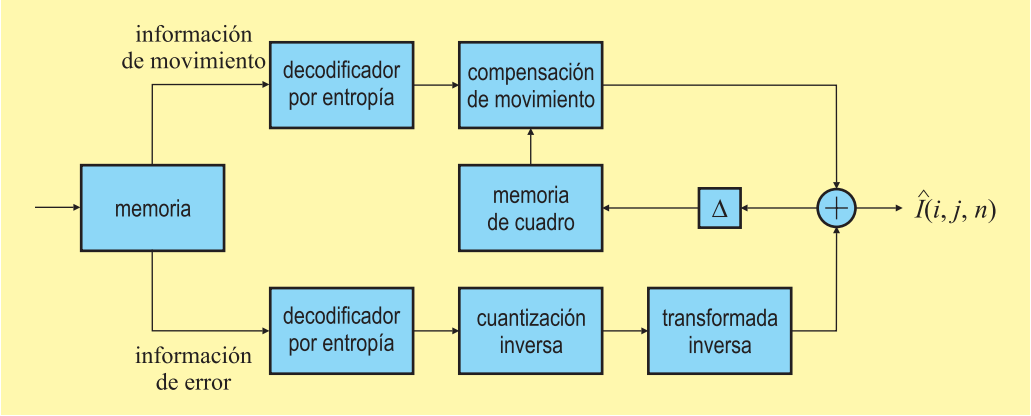


Fig. 1.12. Esquema del decodificador asociado al codificador de la Fig. 1.10

La imagen de error se trata como una imagen original en el modo *intra*, es decir, se decorrelaciona (transformada directa) utilizando la DCT por bloques, se cuantiza, los coeficientes se codifican según su entropía y se transmiten.

La Fig. 1.12 muestra el diagrama bloque del decodificador. Las imagenes $\hat{I}(i,j,n-1)$ decodificadas previamente se almacenan en la memoria de cuadro, y se compensan por movimiento utilizando la información que se transmite al codificar los cuadros siguientes. Esto explica la necesidad de contar con una réplica de las imagenes decodificadas $\hat{I}(i,j,n)$ en el codificador, ya que en caso contrario el codificador y el decodificador estarían utilizando diferente información en el proceso de estimación del movimiento: el codificador estimaría el movimiento utilizando la información original $I(i,j,n)$, mientras que el decodificador estaría aplicando esta información sobre la señal decodificada $\hat{I}(i,j,n)$.

1.3.2. Procesamiento de audio

Probablemente, la vista y el oído son los sentidos humanos más relevantes para las relaciones entre las personas. En consecuencia, gran parte de las aplicaciones del PDS está vinculado con el tratamiento de señales de audio y video.

Música

El camino que va desde el músico al oyente (o bien desde el micrófono al parlante) es significativamente largo, como se sugiere en la Fig. 1.13. La representación digital de los datos permite prevenir la degradación de la señal asociada al almacenamiento y manipulación analógicas, efecto que resulta familiar a cualquiera que haya comparado la superior calidad musical de los discos compactos frente a la de los cassettes o vinilos (aunque algunos puristas y audiófilos sostienen lo contrario).

La pieza musical se graba en un estudio de sonido en múltiples canales o pistas. En algunos casos, algunos instrumentos y las voces se graban en canales separados. Esto permite que el ingeniero de sonido y de mezcla tenga mayor libertad y flexibilidad para crear el producto final. El complejo proceso de combinar las pistas individuales en un par de

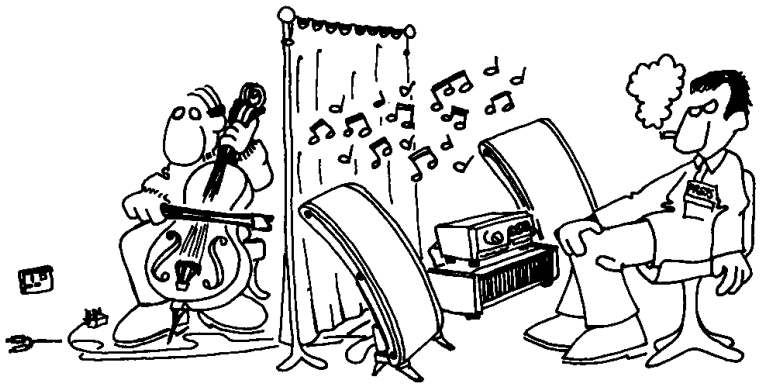


Fig. 1.13. El camino de la señal analógica puede ser particularmente largo... o no!

pistas –los canales izquierdo y derecho– o en "5+1" –izquierda y derecha delanteros, izquierda y derecha traseros, y un canal central de graves– se denomina *mix down*, o mezcla. El PDS puede proveer muchas funciones fundamentales de la mezcla, como el filtrado, suma y resta de señales, edición, etc.

Otra de las aplicaciones musicales del PDS es la creación de *reverberación* artificial. Si los distintos canales de audio simplemente se suman, la pieza de sonido suena opaca, pues el contenido de ecos o de reverberaciones de la música –minimizados al grabar en estudio– influyen favorablemente sobre los oyentes. El PDS permite agregar ecos y reverberaciones artificiales durante el proceso de mezcla, de modo de simular ambientes ideales de audición. Los ecos de pocas centenas de milisegundos de duración dan la impresión de un ambiente de gran tamaño, mientras que retardos de 10 a 20 milisegundos provocan en el oyente la ilusión de un ambiente de audición más reducido.

El disco compacto (CD)

Las personas de mayor edad recuerdan los sonidos desagradables que acompañaban la reproducción de los discos de vinilo (LP), sobre todo cuando había rayones, polvo, o hasta ¡huellas de dedos! en su superficie. El sistema de discos compactos (CD) evita todos los inconvenientes del LP, y brinda ventajas adicionales. La Tabla 1.2 compara las características técnicas de los dos sistemas.

La información en el CD se almacena digitalmente en una pista espiralada, con una sucesión de "marcas" (Fig. 1.14). Cada bit grabado en la superficie del CD ocupa un área de solamente 1 μm^2, por lo que la densidad de información muy alta (10^6 bits por milímetro cuadrado), aunque no tanto como en un DVD.

En la Fig. 1.15 se muestra un diagrama bloque del procesamiento de señales de audio para la grabación del CD. La señal analógica de cada uno de los canales de audio se muestrea a 44.1 kHz, y se digitaliza. Cada muestra se representa por una palabra de 16 bits, que permite abarcar un rango dinámico de 90 dB. En cada instante de muestreo se obtienen 32 bits (16 por cada canal), que se codifican utilizando la técnica Reed-Solomon de dos niveles, para detectar y corregir (o cancelar) los errores durante la reproducción. Se agregan bits adicionales de control y para almacenar información complementaria. El flujo de datos resultante se transforma en un formato apropiado para grabar en el disco,

Tabla 1.2: Características de los vinilos (LP) y discos compactos (CD).

Característica	LP	CD
Respuesta en frecuencia	30 Hz a 20 kHz	20 Hz a 20 kHz
Rango dinámico	70 dB (a 1 kHz)	$>$ 90 dB
Relación señal a ruido	60 dB	$>$ 90 dB
Distorsión armónica	1-2 %	0.004 %
Separación de canales	25-30 dB	$>$90 dB
Wow y flutter	0.03 %	no detectable
Efecto de polvo, rayones, etc.	causa ruido	se puede corregir
Durabilidad	se degrada con el uso	semipermanente
Vida de la "púa"	500 a 600 hs	semipermanente
Capacidad	40 a 45 minutos	50 a 75 minutos

utilizando una modulación EFM (modulación 8 a 14) transforma cada byte en un código de 14 bits. Después de un procesamiento adicional, este flujo de bits se envía al láser, que graba la información digital en una película sensible depositada sobre un disco de vidrio. Para generar los patrones de las marcas se utiliza un proceso fotográfico, y de esta forma se obtiene el disco "maestro" a partir del cual se generan las copias que podrán disfrutar los oyentes.

Durante la reproducción (Fig. 1.16) las pistas se leen ópticamente a una velocidad tangencial constante de 1.2 m s^{-1}, mientras el disco gira a una velocidad de entre 8 rev s^{-1} y 3.5 rev s^{-1}. La señal digital se demodula, se detecta cualquier error en el flujo de datos y, si es posible, se corrige. Los errores pueden tener origen en fallas en el proceso de fabricación (la creación de la copia a partir del disco maestro), daños en la superficie del CD, polvo, etc. Si no son corregibles, su efecto se reduce reemplazando la muestra dañada por el promedio de las muestras adyacentes, o, si hay más de una muestra errónea, asignándoles un valor nulo (*muting*).

Después de la corrección o cancelación de los errores, los datos están formados por una serie de palabras de 16 bits, cada una de las cuales representa una muestra de señal de au-

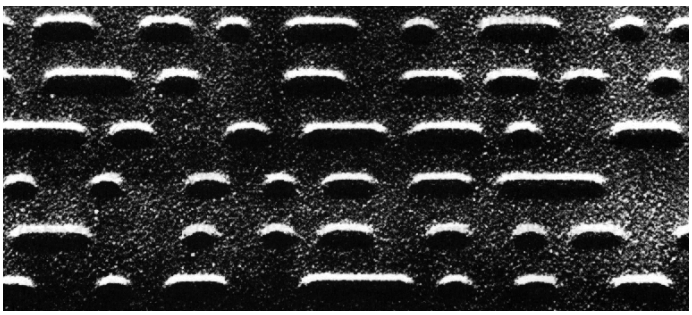


Fig. 1.14. Marcas del láser en la superficie de un CD. Cada marca tiene $0{,}5 \times 10^{-6}$ m de ancho, 0,8 a $3{,}5 \times 10^{-6}$ m de longitud, y una profundidad de $0{,}11 \times 10^{-6}$ m. La distancia entre pistas es de $1{,}6 \times 10^{-6}$ m. (Reproducido de *Philips Technical Review*, **40** (6), 1982).

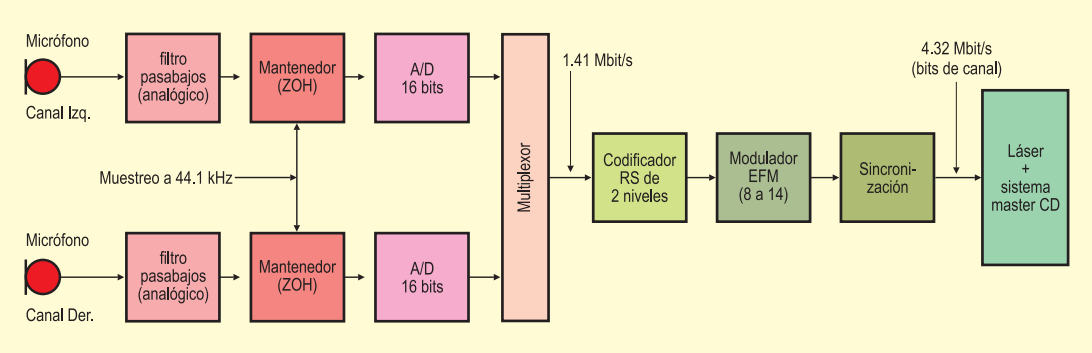


Fig. 1.15. Procesamiento de una señal de audio para la grabación de un CD.

dio. Estas muestras podrían aplicarse directamente a un conversor D/A, pero impondría restricciones muy severas sobre el filtro reconstructor. En particular, el nivel de las señales por encima de 20 kHz deben reducirse al menos en 50 dB relativos a la máxima señal de audio, y para evitar distorsiones el filtro debe tener una característica de fase lineal en toda la banda de audio. Por este motivo se prefiere un procesamiento digital adicional: las señales se filtran con un filtro digital que trabaja a 4 veces o más la frecuencia de muestreo (*oversampling*) para lograr que la salida del DAC sea más suave, y simplificar de esta forma los requerimientos del filtro reconstructor analógico. Además con este proceso se logra una relación señal a ruido equivalente a la de un conversor D/A de 16 bits utilizando un conversor de sólo 14 bits. El filtro digital tiene la respuesta de fase lineal requerida lo que reduce la posibilidad de intermodulación, y su característica varía con la frecuencia de reloj, haciéndolo insensible a las variaciones de la velocidad de rotación del disco.

Codificación MP3

MP3 es una abreviatura de MPEG 1/2-Layer 3, el mecanismo de codificación de audio diseñado por el Motion Picture Experts Group (MPEG), un grupo de estudio de la International Standards Organization (ISO), cuyo nombre formal es ISO/IEC JTC1/SC29/WG11. Este comité fue creado en 1988 para desarrollar normas genéricas para la codificación de

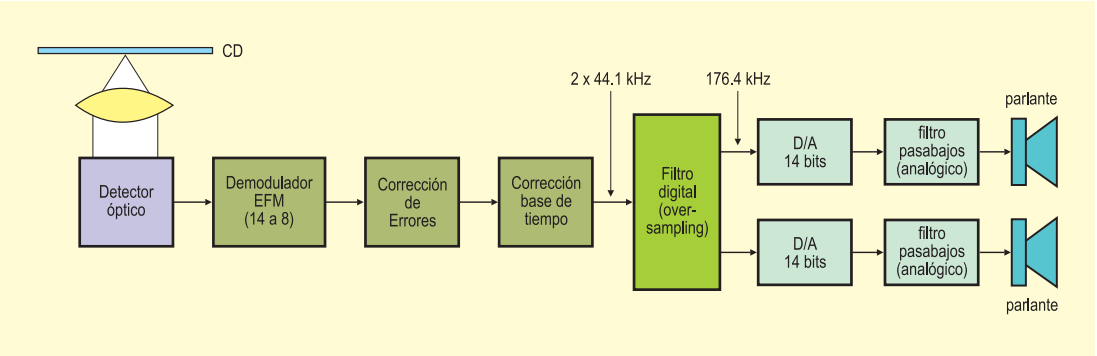


Fig. 1.16. Reproducción de la señal de audio en un CD.

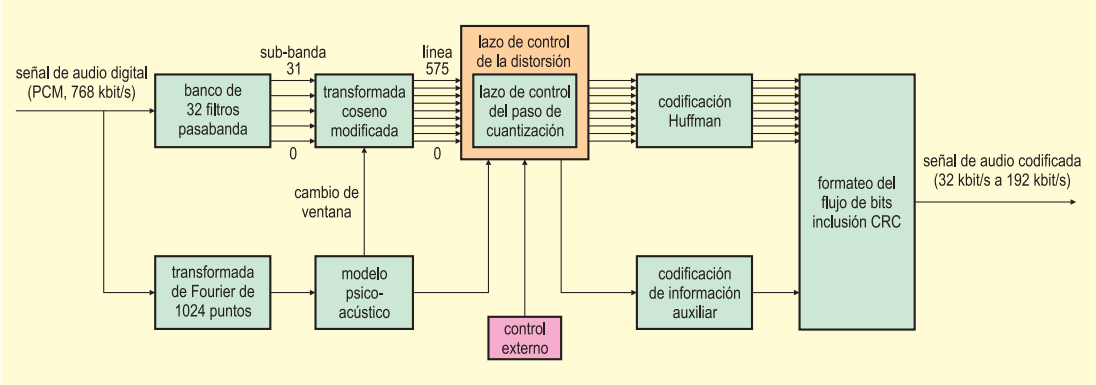


Fig. 1.17. Un codificador MPEG Layer-3 (MP3).

películas y audio; desde entonces, se ha encargado de la normalización de las técnicas de compresión para video y audio. La norma MPEG-1 Layer 3 fue definida en 1991; el "layer 3" es un modo de operación de mayor complejidad y mejor desempeño, diseñado para proveer la mejor calidad de sonido a bajas tasas de transferencia, de alrededor de 128 kbit/s para una señal de audio estéro (Brandenburg y Popp, 2000).

Desde entonces, los avances en la investigación en codificación perceptual de audio han permitido desarrollar nuevos métodos de codificiación. El MPEG-2, cuya normalización se produjo en 1994, introdujo menores frecuencias de muestreo (16 kHz, 22.05 kHz y 24 kHz) que se suman a las frecuencias de 32 kHz, 44.1 kHz y 48 kHz definidas en MPEG-1. En 1997 se finalizó la definición de la norma MPEG-2 Advances Audio Coding (AAC), que define nuevos esquemas de codificación (no son compatibles con MPEG1-Layer 3) para el tratamiento de señales estéreo y multicanales, con soporte para frecuencias de muestreo entre 8 kHz y 96 kHz, y entre 1 a 48 canales de audio. Paralelamente, se han diseñado otros sistemas propietarios que supuestamente permiten codificar con mayor calidad o mayor compresión.

El formato no tiene una tasa de compresión fija, y para el Layer 3 la norma define un rango que va desde 8 kbit/s a 320 kbit/s; la tasa de compresión se puede cambiar entre uno y otro bloque de datos de audio.

La especificación de la mayoría de las etapas del decodificador se definen por ecuaciones; el cumplimiento con la norma se verifica por la máxima desviación de la señal decodificada respecto a una señal de referencia. Esto permite construir decodificadores que corran sobre arquitecturas de punto fijo o punto flotante; dependiendo de la habilidad de los implementadores, es posible lograr decodificadores que cumplan con la norma utilizando un ancho de palabras de 20 bits, sin necesidad de utilizar operaciones en doble precisión.

La codificación de MPEG Audio queda librada al implementador de la norma. Los estándares ISO incluyen algunos ejemplos de decodificadores, pero es necesario una enorme experiencia y gran cantidad de conocimientos para implementar codificadores MPEG de buena calidad; por ello el número de implementaciones independientes se ha mantenido relativamente bajo.

El principio de funcionamiento de un codificador MP3 es el siguiente (Fig. 1.17). La señal de audio muestreada es filtrada por una cascada de dos tipos de filtros diferentes. El primero es un banco de 32 filtros pasabandas polifásico (el banco de filtros principal),

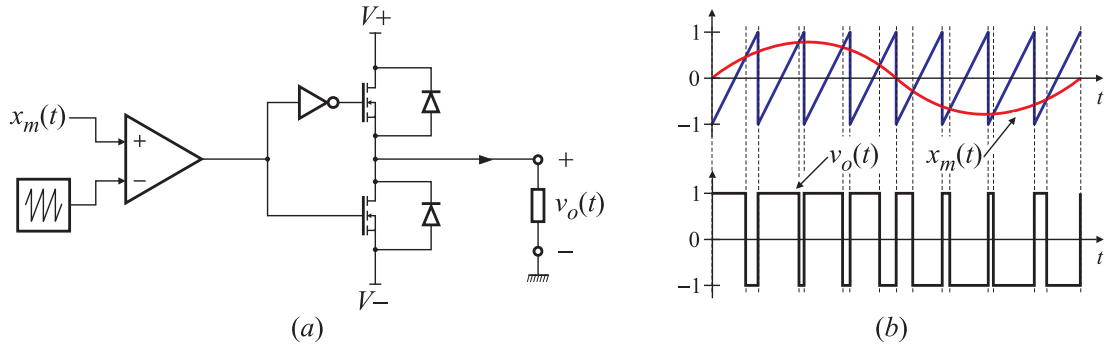


Fig. 1.18. Amplificador clase D: esquema circuital (a) y formas de ondas relevantes (b).

seguido de una transformada coseno modificada de 576 muestras. Esta división de cada una de las 32 bandas en 18 sub-bandas aumenta la posibilidad de eliminar redundancias, lo que permite una codificación más eficiente.

El modelo perceptual determina la calidad de la implementación del codificador. Pude ser implementado utilizando un banco de filtros, o combinando el cálculo de los valores de energía que se utilizarán para definir el umbral de enmascaramiento con el banco de filtros principal. La salida del modelo perceptual son los valores del umbral de enmaswcaramiento para cada sub-banda de frecuencias. Los coeficientes de la transformada coseno que sean menores que el umbral se descartan. En el Layer-3, estas bandas de frecuencia son aproximadamente equivalentes a las bandas críticas del oído humando. Si el ruido de cuantización se mantiene por debajo del umbral de enmascaramiento, la señal comprimida resulta indistinguible de la señal original.

Amplificadores de potencia

Los amplificadores de audio de potencia tradicionales solían ser de clase B o AB, pues permiten conseguir baja distorsión con un diseño sencillo. Su eficiencia de potencia es moderada, y su rendimiento máximo teórico es ligeramente inferior al 80 %. En los últimos años se han incrementado los esfuerzos por desarrollar técnicas de amplificación más eficientes. Una de las premisas básicas del diseño electrónico actual es reducir al mínimo el consumo de potencia del propio dispositivo, objetivo que se puede alcanzar trabajando los semiconductores al corte y la saturación, donde su consumo de energía es mínimo. Esta es la idea detrás de los amplificadores conmutados (o clase D), que pueden alcanzar un rendimiento máximo teórico cercano al 100 %.

Este principio de funcionamiento requiere modular la señal a convertir o amplificar, de modo de convertirla en una señal binaria, del tipo “0-1” o “apagado-prendido”. Una de las técnicas de modulación binaria más utilizadas es la modulación por ancho de pulsos (MAP), que se.obtiene comparando la señal a modular con una señal portadora con forma de rampa o triángulo de frecuencia mayor como se muestra en la Fig. 1.18(a). Este tipo de modulación se denomina MAP *natural*. La señal de salida es una onda cuadrada con ciclo de trabajo variable que depende de la amplitud de la señal moduladora. En la Fig. 1.18(b) se muestran la formas de onda relevantes de la MAP.

La determinación analítica del espectro en frecuencia de una señal MAP no es trivial. Los primeros trabajos, de alrededor de 1950, sólo calculan el espectro para el caso particu-

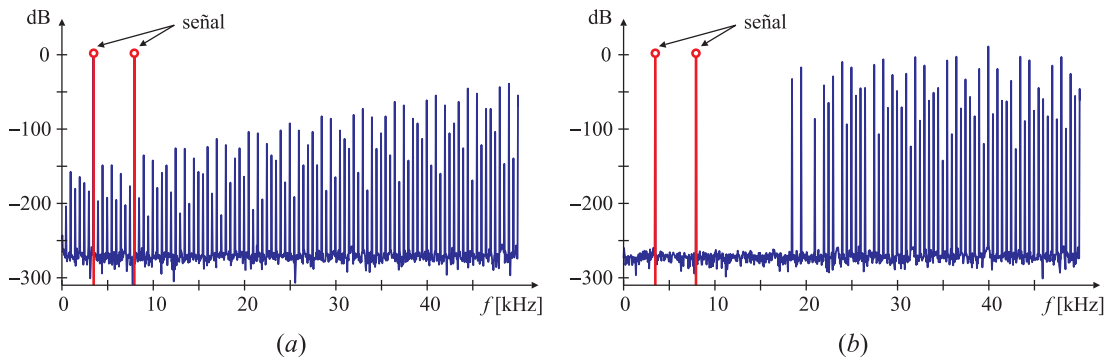


Fig. 1.19. Espectro de una señal PWM natural (a) y una señal "click" modulada (b).

lar en que la señal moduladora es sinusoidal; recién en 2003 se publicaron los primeros trabajos que explicitaban el espectro de una señal PWM modulada por una forma de onda arbitraria. El espectro de una señal MAP natural está compuesta por el espectro de la señal moduladora, junto con réplicas moduladas en fase centradas en cada armónica de la portadora, como se representa en la Fig. 1.19(a). Por lo tanto, para que los niveles de distorsión sean pequeños es necesario que la frecuencia de la portadora (la onda triangular o diente de sierra) sea varias veces superior a la frecuencia máxima de la señal moduladora.

Una técnica de modulación distinta es la "modulación click", cuya característica principal es que la señal modulada tiene distorsión nula en banda base y además se puede especificar una banda de guarda libre de productos de intermodulación, desplazando el ruido a un rango de frecuencias por encima de la banda de interés, como se muestra en la Fig. 1.19(b).

El inconveniente es que el proceso de modulación es suficientemente complejo como para permitir una implementación sencilla, como se muestra en la Fig. 1.20. Los bloques críticos son el transformador de Hilbert (con respuesta impulsiva $(\pi t)^{-1}$) y el modulador exponencial analítico (MEA); además es necesario determinar con muy buena precisión los instantes en que la onda cuadrada de salida cambia de signo. Estos problemas hacen que la implementación "en línea" sea difícil (Stefanazzi, 2008). Sin embargo, la comparación de los espectros de las Figs. 1.19(a) y (b) justifica que en la actualidad se sigan investigando nuevas técnicas de modulación para atenuar los niveles de distorsión con implementaciones más sencillas que la modulación "click". Todas estas alternativas em-

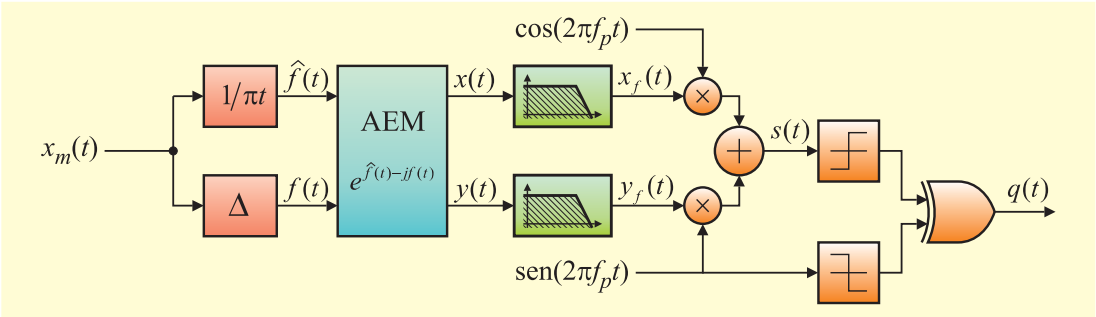


Fig. 1.20. Esquema de un modulador "click".

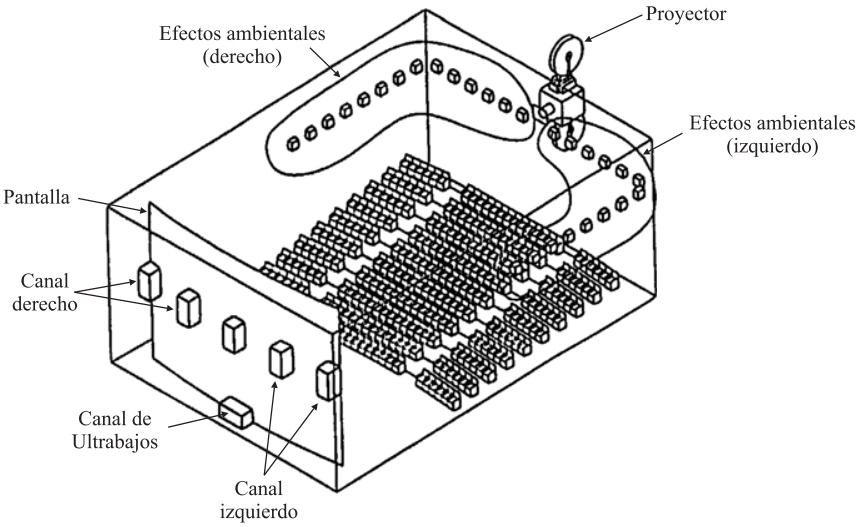


Fig. 1.21. Arreglo de parlantes en un cine con sonido envolvente.

plean distintas técnicas de procesamiento digital de señales (Chierchie, 2010), algunas de las cuales serán estudiadas en este curso.

Otras aplicaciones de audio

El PDS se aplica en otros equipos de uso masivo, tales como televisores, grabadores de video, videocámaras, equipos profesionales como los empleados en estudios de grabación, transmisión y distribución de programas de TV, etc. Otras aplicaciones de PDS en audio son:

- Creación y uso de efectos de sonido (disparos, pasos, aplausos, ruido de automóviles que se alejan, etc.) en comerciales de TV y películas para mejorar la ilusión de realidad o aumentar la credibilidad de una escena: los sistema Dolby o DTS para generar sonido "tridimensional" en el cine (Fig. 1.21), el procesamiento de audio de los sistemas de "home theater", etc.
- Mejora del ámbito de audición y aumento de la riqueza del sonido mediante filtros digitales sencillos que simulan ecos, reverberaciones y efectos corales.
- Síntesis de sonidos que imitan instrumentos musicales, y otros que no se pueden generar con ningún instrumento convencional.
- Empleo de técnicas avanzadas en la codificación, detección, y corrección de errores, eliminación del *wow* y *flutter* (variaciones de velocidad de baja y alta frecuencia, respectivamente), asegurando que la calidad del material de audio no dependa del soporte (magnético u óptico), etc.
- Mejora de registros sonoros de materiales de archivo.

Síntesis de voz

El reconocimiento y la síntesis de voz permiten la comunicación entre humanos y máquinas. Para la generación de voz artificial se han popularizado dos tecnologías diferentes: *grabación digital* y *simulación del tracto vocal*. La primera se basa en digitalizar la voz de un locutor humano (Fig. 1.22) y almacenarla, usualmente de forma comprimida. Para la reproducción se descomprimen los datos, y se convierten nuevamente a formato analógico. Una hora de voz grabada requiere aproximadamente 3 megabytes de almacenamiento, lo que está dentro de las capacidades de sistemas de cómputo pequeños. Esta es la forma de generación de voz sintética más utilizada hoy en día.

Los simuladores del tracto vocal son más complicados, y tratan de reproducir los mecanismos físicos por los cuales los seres humanos generan la voz. El tracto vocal (Fig. 1.23) es una cavidad acústica con frecuencias de resonancia determinadas por el tamaño y la forma de las distintas cámaras. Los fonemas se generan de dos maneras diferentes, que dan origen a los sonidos *vocales* y *fricativos*. Los primeros ocurren por la vibración de las cuerdas vocales ante el paso del flujo de aire y son ondas de naturaleza periódica (es el caso de las vocales). Los sonidos fricativos se originan por la turbulencia del aire ante restricciones tales como dientes y labios (por ejemplo, el sonido de la "t", de la "b", etc.). Los simuladores del tracto vocal operan generando señales eléctricas que reproducen este tipo de excitación (Fig. 1.24), y sus características se simulan filtrando la señal de excitación con un filtro digital con similares frecuencias de resonancia.

Estas técnicas se aplican también en los sistemas de telecomunicaciones. En la telefonía celular, el módulo encargado de convertir una versión digital de la señal de voz en una sucesión de bits, estima cada 20 ms un conjunto de parámetros de la señal vocal y el receptor se encarga de convertir este conjunto de parámetros nuevamente en una señal de voz: *cada celular resuelve un sistema de 10 ecuaciones lineales en 10 incógnitas 50 veces por segundo*. La telefonía moderna no sería posible sin los mecanismos de análisis y síntesis de voz.

Reconocimiento de voz

El reconocimiento automático de la voz humana es inmensamente más difícil que la síntesis. El PDS enfoca el problema de reconocimiento en dos etapas: *extracción de características*, y *comparación de patrones* ("matching"). El esquema básico se representa en la Fig. 1.25. Cada palabra de la señal de audio se aísla y se analiza para identificar el tipo de excitación y las frecuencias de resonancia. Estos parámetros se comparan luego con una base de datos formada por ejemplos de palabras, de modo de identificar cuál de los elementos de la base de datos es más parecido a la señal de entrada. Estos sistemas suelen estar limitados

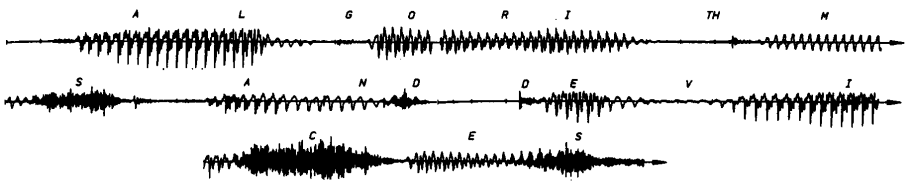


Fig. 1.22. Ejemplo de una señal vocal ("algorithms and devices").

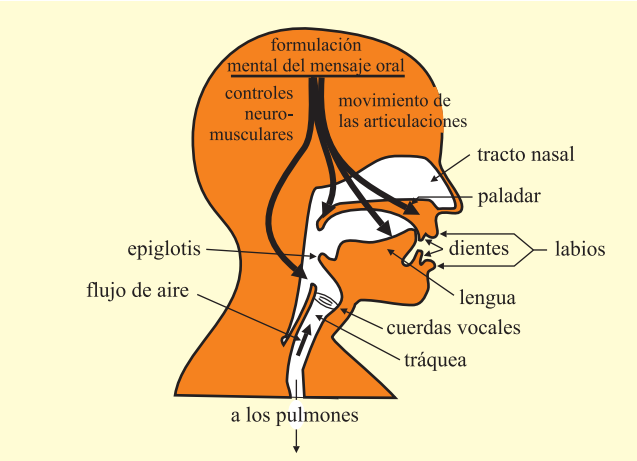


Fig. 1.23. Corte esquemático del tracto vocal.

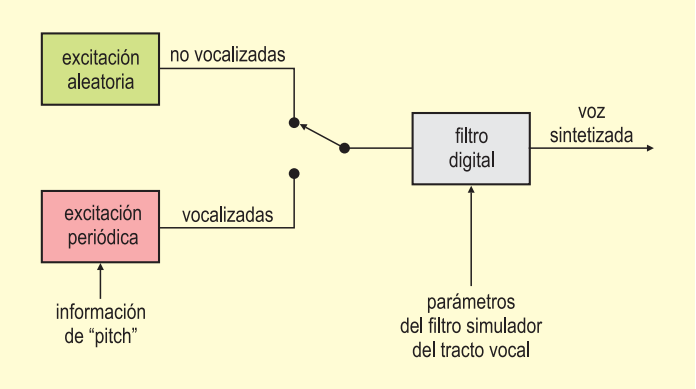


Fig. 1.24. Sistema de generación de voz artificial.

a una centena de palabras, sólo aceptan oraciones con palabras separadas por espacios de tiempo bien definidos, y para tener buen desempeño conviene que sean entrenados para cada sujeto que los utilice. Aunque resultan apropiados para muchas aplicaciones comerciales, las limitaciones son humillantes en comparación con las habilidades de la audición humana. Éste es un área de trabajo que aún hoy requiere gran desarrollo, y que se estima será de importancia creciente en el futuro.

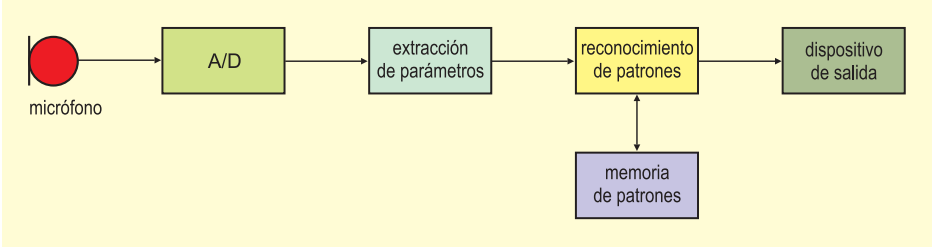


Fig. 1.25. Diagrama bloque de un sistema de reconocimiento de voz.

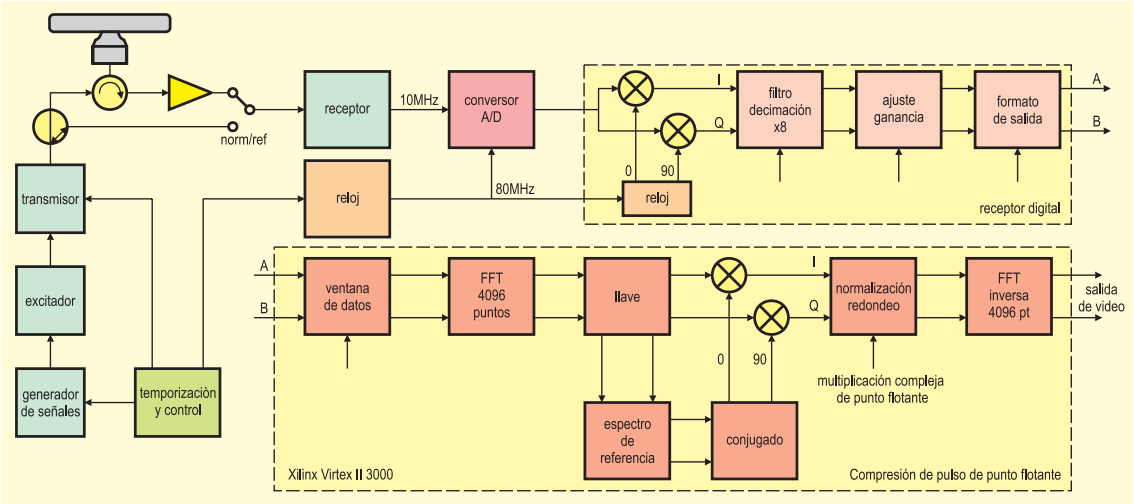


Fig. 1.26. Sistema básico de compresión de pulsos de radar usando un receptor digital y una convolución con transformada de Fourier discreta (convolución rápida).

1.3.3. Detección de ecos

Una forma de obtener información sobre un objeto remoto es haciendo rebotar en él una onda: el radar transmite pulsos de ondas de radio, y examina la señal recibida para detectar ecos provenientes del móvil. El sonar transmite ondas sonoras a través del agua para detectar submarinos y otros objetos sumergidos. La geofísica trata de determinar la estructura de la corteza terrestre produciendo explosiones y escuchando los ecos provenientes de las capas de rocas subterráneas. Aunque estas aplicaciones tienen un objetivo común (la detección de los ecos recibidos) cada una de ellas tiene sus problemas específicos y sus necesidades; el PDS ha producido cambios dramáticos en cada una de ellas.

Radar

Radar es el acrónimo de *RAdio Detection And Ranging*. En los sistemas más sencillos, un transmisor produce un pulso de energía de radiofrecuencia de unos pocos microsegundos de duración, que se emite por una antena altamente direccional. Las aeronaves que crucen el haz de esta onda reflejarán una pequeña parte de la energía hacia una antena receptora, situada cerca del lugar de transmisión. La distancia al objeto (el rango) se calcula en base al tiempo que transcurre entre la emisión del pulso y la recepción del eco. La dirección del objeto se determina por la posición de la antena direccional.

El rango operativo de un sistema radar está determinado por dos parámetros: la *cantidad de energía* contenida en el pulso inicial, y el *nivel de ruido* del receptor. En general, el aumento de la energía del pulso reduce la precisión y la exactitud de la medición del tiempo transcurrido, lo que resulta en un conflicto entre dos parámetros importantes: la habilidad para detectar objetos lejanos, y determinar su distancia con exactitud.

El PDS ha mejorado el radar en tres aspectos, todos relacionados al problema básico: (*i*) comprimiendo el pulso apenas se recibe, lo que mejora la determinación de la distancia sin reducir el rango de operación (Fig. 1.26); (*ii*) filtrando la señal para disminuir su nivel

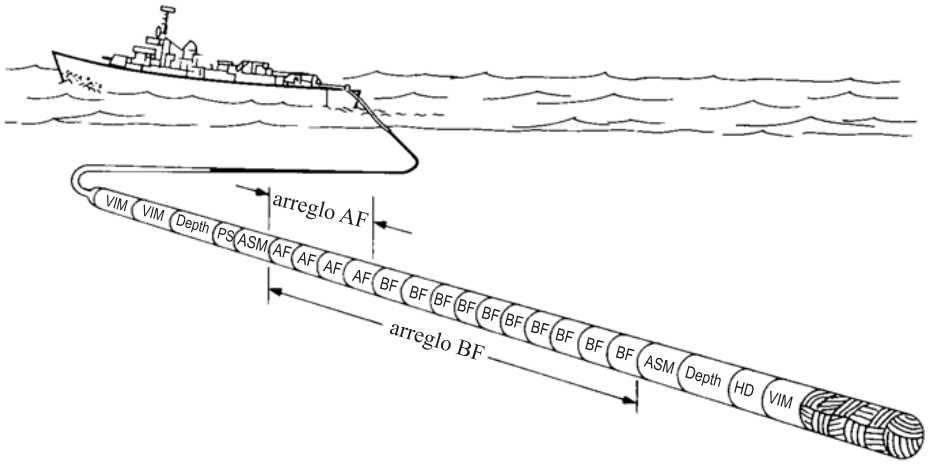


Fig. 1.27. Esquema de un sonar lineal remolcado.

de ruido, con lo que se incrementa el rango sin degradar la determinación de distancia. (*iii*) generando rápidamente pulsos de distinta longitud y forma, que pueden optimizarse para un problema de detección en particular. Desde el punto de vista de la implementación, mucho de este procesamiento se realiza a una velocidad de muestreo comparable a la de la radiofrecuencia utilizada, de varios cientos de MHz. Para poder trabajar a esta velocidad, tanto el hardware como los algoritmos utilizados son importantes.

Sonar

Sonar es el acrónimo de *SOund Navigation And Ranging* (Fig. 1.27). Existen dos tipos de sonares: *activos* y *pasivos*. En el sonar activo, se transmiten pulsos de sonido de entre 2 kHz y 40 kHz, y se detectan y analizan los ecos resultantes. Los empleos del sonar activo incluyen detección y localización de cuerpos submarinos, navegación, comunicación y relevamiento de mapas del lecho oceánico. El rango de operación máximo está entre los 19 km y los 100 km. En cambio, el sonar pasivo sólo "escucha" sonidos submarinos, como las turbulencias naturales, sonidos generados por la vida marina, y ruidos mecánicos de submarinos y barcos de superficie. La aplicación más importante del sonar pasivo es en sistemas de patrullaje militares para detectar y seguir submarinos, y en aplicaciones pesqueras para detectar y localizar cardúmenes. El sonar pasivo generalmente trabaja con frecuencias más bajas que el sonar activo, porque se propagan por el agua con menor atenuación. Los rangos de detección pueden ser de miles de kilómetros.

El PDS ha revolucionado el sonar en tantas áreas como el radar: la generación de los pulsos, la compresión de los mismos, y el filtrado de las señales detectadas. En el sonar el hardware es más sencillo que el del radar porque las señales de interés son de más baja frecuencia, pero los algoritmos son más complicados pues el ambiente es mucho menos estable y uniforme. Además, los sonares suelen utilizar conjuntos de elementos transmisores y receptores (denominados *arreglos*) en lugar de un único elemento transmisor y/o receptor. Controlando y mezclando apropiadamente las señales del arreglo el sistema sonar puede direccionar el pulso emitido hacia la dirección deseada, y determinar la dirección de los ecos recogidos; en estos casos, la potencia computacional necesaria es similar a la del radar.

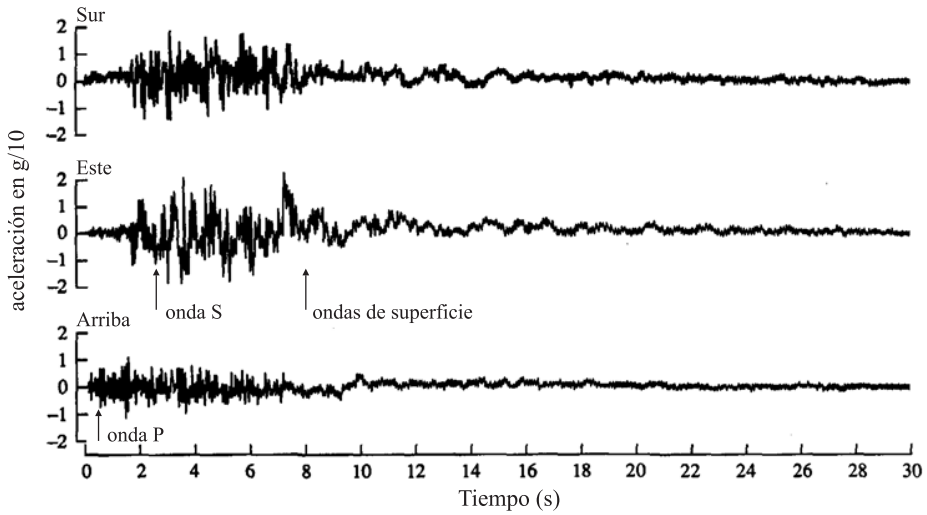


Fig. 1.28. Componentes de la aceleración de la corteza terrestre medida a pocos kilómetros del epicentro de un terremoto.

Sismología de reflexión

Alrededor de 1920 los geofísicos advirtieron que la estructura interna de la tierra podía estudiarse mediante el sonido (Fig. 1.28), generando una explosión controlada y grabando los ecos generados por las superficies que separan medios de distinta densidad a más de 10 km de la superficie. Los sismogramas de eco se interpretaban a simple vista (Fig. 1.29) para generar un mapa de la corteza terrestre. Este método rápidamente se convirtió en el medio preferido para localizar petróleo y depósitos minerales, y así sigue siendo en la actualidad.

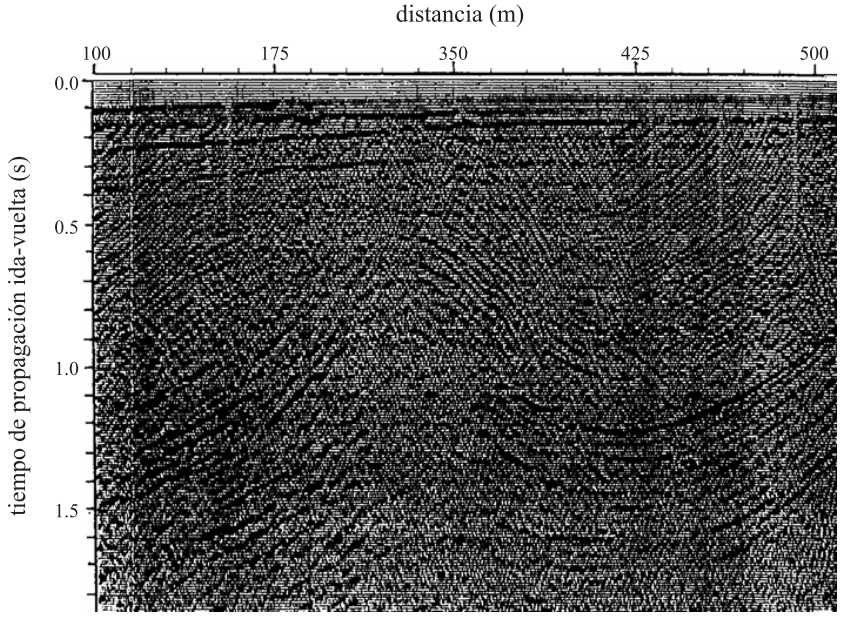


Fig. 1.29. Esquema de las capas de la corteza terrestre obtenido por un sismógrafo de reflexión.

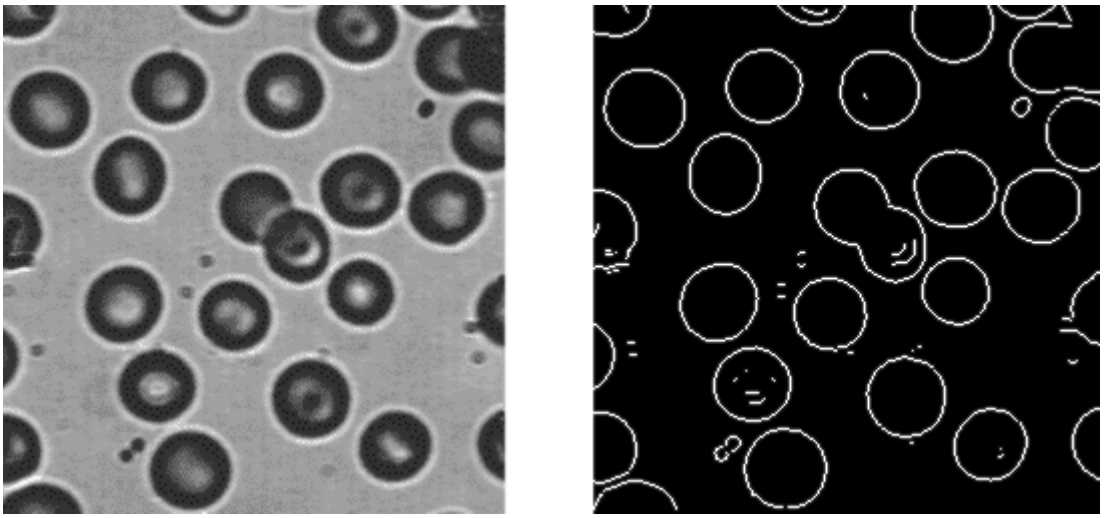


Fig. 1.30. Procesamiento de imágenes médicas: detección de bordes en una muestra de glóbulos rojos.

En el caso ideal, un pulso de sonido enviado hacia el interior de la corteza terrestre produce un único eco por cada capa atravesada por el pulso. Cada eco, al retornar hacia la superficie, debe atravesar todas las capas que están por encima de la que le dio origen. Esto puede dar lugar a un rebote del eco entre capas, lo que en la superficie se refleja como un conjunto de "ecos de ecos". Los ecos secundarios hacen que la señal detectada sea muy complicada y difícil de interpretar. El PDS ha sido utilizado desde 1960 para aislar los ecos primarios de los secundarios. Los primeros geofísicos, sin el auxilio de esta herramienta, podían interpretar los resultados de lugares "sencillos", mientras que la ayuda del PDS permite hacer prospección de lugares acústicamente complejos, como por ejemplo debajo del océano.

1.3.4. Procesamiento de imágenes

Las imágenes son señales con características especiales. En primer lugar, son la medida de un parámetro sobre un *espacio* (distancia), mientras que la mayoría de las señales son la medida de un parámetro en función del *tiempo*. En segundo lugar, contienen una gran cantidad de información: son necesarios más de 10 megabytes para almacenar un segundo de señal de video de TV. Esto es más de mil veces mayor que la cantidad de memoria necesaria para almacenar una señal vocal de longitud similar. En tercer lugar, la calidad frecuentemente se evalúa subjetivamente (por un ser humano), en lugar de emplear criterios objetivos. Estas características especiales hacen que el procesamiento de imágenes sea un subgrupo diferente del PDS (Fig. 1.30).

Imágenes médicas

Wilhelm C. Röntgen descubrió en 1895 que los rayos X podían atravesar ciertos materiales, y la posibilidad de "ver" dentro del cuerpo humano revolucionó la medicina. En el lapso de muy pocos años, los sistemas médicos de rayos X se esparcieron por el mundo.

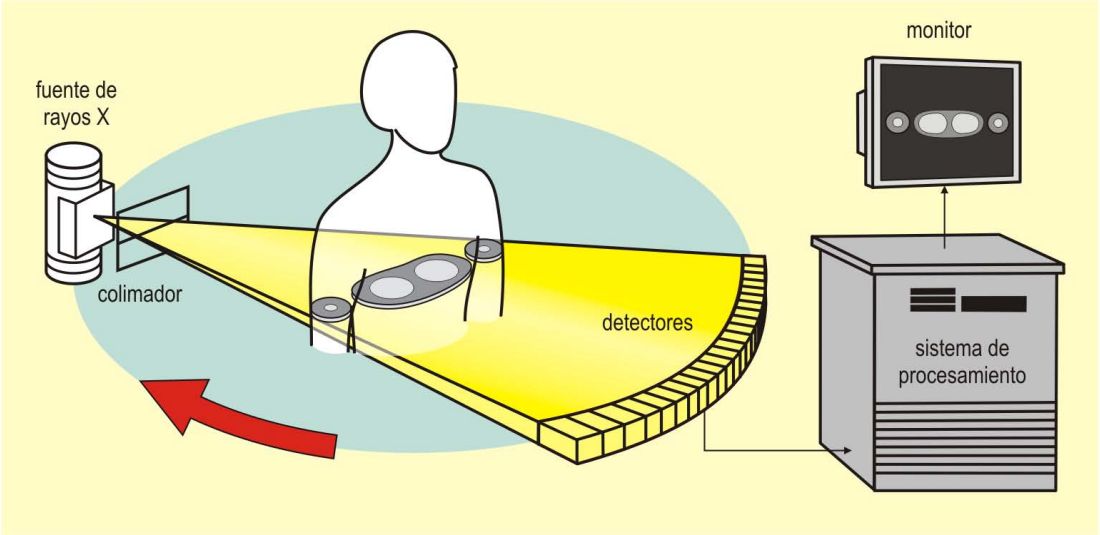


Fig. 1.31. Esquema de un sistema de tomografía axial computada.

A pesar de este éxito, hasta el advenimiento del PDS alrededor de 1970 la imaginería médica de rayos X sufría de cuatro limitaciones fundamentales:

1. No se podían observar todas las estructuras del cuerpo, ya que algunas ocluían la visión de otras: partes del corazón no son visibles porque están obstruidas por las costillas.

2. Muchas veces resulta imposible distinguir entre tejidos similares: aunque es sencillo distinguir el hueso de los tejidos blandos, no siempre es posible distinguir un tumor en el hígado del resto del órgano.

3. Los rayos X permiten observar la *anatomía* del cuerpo (su estructura), pero no su *fisiología* (su funcionamiento), al menos de manera segura.

4. La exposición prolongada a los rayos X puede producir cáncer, lo que impone que sean utilizados moderadamente y con la justificación adecuada.

Tomografía axial computada El problema ocasionado por el solapamiento de estructuras fue resuelto en 1977 con la introducción de los primeros tomógrafos (tomografía axial computada, o *CAT* por sus siglas en inglés). La tomografía computada es un ejemplo clásico de PDS. El cuerpo del paciente es atravesado por rayos X provenientes de distintas direcciones; las señales se digitalizan y se almacenan en una computadora (Fig. 1.31). Con esta información se calculan imágenes que simulan "rebanadas" del cuerpo, mostrando mucho mayor nivel de detalle y mejorando el diagnóstico y el tratamiento. El impacto de la tomografía computada fue tan grande como el descubrimiento de los rayos X. En un lapso de pocos años, casi todos los hospitales importantes del mundo tenían acceso a un tomógrafo. En 1979 sus inventores Godfrey N. Hounsfield (ingeniero electricista) y Allan M. Cormack (físico) recibieron el premio Nobel de medicina.

Los últimos tres problemas de la técnica de rayos X han sido resueltos mediante el empleo de rayos más penetrantes, como ondas sonoras y ondas de radio. El PDS juega un papel

fundamental en todas estas tecnologías. Por ejemplo, la Resonancia Magnética Nuclear (o Medical Resonace Imaging, MRI) utiliza campos magnéticos junto con ondas de radio para examinar el interior del cuerpo humano. Ajustando la magnitud y la frecuencia de los campos se logra que los núcleos atómicos de una región particular del cuerpo resuenen entre estados cuánticos de energía. Esta resonancia produce la emisión de una onda de radio secundaria que se detecta con una antena ubicada cerca del cuerpo. La magnitud y otras características de la señal detectada proveen información acerca de la región que está en resonancia. El ajuste del campo magnético permite desplazar la región de interés, relevando un mapa de la estructura interna del cuerpo. Esta información se presenta en forma de imágenes como en la tomografía computada. Además de brindar excelente discriminación entre distintos tipos de tejidos blandos, la resonancia magnética permite obtener información acerca de la fisiología del cuerpo (por ejemplo, observar el flujo de sangre por las arterias). La resonancia magnética depende absolutamente del PDS, y no hubiese sido posible sin él.

Imágenes por ultrasonido Los equipos de ultrasonido modernos (Fig. 1.32) usan técnicas de procesamiento de señales que permiten obtener imágenes con una resolución y definición impensada hace algunos años atrás. Utilizan sistemas multicanales, con múltiples emisores y receptores que retardan, escalan y suman inteligentemente la energía de los ecos recibidos. La posibilidad de retardar y escalar la señal de los distintos canales de un arreglo de receptores permiten focalizar la recepción, como si se contara con un único sensor cuyo patron de recepción se puede modificar a voluntad. Este proceso se denomina “beamforming”.

Al iniciar una exploración se genera y transmite un pulso por cada uno de los 8 a 512 elementos del transductor. Los pulsos se generan usando circuitos integrados específicos para la aplicación (ASICs), o lógica programable (FPGAs). La separación temporal y la amplitud de los pulsos se ajustan de manera de “ilumninar” regiones específicas del cuerpo. Luego de la transmisión, los transductores se conmutan al modo recepción. El pulso, ahora en foma de energía mecánica, se propaga por el cuerpo como ondas sonoras de alta frecuencia, generalmente en el rango entre 1 MHz y 15 MHz. La señal se debilita rápidamente, en función del cuadrado de la distancia recorrida. A medida que la señal se propaga, parte de la energía del frente de onda se refleja. Estas reflexiones son los “ecos” que deben ser detectados por la electrónica de recepción. Las señales que rebotan inmediatamente serán muy intensas, pues están muy cerca de la superficie, mientras que las que ocurren tiempo después de emitido el pulso de transmisión serán muy débiles, reflejandose en los órganos internos del cuerpo.

Debido a limitaciones en la cantidad de energía que puede aplicarse sobre el cuerpo humano, la industria ha desarrollado una electrónica de recepción extremadamente sensible. Los ecos debidos a reflexiones próximas a la superficie casi no requieren amplificación, mientras que los ecos de puntos focales dentro del cuerpo son muco más débiles, y deben ser amplificados 1000 o más veces. La relación entre estas dos señales define el rango dinámico del sistema.

El filtro pasabajos entre el amplificador controlado por tensión y el conversor A/D elimina las réplicas que puede causar el proceso de discretización temporal, y para limitar el ancho de banda del ruido. Se suelen utilizar topologías con 2 a 5 polos, y fase lineal. Los conversores A/D son de 10 o 12 bits. La relación señal a ruido y el consumo de cada

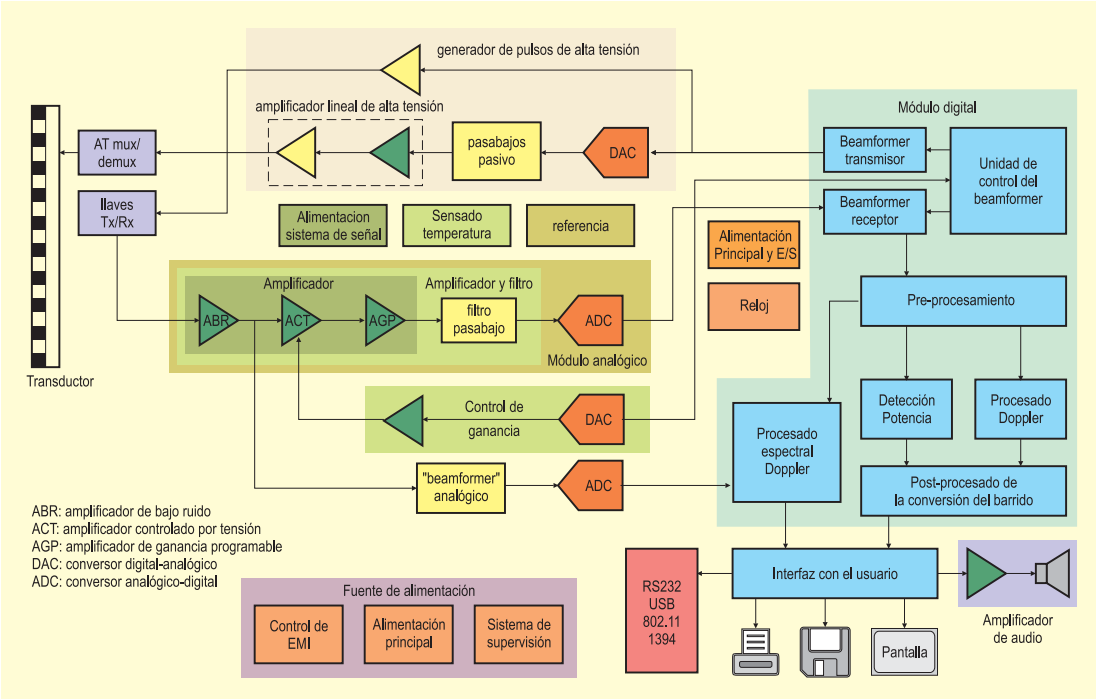


Fig. 1.32. Diagrama bloque de un sistema de diagnóstico por imágenes ultrasónicas.

canal es importante, porque puede haber muchos de ellos (hasta 512).

El beamformer del receptor se encarga de escalar y retardar las señales detectadas por cada uno de los canales del transductor, para crear el efecto de focalización sobre la zona del cuerpo que se desea estudiar. Las señales recibidas, adecuadamente escaladas y retardadas, se suman y se aplican al DSP. Éste se utiliza para el procesamiento Doppler, la generación de imágenes bidimensionales y tridimensionales, además de numerosas operaciones de postprocesamiento que permiten incrementar la funcionalidad y el desempeño. Los requerimientos clave son gran ancho de banda y considerable capacidad de cálculo. Se utilizan DSPs que corren a 1GHz o más, para manejar apropiadamente el gran flujo de datos.

Magnetoencefalografía Posiblemente, el campo más novedoso de procesamiento de señales médicas son los sistemas de magnetoencefalografía (Fig. 1.33). La idea es medir el campo magnético generado por la circulación de corriente en las neuronas. Si bien las primera experiencias se hicieron en 1968, los extremadamente débiles campos magnéticos generados eran muy difíciles de distinguir del ruido magnético generado por el campo terrestre y los distintos dispositivos eléctricos cotidianos.

Un cambio significativo ocurrió con la invención de los SQUIDs (*superconductor quantum interference device*, dispositivo superconductor de interferencia cuántica) que permite detectar campos magnéticos extremadamente débiles generados por corrientes de muy pequeña amplitud.

En los primeros sistemas, un único detector SQUID se utilizaba para medir sucesivamente el campo magnético en distintos puntos de la cabeza. En 1980 aparecieron los primeros

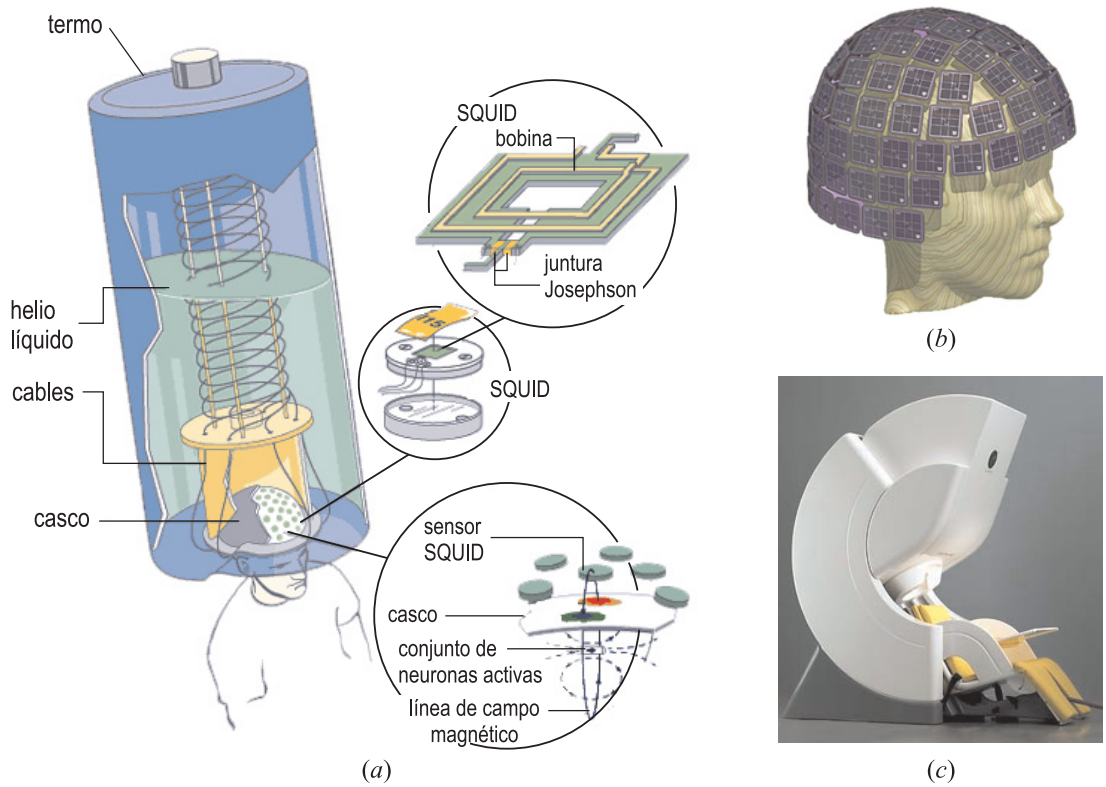


Fig. 1.33. Esquema de un sistema de magnetoencefalografía (a). Arreglo de SQUIDs sobre el casco (b). Fotografía de un aparato comercial (c).

arreglos de receptores. En la acualidad, se utilizan arreglos de alrededor de 300 sensores arreglados en forma de anillo sobre un casco.

El campo magnético generado por las neuronas tiene una intensidad de alrededor de 10 fT (femto = 10^{-12}), y 1000 fT para las ondas cerebrales alfa. El ruido magnético debido al campo terrestre es de 10^8 fT, es decir, 100000 veces más intenso. De aquí que el problema esencial de esta tecnología es la debilidad de la señal a detectar relativa a la sensibilidad de los detectores, y al fuerte ruido magnético ambiental.

Para evitar la influencia del ruido, al principio se utilizaron ambientes magnéticamente aislados. En general estaban compuestos por tres capas, cada una de ellas formadas por una pared de aluminio, y otra de un material de alta permeabilidad magnética, como el molibdeno. Varias capas se intercalan, y para asegurar el buen contacto eléctrico entre ellas frecuentemente es necesaria electroplatearlas con plata u oro. El costo de estos recientos muchas veces supera al de toda la electrónica de detección.

Otro enfoque más reciente es el de cancelamiento activo de ruido, similar al detallado para el ducto acústico, con la salvedad que en este caso debe ser tridimensional. Un arreglo de sensores se encarga de medir el campo magnético cerca de los receptores, y se implementan técnicas de cancelamiento activo para disminuir el ruido a cerca de $2-3$ fT/Hz^{0,5}.

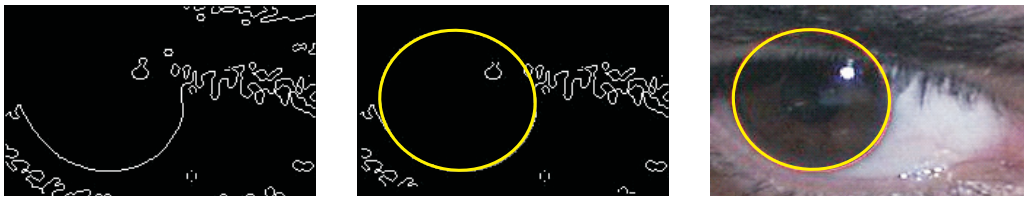


Fig. 1.34. Reconocimiento del iris a pesar del recorte producido por los párpados y la perturbación de las pestañas.

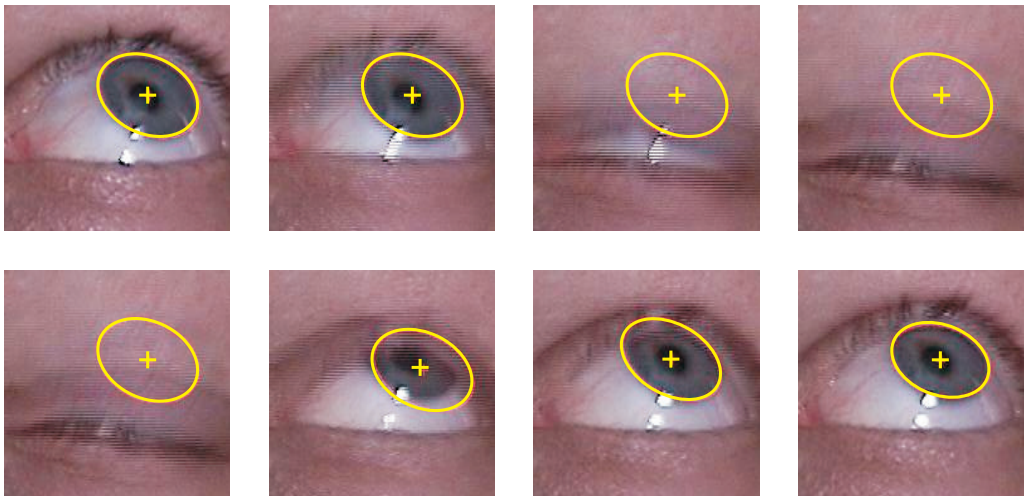


Fig. 1.35. Seguimiento de la posición del iris evitando el parpadeo.

Otras aplicaciones En las aplicaciones mencionadas más arriba, el fin último de todo el procesamiento de las señales es la obtención o mejora de otras señales (frecuentemente imágenes) que faciliten el diagnóstico. Pero no menos importantes son las aplicaciones donde el procesamiento de imágenes permite determinar otras variables de interés. Por ejemplo, los sistemas de seguimiento de los globos oculares sirven tanto de apoyo para personas minusválidas para facilitar su comunicación con el medio (mediante el desplazamiento de un cursor sobre una pantalla, etc.) pero también para fines de diagnóstico. Un estudio sobre el movimiento de los ojos durante la lectura de un párrafo puede servir como indicador precoz de problemas cogntivos (Kintsch y Van Dijk 1978). Pequeñas fallas de la memoria producen un descenso en la eficiencia de las actividades relacionadas con la lecto-escritura, que se traducen en un aumento de los tiempos de lectura y en un incremento de la cantidad de movimientos del ojo.

Un sistema de procesamiento de imágenes que permita seguir los movimientos del ojo (Orazi, 2010) debe ser capaz no sólo de determinar la posición de la pupila o el iris, direfenciándola de las perturbaciones introducidas por las pestañas o la posición del ojo (Fig. 1.34) sino también de reconocer y evitar situaciones tales como el parpadeo que no está asociado a problema de lectura (Fig. 1.35). En muchas aplicaciones no es necesario que el procesamiento ocurra en tiempo real, pero sí es necesario que la velocidad de la cámara sea suficientemente rápida para no perder ninguno de los movimientos del ojo.

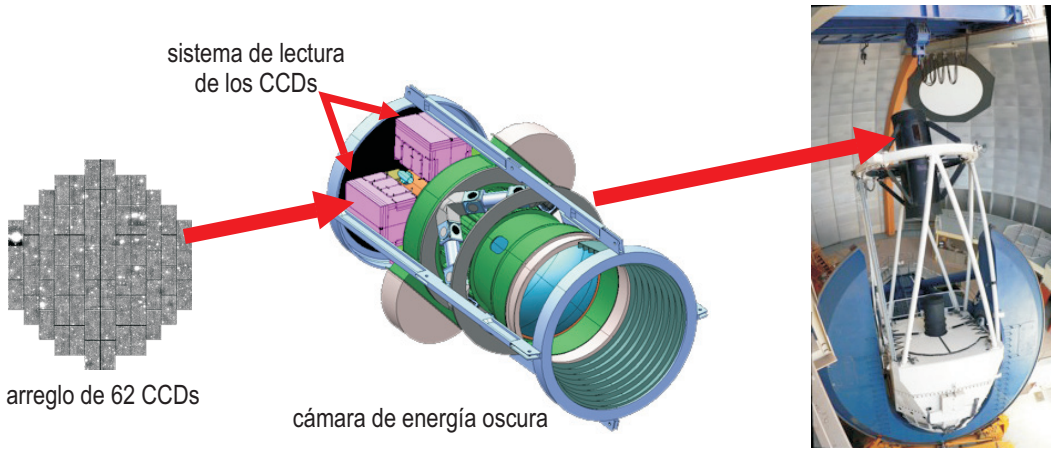


Fig. 1.36. Detalle de una cámara para energía oscura instalada en el telescopio Blanco, en cerro Tololo, Chile a fines de 2010.

Exploración espacial

El PDS permite mejorar la claridad de las imágenes captadas bajo condiciones muy desfavorables. Se pueden mejorar el brillo, el contraste, efectuar detección de bordes, reducir el nivel de ruido, ajustar el foco, eliminar los efectos del movimiento de la cámara (corregir fotografías "movidas"), etc. En el caso de la exploración espacial, las imágenes de los distintos planetas están distorsionadas pues se está mapeando un objeto curvo (el planeta) sobre una superficie plana (la fotografía). El PDS permite corregir este defecto de manera de obtener una representación correcta. Muchas imágenes de diferente naturaleza pueden combinarse en una base de datos para representar información de maneras únicas, como por ejemplo generar una secuencia de imágenes que simule el vuelo aéreo sobre la superficie de un planeta distante.

Búsqueda de la materia oscura del universo En cosmología física y astronomía, la energía oscura es una forma hipotética de energía que permea el espacio y tiende a incrementar la tasa de expansión del universo. Es la manera más popular de explicar observaciones recientes que indican que el universo se expande aceleradamente. En el modelo convencional, la energía oscura representa el 74 % de la masa-energía total del universo. Se necesitan mediciones muy precisas para comprender cómo cambia la tasa de expansión a lo largo del tiempo.

Una manera de detectar materia oscura de baja masa es utilizando sensores conocidos como cámara de energía oscura, construidos en base a CCDs (*charged coupled devices*, o dispositivos de acoplamiento por cargas). Un CCD es un registro de desplazamiento analógico que posibilita el transporte de senales analógicas representadas por cargas eléctricas a traves de una serie de etapas controlados por una señal de reloj. Pueden funcionar como una memora para retrasar muestras de señales analógicas, actuando como una línea de retardo. Sin embargo, hoy en día la aplicación principal es para serializar arreglos de sensores fotoeléctricos, y obtener información serial de una imagen. El término "CCD" identifica la forma en que la imagen es leída del chip. Bajo control de un circuito externo, cada capacitor puede transferir su carga eléctria a alguno de sus veci-

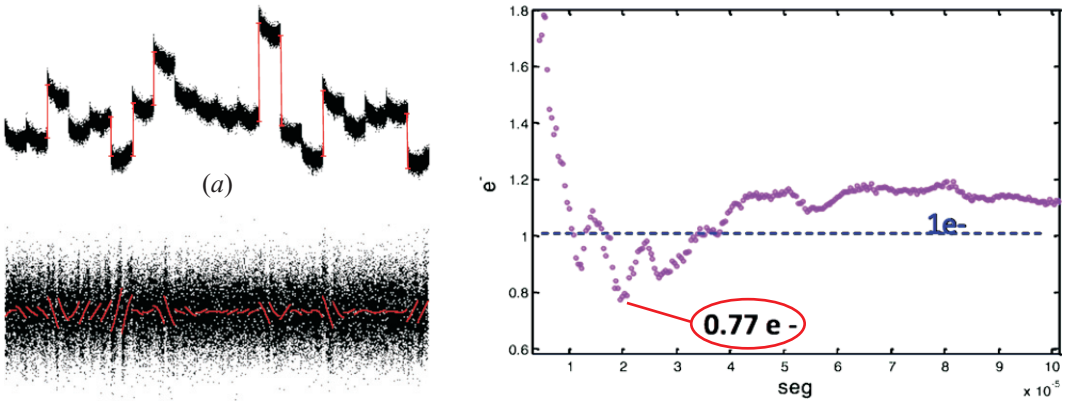


Fig. 1.37. Ruido en CCDs: señal directa (a); ruido de alta (negro) y baja (rojo) frecuencia (b); ruido residual en función del intervalo de integración (c).

nos. Los CCD se utilizan también en fotografía digital, astronomía, sensores, microscopía electrónica, etc.

El elemento sensor para detección de materia oscura está formado por 8 detectores CCD ubicados a 100 metros bajo tierra (para evitar rayos cósmicos) en Cerro Tololo, Chile (Fig. 1.36). La característica principal del tipo de partículas que se buscan es su baja interacción con la materia, en este caso particular con el silicio del CCD. En consecuencia, la energía que liberan al atravesar el detector es muy pequeña y puede resultar totalmente imperceptible por el ruido de lectura del CCD. De aquí la importancia vital de técnicas de lectura con una alta relación señal a ruido.

En la Fig. 1.37(a) se muestra una sucesión pixeles contaminados por ruidos leída directamente desde el CCD. La información de interés es la diferencia entre los "escalones'" pares e impares, y para determinar esta diferencia con precisión hay que eliminar el ruido de cada "escalón". En la Fig. 1.37(b) se representa el ruido de alta frecuencia (en color negro) y el ruido de baja frecuencia (en rojo) que varía lentamente entre pixel y pixel. La señal "limpia" (que no se muestra) se integra durante un lapso de tiempo variable. La duración del intervalo de integración tiene un óptimo para el cual el nivel de ruido es mínimo, como se grafica en la Fig. 1.37(c) (Fernández Moroni, 2010).

Productos comerciales de procesamiento de imágenes

La gran cantidad de información contenida en la imágenes constituye un problema para sistemas de venta masiva. Los sistemas comerciales deben ser económicos, y esto en general es incompatible con memorias de gran capacidad, y velocidades de transmisión elevada. Una respuesta a este problema está dada por los algoritmos de *compresión de imágenes*. Al igual que las señales de voz, las imágenes contienen gran cantidad de información redundante, y en consecuencia pueden comprimirse significativamente. Las imágenes de televisión y de cine son especialmente adecuadas para compresión, ya que la imagen cambia muy poco de un cuadro al otro. Esta tecnología es el corazón de la televisión digital, los DVD, etc.

1.4. Rangos de frecuencia de algunas señales típicas

Para el procesamiento de cualquier señal con el propósito de medición de parámetros o extracción de otro tipo de información, es necesario conocer aproximadamente el rango de frecuencias contenidas en la señal. Las Tablas 1.3, 1.4, 1.5 dan idea de los límites aproximados en el dominio frecuencial de señales sísmicas, biológicas, y electromagnéticas.

Tabla 1.3: Rango de frecuencias de algunas señales sísmicas.

Tipo de Señal	**Rango [Hz]**
ruido del viento	100 – 1000
señales de exploración sísmica	10 – 100
explosiones nucleares y terremotos	0.01 – 10
ruido sísmico	0.1 – 1

Tabla 1.4: Rangos de frecuencia de algunas señales biológicas.

Tipo de señal	**Rango [Hz]**
electrorretinograma (registro de las características de la retina)	0 – 20
electronystagmograma (movimiento involuntario de los ojos)	0 – 20
neumograma (registro de la actividad respiratoria)	0 – 40
electrocardiograma (ECG)	0 – 100
electroencefalograma (EEG)	0 – 100
electromiograma (registro de las actividades musculares)	10 – 200
esfigmomanograma (registro de la presión sanguínea)	0 – 200
voz	100 – 4000

Tabla 1.5: Rangos de frecuencia de señales electromagnéticas.

Tipo de Señal	**Longitud de onda [m]**	**Rango [Hz]**
emisión de radio	10^4 – 10^2	3×10^4 – 3×10^6
radio de onda corta	10^2 – 10^{-2}	3×10^6 – 3×10^{10}
radar, comunicaciones satelitales y espaciales, microondas	1 – 10^{-2}	3×10^8 – 3×10^{10}
infrarrojo	10^{-3} – 10^{-6}	3×10^{11} – 3×10^{14}
luz visible	$3{,}9 \times 10^{-7}$ – $8{,}1 \times 10^{-7}$	$3{,}7 \times 10^{14}$ – $7{,}7 \times 10^{14}$
ultravioleta	10^{-7} – 10^{-8}	3×10^{15} – 3×10^{16}
rayos γ y X	10^{-9} – 10^{-10}	3×10^{17} – 3×10^{18}

1.5. Procesamiento digital y analógico de señales

Digital Signal Processing:

That discipline which has allowed us to replace a circuit previously composed of a capacitor and a resistor with two antialiasing filters, and A-to-D and a D-to-A converter, and a general purpose computer (or array processor) so long as the signal we are interested in does not vary too quickly.

Thomas P. Barnwell, 1974.[2]

El procesamiento analógico de señales involucra operaciones tales como amplificación, filtrado, integración y diferenciación, como así también varias formas de procesamiento no lineal (rectificación, controles automáticos de ganancia, etc.), utilizando circuitos electrónicos. Estas operaciones se sintetizan en el bloque "Procesamiento Analógico" de la Fig. 1.38(a) . Entre sus limitaciones y las desventajas pueden citarse:

- debido a las tolerancias de los componentes, alinealidad de los amplificadores, desvíos con la temperatura, etc. es difícil obtener circuitos muy precisos con un costo razonable;
- la repetitividad es limitada por efecto de las tolerancias, y variaciones derivadas de condiciones ambientales, tal como temperatura, vibraciones, etc.
- son muy sensibles al ruido eléctrico (ruido interno de los amplificadores, etc.);
- poseen un rango dinámico limitado;
- tienen poca flexibilidad para cambiar la especificación de las funciones de procesamiento;
- es difícil implementar con precisión funciones no lineales o variantes en el tiempo;
- no es sencillo almacenar y recuperar información analógica con alta calidad;
- el costo es muy elevado para funciones de cierta complejidad donde sea necesario efectuar ajustes manuales.

El PDS se basa en representar las señales por números en una computadora, o hardware digital especializado, y efectuar una serie de operaciones numéricas (adiciones, multiplicaciones, operaciones lógicas, transferencia de datos, etc.) sobre esas señales. Para implementar un sistema de PDS, tal como ilustra la 1.38(b) , es necesario:

- convertir las señales analógicas en información digital, en la forma de una sucesión de números binarios. Esta tarea se lleva a cabo en dos pasos, el *muestreo* ("sampling") y la conversión analógico-digital (A/D);
- efectuar operaciones numéricas sobre la información digital;

[2] "Procesamiento Digital de Señales: esa disciplina que nos permite reemplazar un circuito formado por un capacitor y una resistencia por dos filtros antialiasing, un conversor A/D y un conversor D/A y una computadora de propósito general (o un procesador dedicado), siempre que la señal que nos interesa no varíe muy rápidamente." Thomas P. Barnwell, 1974, citado por B. Porat, p. 1.

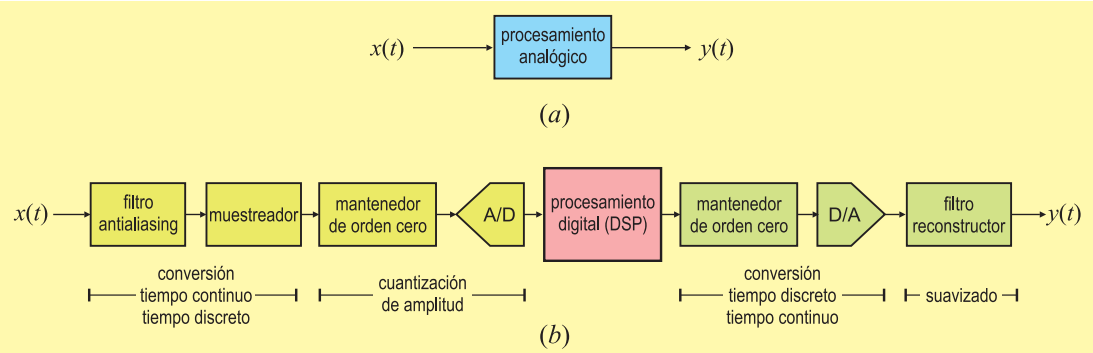


Fig. 1.38. Tratamiento de señales: procesamiento analógico (a) y digital (b).

- convertir nuevamente a una señal analógica los datos digitales obtenidos después del procesamiento. Este paso también se implementa en dos etapas: la conversión digital-analógica (D/A) y la reconstrucción.

A pesar de su mayor complejidad, que se aprecia al comparar la Figs. 1.38(a) y (b), varias razones justifican el PDS para señales analógicas en lugar de preferir un tratamiento enteramente analógico:

- las computadoras pueden hacer operaciones con un grado de precisión arbitrariamente alto, incrementando la longitud de palabra tanto como sea necesario;
- los sistemas digitales son altamente repetibles (siempre que no fallen por problemas de software o hardware);
- tienen muy baja sensibilidad al ruido eléctrico;
- la representación numérica de punto flotante permite un rango dinámico prácticamente ilimitado;
- un sistema digital es flexible y el tipo de procesamiento de señales se puede alterar simplemente cambiando el "software". Aunque el diseño del programa no es una tarea sencilla, su implementación ("bajarlo" al hardware) sí lo es. La reconfiguración de un sistema analógico, en cambio, involucra rediseñar el hardware, probarlo, y verificar que opera satisfactoriamente.
- el PDS permite un mejor control sobre los requerimientos de precisión, que se reflejan en la longitud de palabra del conversor A/D, D/A y el procesador, la elección de aritmética de punto fijo vs. aritmética de punto flotante, etc. En los circuitos analógicos la tolerancia de los componentes hace que sea extremadamente difícil mantener la calidad del sistema completo. En general es posible obtener mejor desempeño con la combinación hardware digital+software que con circuitos y procesamiento analógicos;
- el almacenamiento digital es barato y flexible. En consecuencia, las señales son transportables y pueden ser procesadas fuera de línea en lugares alejados del origen de las mismas. Además, la información puede encriptarse para aumentar la seguridad o disminuir errores, y comprimirse para reducir los costos de almacenamiento y transporte;

- el PDS permite implementar algoritmos más elaborados, tal como control o filtrado adaptativo; usualmente es muy difícil efectuar operaciones matemáticas precisas con hardware analógico, que pueden efectuarse sin inconvenientes en una computadora.

- en algunos casos la implementación digital de un sistema de procesamiento de señales es más económica que una implementación analógica, bien porque en general el hardware digital es menos costoso, o bien como consecuencia de la flexibilidad para modificaciones que tiene la implementación digital (un mismo hardware puede servir para diferentes productos finales, con características distintas).

A pesar de todas estas ventajas, el PDS puede no ser la solución apropiada para *todos* los problemas de procesamiento. Los conversores analógico-digital (A/D) y digital-analógico (D/A) introducen una serie de problemas y errores que atentan contra la representación fiel de una señal analógica. Hay dos procesos vitales para el tratamiento digital de la señal que conducen inevitablemente a una pérdida de información. Son ellos:

- La representación de los datos con un número finito de bits, que introduce un error intrínseco –el error de cuantización– que se propaga por el resto de la cadena de procesamiento. Dos maneras de reducir este error son incrementando la resolución de los conversores, y efectuando "oversampling" junto con un procesado digital para mejorar la relación señal a ruido.

- La representación de la señal continua en el tiempo por una sucesión discreta de valores. Esta operación, si no se efectúa de manera apropiada, puede invalidar completamente el PDS, en el sentido que la señal procesada puede no guardar ninguna relación con la señal original.

El primer problema es difícil de tratar analíticamente, porque es esencialmente un proceso no lineal. Sin embargo, si se utilizan conversores de calidad razonable (es decir, de 8 o más bits de resolución), el error de cuantización es pequeño, y puede modelase como una fuente de ruido aleatorio adicional. En la Fig. 1.39 se ilustran los efectos de cuantizar una señal analógica con diferentes números de bits de resolución. La Fig. 1.39(c) muestra el error de cuantización (diferencia entre la señal original y la señal cuantizada) de 3 bits (8 niveles): se aprecia que el error tiene cierta similitud ("alta correlación") con la señal original. En cambio, para una cuantización de 8 bits [Fig. 1.39(d)], el error no sólo es mucho menor, sino que es virtualmente independiente de la señal original. Si bien algunos fenómenos escapan a esta presentación simplificada –tales como oscilaciones a la salida del sistema aún con entradas nulas– la mayor ventaja es que permite tratar los problemas de cuantización usando técnicas lineales.

El segundo problema es crucial, y tal como se verá a lo largo del curso, bajo ciertas condiciones es posible asegurar que la información contenida en las señal analógica original es la misma que transporta la señal obtenida tomando "muestras" de ella cada cierto intervalo de tiempo.

Otras restricciones impuestas por el PDS y algunas posibles soluciones son:

- los conversores A/D y D/A exhiben errores tales como el corrimiento con la temperatura y las alinealidades. Un "buen" sistema de procesamiento de señales de tiempo real con entradas analógicas debe tener una buena etapa de entrada analógica!

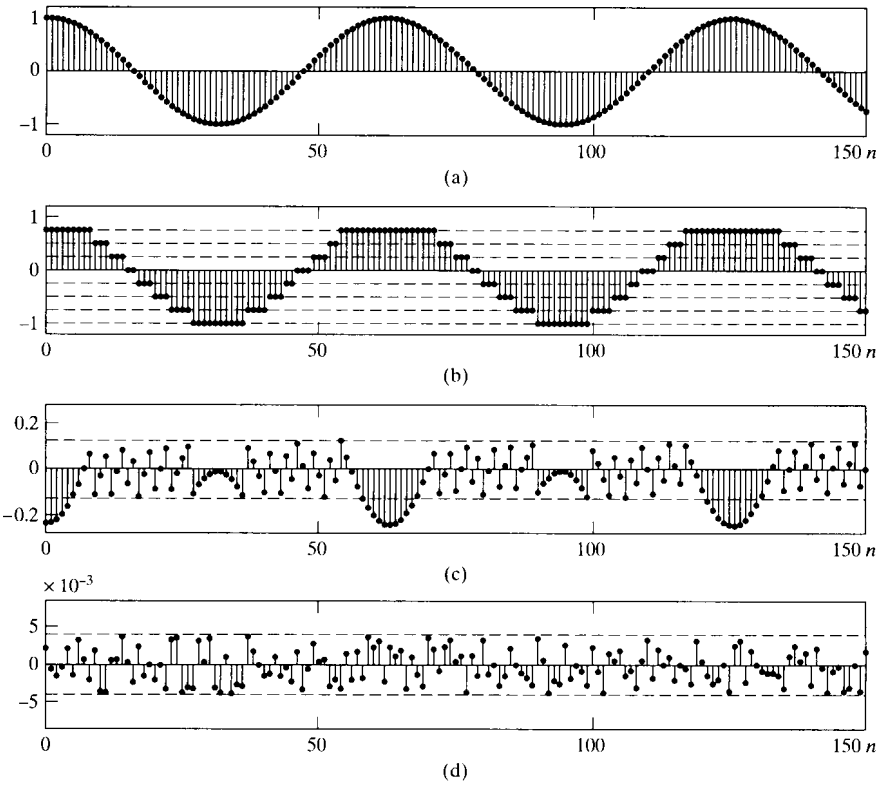


Fig. 1.39. Efectos de cuantización de una señal: señal sinusoidal discreta (a); señal cuantizada con 3 bits (8 niveles) de resolución (b); error de cuantización para 3 bits (c); error de cuantización para 8 bits (d).

- los conversores A/D y D/A de alta resolución son lentos, excepto los extremadamente elaborados (y caros). En general, un conversor A/D requiere unos pocos microsegundos para convertir una muestra analógica, y un conversor D/A necesita tiempos del orden del microsegundo para estabilizarse. Estos retardos imponen un límite a la máxima frecuencia de muestreo alcanzable. Con la tecnología actual, los conversores A/D y D/A son el "cuello de botella" en la mayoría de las aplicaciones de PDS en tiempo real.

- para obtener una mejor precisión, es necesario que la señal analógica no varíe durante el intervalo de tiempo que tarda en efectuarse la conversión A/D. Por ello suelen utilizarse circuitos *mantenedores* ("sample and hold") a la entrada del conversor A/D.

- la salida del "sample and hold" es de banda ancha, lo que incrementa el ruido a la entrada del conversor A/D.

- los mantenedores introducen errores en el tiempo de adquisición, incerteza de apertura, errores de caída durante el intervalo de conversión, y acoplamiento en el modo "mantenimiento".

- para reducir el error debido a la energía de las señales imágenes ("alias") fuera de la banda de interés a un nivel aceptable, siempre es conveniente limitar el ancho de

banda de la señal de entrada usando filtros antialiasing y/o efectuando un "oversampling" si es posible.

- los filtros antialiasing modifican la amplitud y fase de la señal a procesar. La respuesta de estos filtros no es exactamente plana en la banda de paso, y aquellos con buena respuesta de amplitud tienen invariablemente una pobre respuesta de fase, lo que distorsiona las relaciones armónicas entre las componentes de la señal.
- el empleo de conversores D/A suele alterar el espectro en frecuencia de la señal pesándolo con una función de la forma $(\text{sen}\, f)/f$ que atenúa las componentes de alta frecuencia de la señal; ese efecto puede compensarse mediante un filtro digital con característica $f/\text{sen}\, f$.
- La tendencia en sistemas modernos de procesamiento de señales, especialmente sistemas de audio digital como los reproductores de CD es utilizar conversores A/D y D/A de 1 bit. Estos dispositivos novedosos explotan las ventajas de las técnicas multi-rate.
- Para muchos sistemas de tiempo real y gran ancho de banda, el procesamiento analógico u óptico puede ser la única solución posible.

1.6. Procesadores Digitales de Señales (DSP)

Los DSP son microprocesadores especializados en el tratamiento de señales. Se caracterizan por trabajar en tiempo real, con capacidad para manejar volúmenes de datos importantes en tiempos relativamente breves, y son capaces de implementar algoritmos que requieren operaciones aritméticas intensivas, en particular multiplicaciones y sumas, o multiplicación junto con acumulación.

Como los microprocesadores típicos no son eficientes para implementar los algoritmos usuales del PDS, se desarrollaron dispositivos específicamente diseñados, ya sea por su arquitectura (Fig. 1.40) como por su conjunto de instrucciones. Entre las características que distinguen los DSP merecen citarse las siguientes:

- multiplicadores por hardware incluidos en el chip (y no rutinas de multiplicación implementadas con microcódigo), de manera que la operación se ejecuta extremadamente rápido. Los DSP más modernos incluyen instrucciones de multiplicar-acumular que demandan un sólo ciclo de reloj, y algunos hasta tienen varios multiplicadores trabajando en paralelo;
- memorias y "buses" separados para programas y datos (arquitectura Harvard), como se muestra en la Fig. 1.40, que permite solapar las ejecución de una instrucción con la búsqueda de la siguiente, y también efectuar simultáneamente varias operaciones. En particular, están optimizados para tomar simultáneamente un dato de la memoria de datos y un coeficiente de la memoria de programa, multiplicarlos entre sí, y adicionar el resultado al contenido del acumulador. Algunos DSP dedican una ALU a esta operación, que se denomina MAC ("multiply and accumulate");
- instrucciones de salto o lazo que permiten ahorrar ciclos de reloj;

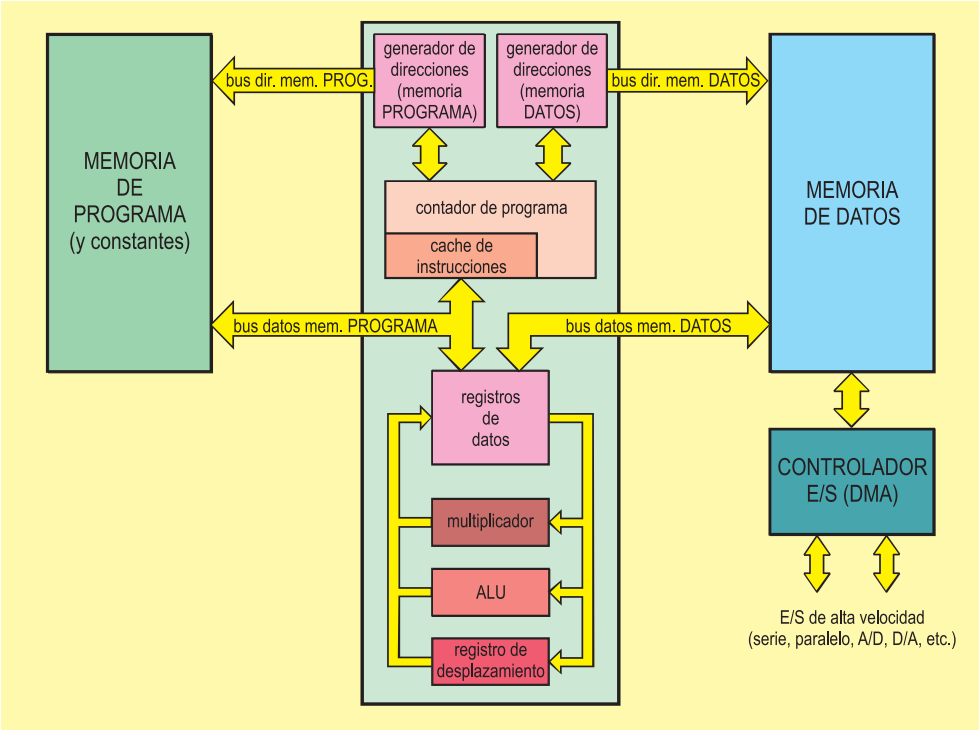


Fig. 1.40. Arquitectura Harvard típica de un DSP.

- modos de direccionamiento especializados (por ejemplo, para implementar arreglos circulares);
- velocidad de procesamiento extremadamente rápida.

Como no tienen que efectuar algunas de las funciones de los microprocesadores de alto nivel, como los Pentium de Intel, los DSP se diseñan para que consuman menos energía, sean más pequeños, y tengan un costo menor. Los DSP hicieron que fuese más sencillo implementar aplicaciones de audio –tales como modems de líneas telefónicas o compresores de voz– en forma digital que con circuitos analógicos. Las velocidades de los DSP de alto rango se han incrementado hasta tal punto (Fig. 1.41) que existen implementaciones de DSL y de estaciones base inalámbricas (wireless). Este aumento de velocidad se debe tanto al empleo de geometrías más reducidas como a mejoras en la tecnología CMOS de integración.

1.6.1. Breve historia de la evolución de los DSP

Los algoritmos de PDS se usaron desde mucho tiempo antes a la aparición de los DSP. Se implementaban en grandes computadoras (mainframes), y posteriormente en minicomputadoras de alta velocidad (VAX 11-780, etc.) Según el ancho de banda de la señal, estas implementaciones podían o no ejecutarse en tiempo real. Con la evolución de la tecnología de semiconductores se construyeron procesadores dedicados utilizando cientos de integrados TTL de mediana escala de integración (MSI), incluyendo ALU escalables (tecnología "bit-slice") y circuitos multiplicadores. Los sistemas típicos contaban con más

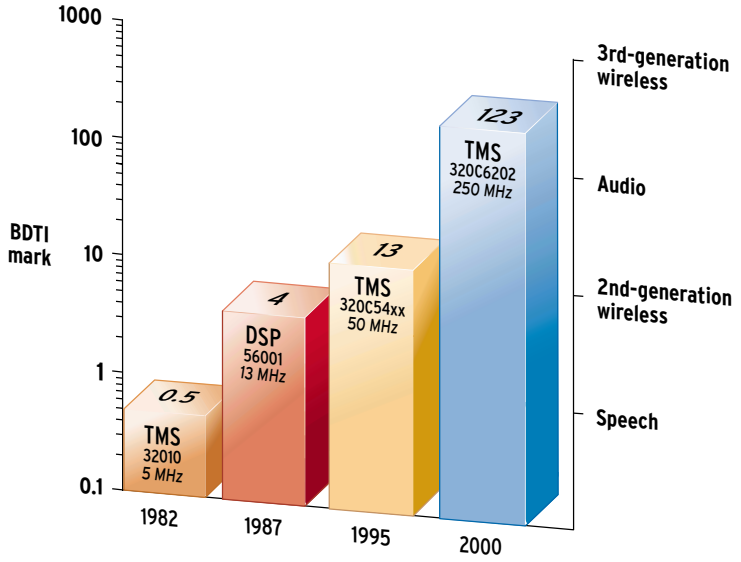


Fig. 1.41. El índice BDTImark, una medida de comparación de velocidad de procesadores desarrollada por Berkeley Design Technology Inc., ilustra los incrementos de velocidad para cuatro generaciones de DSP, junto con los requerimientos de algunas aplicaciones. El eje de velocidades es logarítmico, y revela la evolución alcanzada en los últimos 15 años.

de 100 integrados: eran grandes, costosos y consumían mucha potencia, necesitando de ventiladores para refrigeración.

Los primeros DSP populares fueron el NEC μPD7720 y el Texas Instruments TMS32010, que estuvieron disponibles comercialmente a fines de 1982. Estos integrados tenían aritmética entera (o de "punto fijo") de 16 bits, efectuaban 5 millones de instrucciones por segundo (MIPS), y tenían una limitada capacidad de memoria RAM, ROM y puertos de entrada/salida. El costo era de alrededor de $600, sin incluir el software o las herramientas de desarrollo. Muchos DSP actuales, que son mucho más avanzados, cuestan menos de $20. Integran dentro del encapsulado una mayor cantidad de periféricos, lo que disminuye el espacio necesario en plaquetas de circuito impreso, disminuye el consumo de energía, aumenta la confiabilidiad, y reduce la complejidad y el costo de fabricación a punto tal que muchos productos de consumo masivo, como modems telefónicos, tarjetas de sonido para PC y teléfonos celulares incluyen uno o más DSP.

El diseño usando tecnología CMOS redujo significativamente el consumo de potencia; los modelos actuales utilizan baja tensión de alimentación (3.3V y menores). Aplicaciones como los modems telefónicos, que antiguamente necesitaban dos DSP y un microprocesador actuando como controlador, hoy pueden implementarse a mucho menor costo utilizando un único DSP.

Otro hito significativo en la historia de los DSP fue la introducción comercial en 1986 del primer DSP de punto flotante, el DSP32 de AT&T. Los procesadores de punto flotante son útiles en ciertas aplicaciones porque su programación es más sencilla. Sin embargo, los DSP de punto fijo son de uso más frecuente, ya que son más pequeños, baratos, rápidos y consumen menos potencia. El costo es un factor de peso significativo en productos masivos tales como teléfonos celulares, modems, y discos rígidos. Los DSP de punto fijo

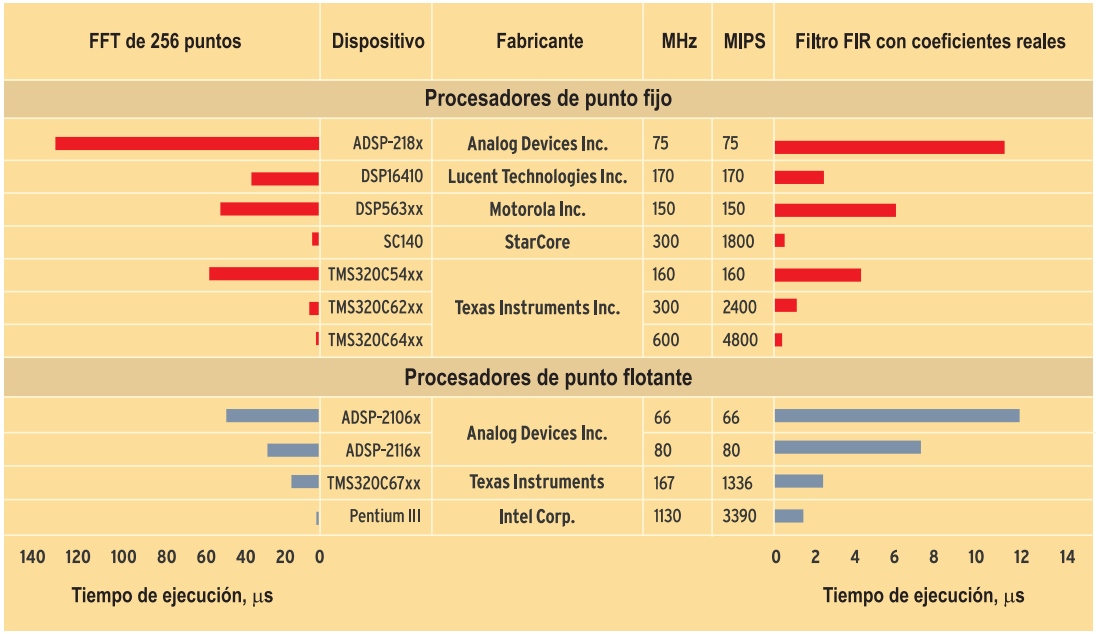


Tabla 1.6: Comparación del desempeño de distintos DSP.

necesitan escalar la amplitud de las señales para evitar saturación y/o desborde. Habitualmente este no es un problema en la mayoría de los sistemas de comunicaciones digitales donde los niveles de potencia de la señal permanecen relativamente constantes. Los DSP de punto flotante efectúan este escalado de manera automática.

En 1988 aparecieron las primeras partidas del TMS320C30 de Texas Instruments, que costaba alrededor de $1300. Tanto este DSP como el DSP32 tenían un ancho de palabra de 32 bits. Al poco tiempo, un miembro de la familia TMS320C30 que podía ejecutar 25 MIPS costaba $200; en la generación siguiente (TMS320C31) se podía encontrar un componente de 40 MIPS con un costo de $35.

La Tabla 1.6 compara la performance de distintos tipos de DSP actuales (datos de 2001), medida en base al tiempo de ejecución de dos algoritmos típicos: el cálculo de una transformada rápida de Fourier y el cómputo de un filtro FIR por bloques con coeficientes reales. Como comparación se incluyen los resultados para un procesador Pentium III de 1130 MHz de frecuencia de reloj. Puede resultar sorprendente que este procesador sea más rápido que muchos DSP; sin embargo, es mucho más costoso, consume mucha más energía y carece de periféricos orientados al procesamiento de señales. Además, con este tipo de procesadores "superescalares" no se puede predecir exactamente el tiempo de ejecución de un algoritmo.

Los DSP modernos son más rápidos y versátiles, y suelen incluir periféricos como entradas y salidas seriales, espacio de memoria extendido, memoria FLASH interna, temporizadores, interrupciones multinivel, etc. Algunos estás orientados a aplicaciones específicas: la serie DSP56F80x de Motorola, y la TMS320C24x de Texas Instruments cuentan con dispositivos que facilitan el control de motores (6 módulos PWM, entradas específicas para la lectura de encodificadores ópticos incrementales para medida de posición, múltiples fuentes de interrupción para sensar sobrecorrientes o sobretensiones, etc.)

1.6.2. Otras alternativas

Aunque el mercado tradicional de DSP de propósito general está dominado por cuatro compañías –Texas Instruments, Motorola, Agere Systems y Analog Devices– este tipo de procesadores cubre apenas un tercio del mercado global. La mayor parte del mercado corresponde a chips en los cuales el DSP está incorporado de manera no muy evidente, disponibles a través de más de 100 fabricantes. Estos integrados no se conocen como "DSP", y tampoco son programables; usualmente se comercializan según la tarea que efectúen: modems, reproductores de MP3, códecs para MPEG, etc. En algunos casos o aplicaciones puede resultar más conveniente o eficiente implementar los algoritmos del PDS utilizando alternativas a los DSP.

- Los arreglos lógicos programables (FPGA, Field Programmable Gate Arrays) pueden ser reconfigurados "en el sistema", lo que es ventajoso en aplicaciones que necesitan muchas versiones de prueba durante el desarrollo, ofreciendo un tránsito rápido desde el diseño hasta el mercado. Son muy veloces debido a que las operaciones se implementan utilizando lógica "cableada" (no se ejecuta un programa); sin embargo, son mucho más costosos, y consumen más que un DSP de funcionalidad similar. Aún cuando las FPGA es la tecnología típica adoptada en la infraestructura de comunicaciones inalámbricas (wireless), es cada vez más frecuente asociarlas a DSP para obtener mayor flexibilidad, mejor relación precio/desempeño, y menor consumo. En este caso la etapa de alta frecuencia se procesa con los FPGA, y la etapa de procesamiento a la tasa de símbolo se ataca con el DSP.

- Los integrados diseñados para aplicaciones específicas (ASIC, Aplication Specific Integrated Circuits) se pueden ajustar para efectuar ciertas operaciones con gran eficiencia, tanto desde el punto de vista del desempeño como del consumo. Sin embargo, como no son reprogramables, es muy difícil alterar su comportamiento o actualizar el diseño mientras el producto final está en etapa de desarrollo: cada nueva versión necesita un rediseño y la integración de una nueva partida de circuitos, lo que aumenta el costo y retarda el desarrollo del prototipo. Una alternativa son los ASSP (Aplication Specific Standard Product) que en lugar de diseñarse para una única compañía se destinan al mercado global. Los DSP, en cambio, pueden mejorar su funcionalidad y permiten mejoras del producto final mediante la actualización de software. En la actualidad, las ASIC se utilizan como interfaces entre buses, lógica de interconexión, y aceleradores funcionales de sistemas basados en DSP, y el mayor volumen de ventas de ASSP está orientado a la telefonía celular. Texas Instruments ha utilizado los núcleos de sus DSP básicos en una variedad de ASSP para uso en cámaras digitales hasta modems DSL, que no denominan "DSP". Otro ejemplo es el circuito integrado para receptores sin etapa de frecuencia intermedia de Analog Devices, en el cual el trabajo del DSP se reemplaza por una máquina finita de estados, solución que se prefiere cuando el ancho de banda es elevado y el algoritmo invariante. Los integrados para cablemódem se implementan de manera similar.

- Los procesadores de propósito general (GPP, General Purpose Processors), están optimizados para efectuar una gran variedad de tareas. Sin embargo, para aplicaciones en las cuales el producto final debe trabajar con señales de tiempo real, u operando con baterías, los GPP ofrecen un desempeño comparativamente inferior.

Cada vez más estos procesadores se consideran los "dinosaurios" de la industria, demasiado influenciados por la compatibilidad con las PC y sus requerimientos específicos como para adaptarse a la rápida evolución de los sistemas de tiempo real. El vuelco del mercado consumidor hacia dispositivos pequeños, inalámbricos, o que permitan una conexión portátil a internet (organizadores personales, teléfonos celulares, reproductores portátiles de música, etc.) que requieren consumos del orden de los miliwatt (y no de las decenas o centenas de watt que consumen los GPP) hacen que el diseño actual de tales aplicaciones se base en DSP.

- En la actualidad, algunos microprocesadores y la mayoría de los microcontroladores incluyen alguna funcionalidad para el procesamiento de señales, que van desde la simple inclusión de un MAC para permitir una implementación sencilla de filtros FIR hasta complejas máquinas de estado como las que procesan las instrucciones SIMD (Single Instruction Multiple Data) para multimedia en los procesadores Intel MMX y SSE II. El motivo principal para incorporar estas prestaciones es que sólo con PDS se puede tener multimedia, acceder a Internet, y mejorar las prestaciones de las consolas para juegos electrónicos: los integrados controladores de las tarjetas de video de alta performance como NVIDIA y ATI funcionan como DSP de muy alto nivel de desempeño.

1.7. Clasificación de señales

Los métodos utilizados para procesar una señal o para analizar la respuesta de un sistema a una señal determinada dependen de las *características* propias de cada señal. Ciertas técnicas se aplican solamente a determinado tipo o familias de señales. Aunque las clasificaciones suelen ser arbitrarias, se comentarán a continuación las principales propiedades de señales

- multicanales y multidimensionales;
- continuas o discretas en tiempo;
- continuas o discretas en amplitud;
- periódicas o no periódicas;
- de longitud finita, semiinfinita, o infinita;
- determinísticas o aleatorias;
- de ancho de banda limitado (banda angosta, banda ancha) o ilimitado;
- con espectro discreto o continuo;
- de energía o de potencia.

1.7.1. Señales multicanales y multidimensionales

Una señal se describe en función de una o más variables independientes. El valor de esta función (la variable dependiente) puede ser una cantidad escalar real o compleja, o

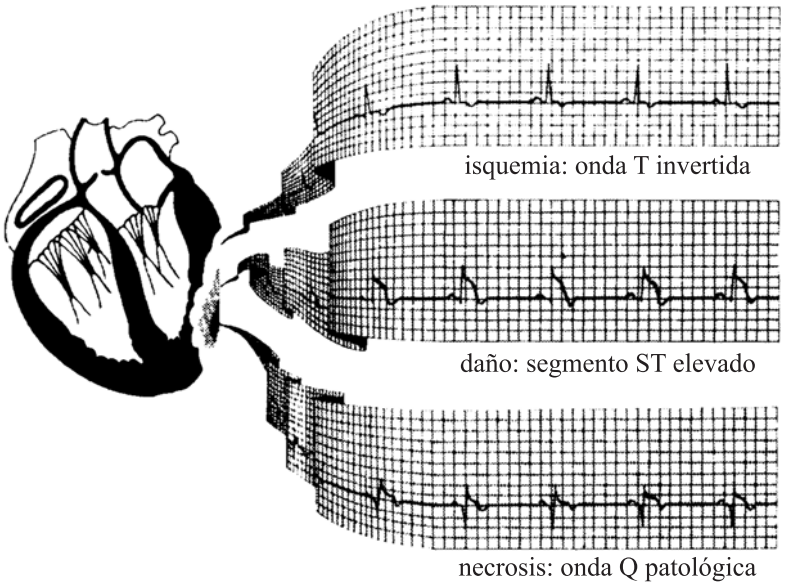


Fig. 1.42. Ejemplo de señal electrocardiográfica de tres canales.

quizás un vector. El número de variables independientes define la *dimensión* de la señal, mientras que el número de variables dependientes determina la cantidad de *canales.* Por ejemplo, la señal $s_1(t) = A \operatorname{sen} 3\pi t$ es una señal real valuada que depende de una única variable independiente (t): tanto el número de canales como la dimensión son unitarios. La señal $s_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A\cos 3\pi t + jA \operatorname{sen} 3\pi t$ aunque también depende de una única variable independiente (t) toma valores complejos: es una señal unidimensional de dos canales.

En algunas aplicaciones, las señales pueden estar generadas por múltiples fuentes o sensores, y entonces pueden representarse en forma vectorial. La Fig. 1.28 muestra las tres componentes de una señal vectorial que representa la aceleración de la corteza terrestre debido a un terremoto. La aceleración es el resultado de tres tipos básicos de ondas elásticas. Las ondas primarias (P) y secundarias (S) se propagan por el interior de las rocas, y pueden ser transversales o longitudinales, respectivamente. El tercer tipo de onda elástica se denomina superficial, pues se propaga cerca de la superficie terrestre.

Un conjunto de fuentes, o sensores múltiples, generan un conjunto de señales escalares. Aunque tales señales no son vectoriales desde un punto de vista físico, por conveniencia notacional y matemática suelen pensarse como componentes de un vector. La Fig. 1.42 muestra la salida de un electrocardiógrafo que cuenta con tres electrodos, que miden la actividad cardíaca en tres lugares distintos del cuerpo. Si $s_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ nota la señal eléctrica del k-ésimo sensor en función del tiempo, el conjunto de las tres señales puede representarse como el vector

$$\mathbf{s}_3(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}.$$

Tal vector de señales es una *señal multicanal*. En electrocardiografía es común realizar electrocardiogramas utilizando tres y doce sensores, que dan lugar a señales de tres y doce canales, respectivamente.



Fig. 1.43. Ejemplo de una señal bidimensional.

Cuando la señal depende de una única variable independiente es *unidimensional*, y si es función de M variables independientes es *M-dimensional*.

La fotografía de la Fig. 1.43 es un ejemplo de una señal bidimensional, ya que la intensidad o brillo $I(x,y)$ en cada punto es una función de dos variables independientes x e y. Por otro lado, una imagen de televisión en blanco y negro puede representarse como $I(x,y,t)$ ya que el brillo también es función del tiempo, y por lo tanto, la señal de TV monocroma puede describirse como una señal tridimensional. En cambio, una imagen de TV color puede describirse como tres componentes de intensidad $I_r(x,y,t)$, $I_g(x,y,t)$, e $I_b(x,y,t)$ correspondientes al valor de los colores principales (rojo, verde y azul) como funciones del tiempo. La señal de TV color puede describirse entonces como una señal tridimensional de tres canales, representada por el vector

$$\mathbf{I}(x,y,t) = \begin{bmatrix} I_r(x,y,t) \\ I_g(x,y,t) \\ I_b(x,y,t) \end{bmatrix}.$$

En este curso trataremos principalmente con señales de un solo canal, unidimensionales, reales o complejas, que denominaremos simplemente *señales*. En términos matemáticos estas señales son función de una única variable independiente; aunque no necesariamente es el tiempo, es costumbre referirse a ella utilizando el símbolo t. En muchos casos, las operaciones de procesamiento de señales y los algoritmos desarrollados para señales unidimensionales, de un único canal, pueden extenderse a señales multicanales y multidimensionales.

1.7.2. Señales continuas o discretas en tiempo

Las señales de *tiempo continuo* están definidas para cualquier valor de tiempo, y pueden tomar valores en el intervalo continuo (t_1, t_2), donde t_1 puede ser $-\infty$ y t_2 puede ser $+\infty$. Matemáticamente, estas funciones pueden describirse como función de una variable continua. La forma de onda de la voz de la Fig. 1.22 y las señales $x_1(t) = \cos \pi t$, $x_2(t) = e^{-|t|}$, $-\infty < t < \infty$ son ejemplos de señales de tiempo continuo.

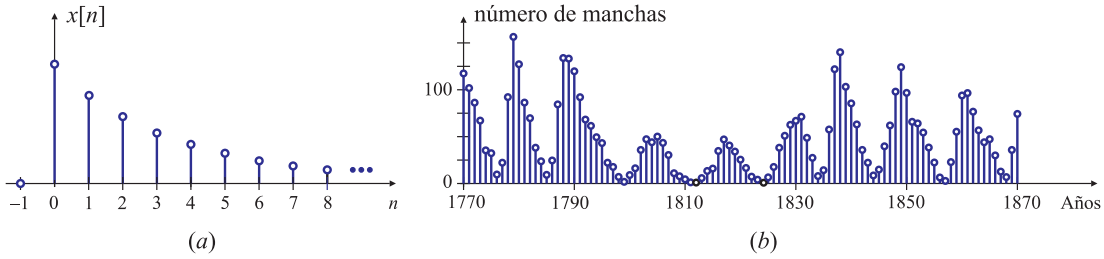


Fig. 1.44. Señales discretas en tiempo: Representación gráfica de la señal $x[n] = 0{,}8^n$ para $n \geq 0$, y $x[n] = 0$ para $n < 0$ (a); Número de manchas solares por año entre 1770 y1869) (b).

Las señales *discretas* están definidas en determinados instantes de tiempo, y solamente en ellos. Estos instantes de tiempo no tienen por qué ser equidistantes, aunque en la práctica frecuentemente lo son por conveniencia computacional y para que resulten matemáticamente tratables. La señal $x[t_n] = e^{-|t_n|}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ es un ejemplo de una señal discreta. Debe tenerse presente que la señal *no es nula* durante el intervalo de tiempo entre t_n y t_{n+1}: simplemente, *no está definida* en esos intervalos.

De aquí en más, las variables independientes de las señales discretas se encerrarán entre corchetes "$[\cdot]$", mientras que para las señales continuas se utilizarán paréntesis "$(\cdot)$". Si se emplea el índice n de los instantes discretos de tiempo para indicar la variable independiente, la señal se hace función de una variable entera. De esta forma, las señales discretas pueden representarse matemáticamente como una sucesión de números reales o complejos. Para enfatizar la naturaleza discreta de la señal, se notará $x[n]$ en lugar de $x[t_n]$. Si los instantes de tiempo están equiespaciados (es decir, $t_n = nT$), la notación $x[nT]$ también es frecuente. Por ejemplo, la señal definida por

$$x[n] = \begin{cases} 0{,}8^n, & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

es una señal discreta, representada gráficamente en la Fig. 1.44(a).

En las aplicaciones, las señales discretas pueden surgir de dos maneras:

1. Eligiendo valores de una señal analógica en determinados instantes de tiempo. Este proceso se denomina *muestreo* ("sampling" en inglés) y será tratado en profundidad en el Capítulo 7. Todos los instrumentos de medición que toman medidas a intervalos regulares de tiempo proveen señales de tiempo discreto. Por ejemplo, la señal $x[n]$ de la Fig. 1.44(a) puede obtenerse muestreando la señal continua $x(t) = 0{,}8^t$, $t \geq 0$, y $x(t) = 0$, $t < 0$ a razón de una vez por segundo.

2. Por acumulación de una variable durante un período de tiempo. Por ejemplo, la cuenta de los automóviles que pasan por una determinada calle por hora, o el registro de la cotización promedio del dolar (o del euro) cada día son ejemplos de señales discretas. La Fig. 1.44(b) muestra un gráfico de los números de manchas solares de Wölfer. Cada muestra se esta señal discreta corresponde al número total de manchas solares observadas durante el lapso de un año.

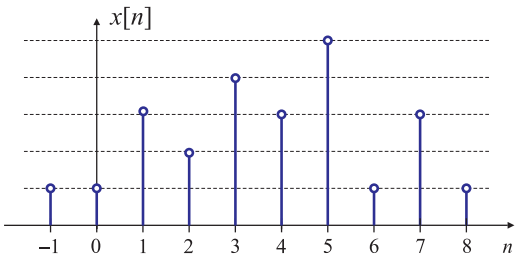


Fig. 1.45. Señal digital cuantizada en cinco niveles de amplitud.

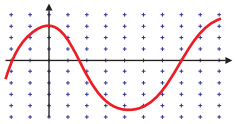
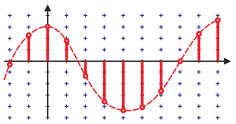
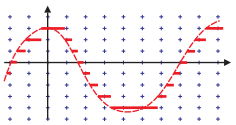
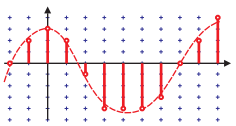
1.7.3. Señales continuas o discretas en amplitud

Los valores de la *amplitud* que toma una señal continua o discreta en tiempo, también pueden ser continuos o discretos. La Fig. 1.45 muestra una señal que sólo puede tomar cuatro valores diferentes. Si la señal toma todos los posibles valores sobre un rango finito o infinito, se dice que es una señal de *amplitud continua*. El proceso de convertir la señal de amplitud continua en una de amplitud discreta, denominado *cuantización*, es un proceso de aproximación. Puede llevarse a cabo por *redondeo* o *truncación*. Por ejemplo, si la señal digital sólo puede tomar valores enteros entre 0 y 15, la señal continua se cuantizará en alguno de estos 16 valores. Si el valor de la señal continua es 8.58, se aproximará a 8 si se adopta el método de truncación, o a 9 si se emplea el redondeo al entero más próximo.

De acuerdo a la forma de variación de la variable independiente (usualmente t) y de la amplitud, las señales que serán objeto de estudio a lo largo de este curso pueden caracterizarse en cuatro categorías diferentes como se muestra en la Tabla 1.7.

Una señal que es continua en amplitud y tiempo, se denomina señal *analógica*. Alternati-

Tabla 1.7: Clasificación de señales según su variación en amplitud y tiempo.

Variación en		tipo de	
tiempo	amplitud	señal	
continua	continua	analógica	
discreta	continua	discreta	
continua	discreta	cuantizada	
discreta	discreta	digital	

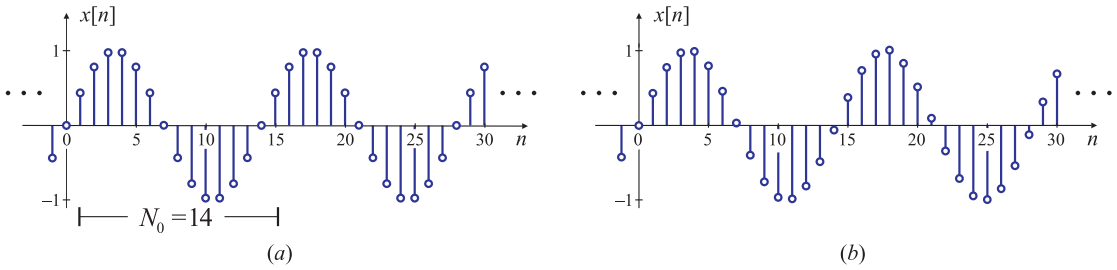


Fig. 1.46. Señales sinusoidales $x[n] = \operatorname{sen}(\omega_0 n)$: señal periódica, con $\omega_0 = \pi/7$ (a); señal casi periódica de frecuencia $\omega_0 = \pi/(5\sqrt{2})$ (b).

vamente, si la señal sólo toma valores de un conjunto finito de valores posibles, se dice que es una señal de *amplitud discreta* o *cuantizada*. Usualmente, estos valores son equidistantes, y por lo tanto pueden expresarse como un entero múltiplo de la distancia entre dos valores sucesivos. Una señal discreta en el tiempo, que toma valores discretos en amplitud suele denominarse una señal *digital*.

Para que una señal pueda ser procesada por medios digitales, debe ser discreta en tiempo y amplitud[3] (es decir, debe ser una señal digital). Si la señal que debe procesarse es de tiempo continuo, antes de su procesamiento debe ser convertida en una señal digital discretizándola (en tiempo) y cuantizándola (en amplitud).

1.7.4. Señales periódicas y no periódicas

Una señal continua $x(t)$ es *periódica* si satisface la condición

$$x(t) = x(t + T_0) \tag{1.1}$$

para todo t, donde T_0 es una constante. El menor valor positivo de T_0 que satisface esta condición se denomina *período*, y define la duración de un ciclo completo de la señal $x(t)$. Por ejemplo, la señal

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

es periódica de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, pues

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = A \operatorname{sen}\left[\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + 2\pi) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t) = x(t).$$

Si una señal $x(t)$ es tal que la condición (1.1) no se cumple para ningún valor de T_0, se dice que la señal es aperiódica. Por ejemplo, la señal $x(t) = t^2$ no es periódica pues no existe ningún T_0 tal que se verifique (1.1). En cambio, la señal $x(t) = x_0$ (constante) tiene período arbitrario, pues la condición (1.1) se satisface para *cualquier* valor de T_0.

Una señal discreta $x[n]$ es periódica de período N_0 si

$$x[n] = x[n + N_0], \tag{1.2}$$

[3] Los circuitos de capacitores conmutados sirven para procesar señales discretas en tiempo y continuas en amplitud, pero este procesamiento queda limitado a algoritmos simples, como filtrado, interpolación, etc. Los algoritmos más complejos requieren de señales digitales y DSPs.

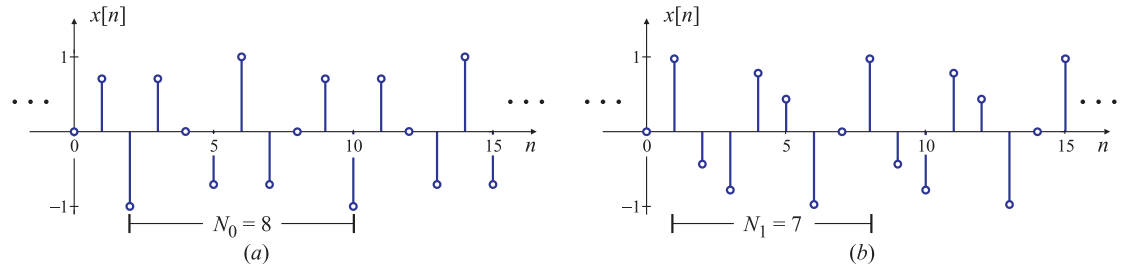


Fig. 1.47. En señales discretas, la frecuencia ω_0 y el período no siempre están inversamente relacionadas. Señal sinusoidal de frecuencia $\omega_0 = (3/8)2\pi$ y período $N_0 = 8$ (a); señal de frecuencia $\omega_1 = (2/7)2\pi$, y período $N_1 = 7$ (b). La segunda señal es de frecuencia y *período* menor que la primera!

donde N_0 es un entero positivo. Las señales discretas presentan ciertas peculiaridades inherentes que no ocurren en señales continuas. Por ejemplo, la señal

$$x[n] = A \operatorname{sen}(\omega_0 n) \tag{1.3}$$

es periódica *sólo si* ω_0 *es una fracción racional de* 2π. Si $\omega_0 = \pi/7$, el período de la señal es $N_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/(\pi/7) = 14$, como se observa en la Fig. 1.46(a). En cambio, si $\omega_0 = \pi/(5\sqrt{2})$ (note que $5\sqrt{2} = 7{,}07$, por lo que la frecuencia es similar a la del ejemplo anterior), la señal (1.3) *no* es periódica: el argumento $\omega_0 n = \pi n/\sqrt{2}$ no es congruente módulo 2π con $\omega_0(n + N_0) = \pi n/\sqrt{2} + \pi N_0/\sqrt{2}$ para ningún valor de N_0 [Fig. 1.46(b)].

También debe tenerse en cuenta que, aún cuando ω_0 sea una fracción racional de 2π, no siempre el período está dado por la ecuación $2\pi/\omega_0$, ya que el resultado de esta operación no necesariamente es un número entero. Por ejemplo, si $\omega_0 = 5\pi/4$, el cálculo de $2\pi/\omega_0$ es

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5\pi/4} = \frac{8}{5}$$

que no es un número entero; en este caso, el período N_0 de la señal es $N_0 = 8$, como se aprecia en la Fig. 1.47(a).

En general, si $2\pi/\omega_0 \in \mathbb{Q}$ (i.e., es un número racional), siempre puede notarse

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{p}{q}$$

donde p y q son *relativamente primos* o *primos entre sí*; en otras palabras, no tienen factores en común, por lo que la fracción p/q es irreducible. Bajo estas condiciones, el período N_0 de la señal discreta $x[n]$ es

$$N_0 = p.$$

Nuevamente, esto establece algunas diferencias con el caso continuo: la frecuencia $\omega_0 = 2\pi\frac{3}{8}$ es mayor que $\omega_1 = 2\pi\frac{2}{7}$, y sin embargo el período $N_0 = 8$ de la primera [Fig. 1.47(a)] *también es mayor* que el período $N_1 = 7$ de la segunda [Fig. 1.47(b)].

A pesar de que una señal discreta $x[n]$ como (1.3) de frecuencia ω_0 que no es una fracción racional de 2π *no* es periódica, su envolvente sí lo es, tal como se puede apreciar en la Fig. 1.46(b); por ello se las suele denominar señales *casi periódicas*. Aunque en muchas aplicaciones resulta irrelevante que la señal sea periódica o casi periódica, como por ejemplo en la determinación de la salida de estado estacionario de sistemas lineales discretos,

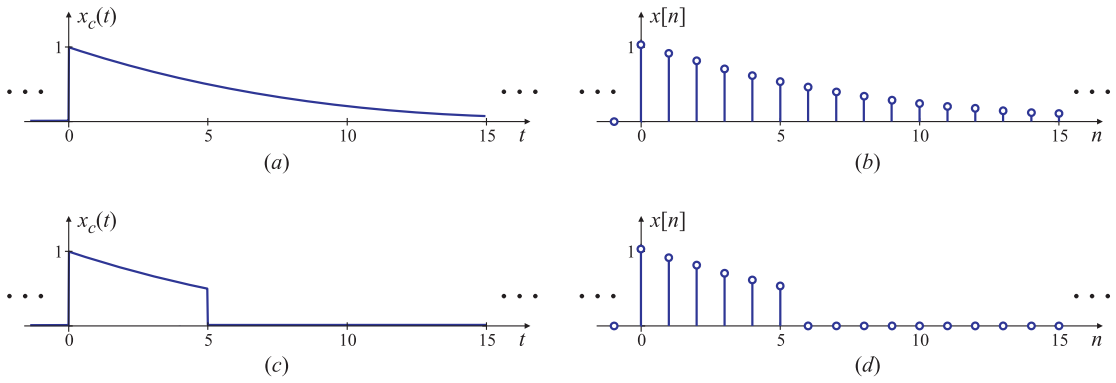


Fig. 1.48. Señales de longitud semi-infinita de tiempo continuo (a) y discreto (b). Señales de longitud finita de tiempo continuo (c) y discreto (d).

en otras, como el análisis espectral de señales discretas, esta diferencia se manifiesta de manera notable.

En los ejercicios se exploran otras propiedades de las señales periódicas discretas y continuas.

1.7.5. Señales de longitud finita, semi-infinita e infinita

Se entiende por *longitud* de una señal al intervalo de tiempo para el cual la señal no es idénticamente nula. Este concepto se corresponde con el de *soporte* de una función en análisis matemático. Si el intervalo es acotado se dice que la señal tiene longitud finita, y en caso contrario que es de longitud infinita. Por ejemplo, la señal continua

$$x_c(t) = 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

es una señal de longitud infinita (o *doblememte* infinita), porque toma valores no nulos tanto para $t \to \infty$ como para $t \to -\infty$. En cambio, la señal descripta por

$$x_c(t) = Ae^{-\alpha t}, \quad \text{con } \alpha > 0,\ 0 \le t < \infty,$$

es de longitud *semi*-infinita, porque se anula sobre el eje real negativo. En cambio la señal

$$y_c(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t), & -2\pi/\omega_0 \le t \le 4\pi/\omega_0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

tiene longitud finita, pues es distinta de cero sólo en el intervalo $-2\pi/\omega_0 \le t \le 4\pi/\omega_0$. Dentro de este intervalo, la función puede tomar valores nulos (por ejemplo, en $t = t_n$, con $\pi/(2\omega_0)(2n+1)$Idénticas consideraciones caben para señales discretas en tiempo: mientras que la señal

$$x[n] = n^2, \quad -\infty < n < \infty,$$

es de longitud doblemente infinita, la señal

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

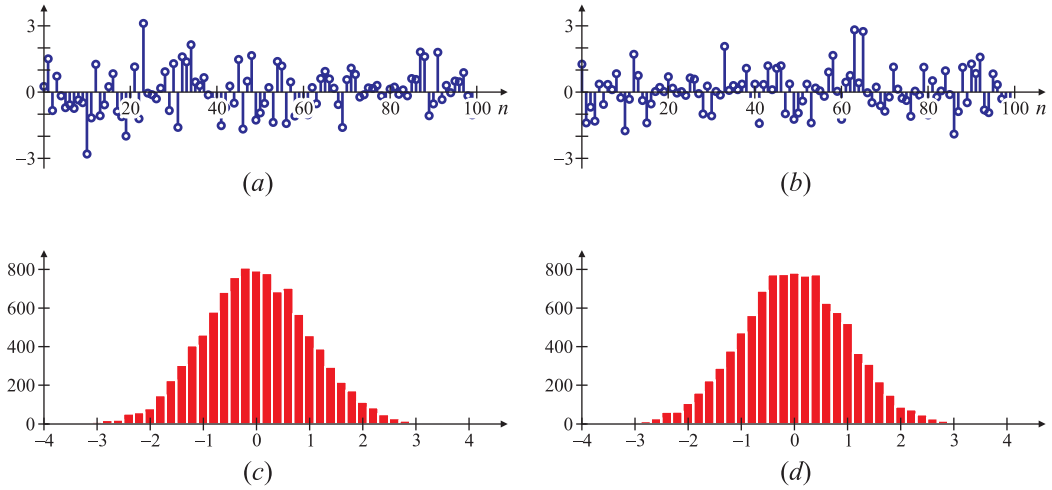


Fig. 1.49. Dos señales aleatorias del mismo generador (a)-(b), y sus histogramas (c)-(d).

tiene longitud finita, de 6 muestras. En la Fig. 1.48 se muestran ejemplos de señales discretas y continuas de longitud finita e infinita.

Una señal periódica *necesariamente* debe ser de longitud doblemente infinita; en cambio una señal aperiódica puede tener longitud finita o infinita.

El interés de distinguir entre uno y otro tipo de señal está motivado por su diferente comportamiento frecuencial, como se verá en el Capítulo 2. Pero también porque ponen de manifiesto algunas diferencias entre los sistemas de tiempo continuo y los de tiempo discreto. Por ejemplo, mientras que en general la respuesta de un sistema continuo a una excitación impulsiva es de longitud infinita, la respuesta impulsiva de un sistema discreto puede ser tanto de longitud infinita (se dice que el sistema es tipo IIR, por *infinite impulse response*) como de longitud finita (sistema tipo FIR, por *finite impulse response*). Los sistemas FIR exhiben comportamientos que no tienen equivalente en los sistemas continuos, como respuesta de fase lineal, retardo de grupo constante, etc.

Algunas señales de longitud infinita tienen características distintivas en cierto intervalo de tiempo, y en el resto toman valores muy pequeños, o varían muy suavemente, etc. Por ello se suele definir la *longitud equivalente* de una señal, que mide el intervalo de tiempo donde se concentra la energía (o la potencia, etc.) de la señal. Estas ideas se explorarán en el Capítulo 2.

1.7.6. Señales determinísticas o aleatorias

El procesamiento y el análisis matemático de las señales requiere disponer de una descripción matemática de la señal misma. Esta descripción matemática, frecuentemente denominada *modelo de señal*, conduce a otra importante clasificación de señales. Una señal que puede describirse de manera única por una expresión matemática explícita, una tabla de valores, o una regla bien definida, se denomina *determinística*. Este término indica que tanto los valores pasados, presentes y futuros de la señal se conocen precisamente, sin ninguna incertidumbre.

Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas se encuentran señales que no pueden des-

cribirse con un nivel razonable de precisión por ninguna fórmula matemática, o una descripción de ese tipo es demasiado complicada para ser de utilidad. La falta de tal relación implica que la señal evoluciona en el tiempo de manera imprevisible. Se dice que tales señales son *aleatorias*. La salida de un generador de ruido, la señal sísmica de la Fig. 1.28, y la señal de voz de la Fig. 1.22 son ejemplos de señales aleatorias.

Las Figs. 1.49(a) y (b) muestran un tramo de 100 muestras de longitud de dos señales aleatorias obtenidas del mismo generador de ruido, y es evidente que ambas señales son diferentes. En las Figs. 1.49(c) y (d) se representan los histogramas[4] de estas señales, calculados para segmentos de 10000 muestras de longitud. Contrariamente a lo que sucede con la representación temporal de las Figs. 1.49(a) y (b) , los histogramas son *muy* parecidos. Esta similitud es la que motiva la descripción y el análisis de las señales aleatorias utilizando técnicas *estadísticas*, en lugar de fórmulas explícitas. El marco matemático para el tratamiento teórico de las señales aleatorias se basa en la teoría de probabilidad y procesos estocásticos.

Debe destacarse que la clasificación de una señal del "mundo real" como determinística o aleatoria no es siempre evidente. Algunas veces ambas aproximaciones conducen a resultados significativos que brindan una comprensión más profunda sobre el comportamiento de la señal. En otros casos, una clasificación incorrecta puede dar lugar a resultados erróneos, ya que ciertas herramientas matemáticas sólo son aplicables a señales determinísticas, mientras que otras tienen sentido solamente para señales aleatorias.

1.7.7. Señales de ancho de banda limitado o no

Las señales pueden estudiarse no sólo desde el punto de vista temporal, sino también *espectral*, en función de la frecuencia, como se estudiará en el próximo capítulo. el tipo de *contenido espectral* influye sobre el tipo de procesamiento que puede efectuarse sobre la señal.

Las señales con ancho de banda limitado son aquellas cuyo contenido espectral queda concentrado en un rango finito de frecuencias. Por ejemplo, una señal senoidal $w(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, como la que se muestra a la izquierda de la Fig. 1.50(a) tiene componentes frecuenciales únicamente en las frecuencias $\pm f_0$, y por lo tanto se considera de banda angosta. Se estudiará en el próximo capítulo que el espectro $W(f)$ de la señal $w(t)$ es

$$W(f) = (A/2)\,\delta(f + f_0) + (A/2)\,\delta(f - f_0)$$

En cambio, una onda cuadrada tiene infinitas componentes frecuenciales, ubicadas en la frecuencia fundamental y sus infinitos múltiplos (las armónicos superiores). Esta señal tiene un ancho de banda ilimitado. Por ejemplo, la onda cuadrada de amplitud A y período $1/f_0$ que se muestra a la izquierda de la Fig. 1.50(b) (cuyo ciclo de trabajo *no es* del 50 %) tiene un espectro dado por

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t},$$

donde $c_k = Ad f_0\,\mathrm{sinc}(dk)$, y $\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{sen}(\pi x)/(\pi x)$.

[4] El histograma es una representación gráfica en forma de barras, donde la altura de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados. En el eje vertical se representan la cantidad de muestras que toman el valor representado en el eje horizontal.

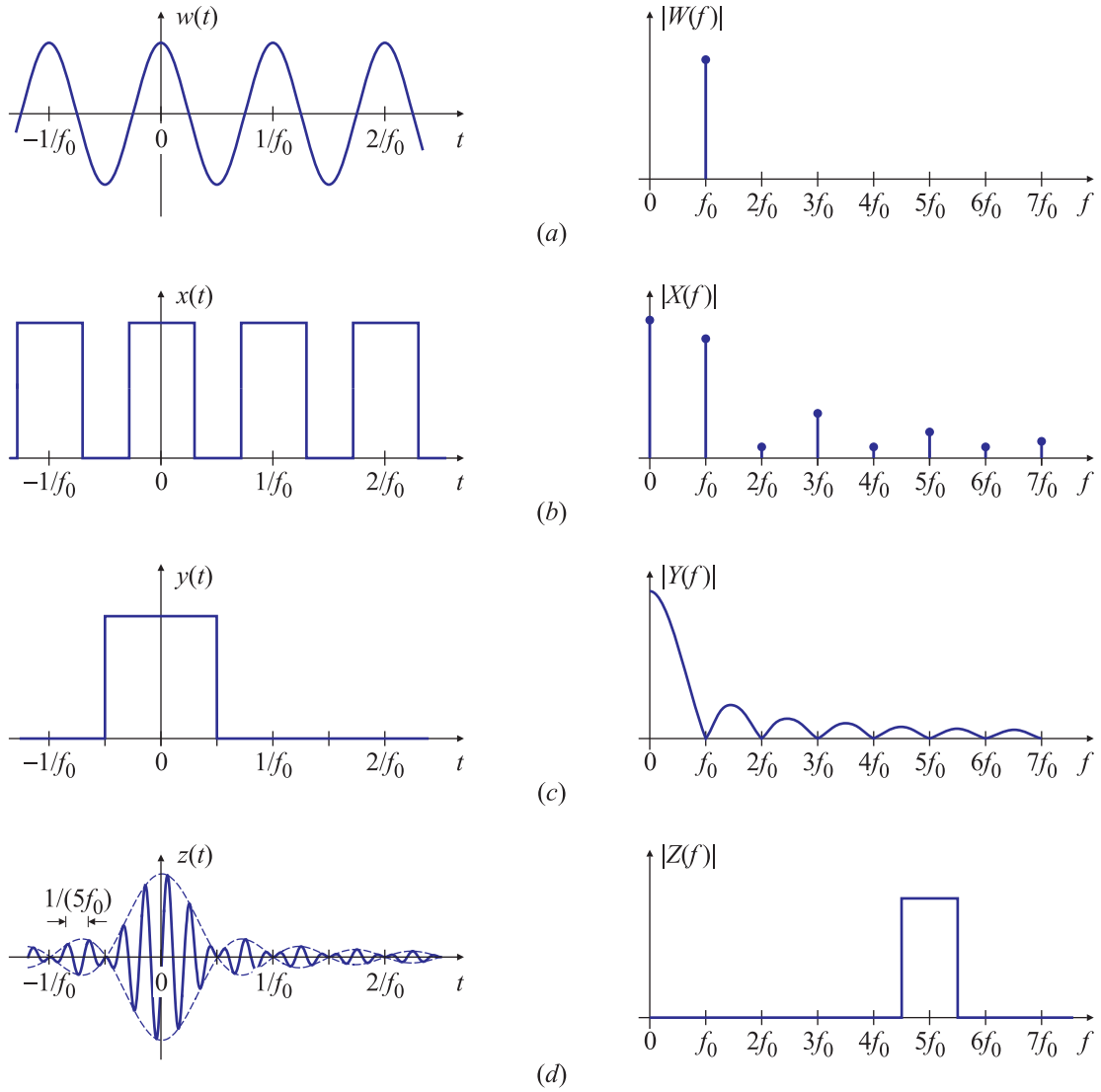


Fig. 1.50. Señales temporales (izquierda) y sus espectros (derecha): ancho de banda finito y discreto (a), ilimitado y discreto (b), finito y continuo (c), ilimitado y continuo (d).

Una señal con un ancho de banda ilimitado es el impulso $\delta(t)$, que se estudiará en detalle en el Capítulo 2. El pulso rectangular $y(t) = A[u(t + t_0/2) - u(t - t_0/2)]$, con $t_0 = 1/f_0$, representado en la Fig. 1.50(c) también tiene un espectro con un ancho de banda ilimitado en frecuencia, dado por

$$Y(f) = At_0 \,\mathrm{sinc}(t_0 f).$$

Las señales aleatorias, con distribución gaussiana, también son de ancho de banda ilimitado (aunque en este caso lo correcto es hablar de densidad espectral en lugar de espectro).

En la Fig. 1.50(d) se representa una señal de banda limitada. La forma de onda temporal está dada por

$$z(t) = A \,\mathrm{sinc}(tf_0/2)\sin(2\pi 5 f_0 t),$$

y su espectro es

$$Z(f) = j\frac{A}{2} f_0 \left\{ [u(f+4{,}5f_0) - u(f+5{,}5f_0)] - [u(f-4{,}5f_0) - u(f-5{,}5f_0)] \right\}.$$

Las señales de *banda ancha* o *banda angosta* se caracterizan por la relación entre el ancho de banda de la señal, y alguna frecuencia distintiva de la misma. Por ejemplo las ondas de radio moduladas en amplitud tienen un espectro concentrado alrededor de la frecuencia de la portadora, y *limitado* a ± 5 kHz alrededor de ella. y por lo tanto el ancho de banda es de 10 kHz; como es mucho menor que la frecuencia de la señal, se dice que esta señal es de *banda angosta*. Las señales moduladas en frecuencia tienen un ancho de banda mayor, de 30 kHz, pero la frecuencia portadora también es mayor (entre 88 MHz y 108 MHz), y por lo tanto también se consideran de banda angosta. Las señales de televisión analógica, en cambio, tienen anchos de banda de 6 MHz, con portadoras comprendidas entre 59 MHz y 88 MHz (canales 2 al 6) y entre 175 MHz y 216 MHz (canales del 7 al 13), y se consideran de *banda ancha*.

En la actualidad también se utilizan señales cuyo espectro se extiende sobre un rango de frecuencias muchísimo mayor. Por ejemplo, en Wi-Fi (802.11b/g/n) se utilizan señales de 22 MHz de ancho de banda, centradas en "canales" que van desde los 2.412 GHz (canal 1) hasta 2.472 GHz (canal 13). En realidad el ancho de banda es mayor que los 22 MHz; la norma especifica que la potencia de la señal a ± 11 MHz de la frecuencia central del canal debe ser al menos 30 dB menor que la potencia pico. Es frecuente denominar estas señales como de *banda ultra-ancha* o de *espectro disperso*.

1.7.8. Señales con espectro discreto o continuo

La Fig. 1.50 muestra también otra posible clasificación de las señales de acuerdo su tipo de espectro. Los espectros de las Figs. 1.50(a) y 1.50(b) están concentrados en determinados puntos frecuenciales,y se denominan espectros *discretos*, mientras que los de las Figs. 1.50(c) y 1.50(d) se distribuyen de manera *continua* sobre todo el eje de frecuencias o sobre un intervalo acotado del mismo. Se estudiará en el Capítulo 2 que las señales con espectro discreto son periódicas, mientras las que tienen espectro continuo son aperiódicas.

1.7.9. Señales de energía o de potencia

En sistemas de comunicaciones una señal puede representar indistintamente una tensión o una corriente. Si una tensión $v(t)$ fluye sobre una resistencia R con una corriente $i(t)$, la potencia instantánea disipada en la resistencia es

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R}, \qquad \text{o bien} \qquad p(t) = Ri^2(t).$$

En ambos casos, la potencia instantánea es proporcional al cuadrado de la señal. En el caso especial en que la resistencia R tuviese un valor de 1Ω, ambas ecuaciones adoptan la misma expresión. Por ello, en el análisis de señales es habitual adoptar esta convención, de modo que dada una señal $x(t)$ se define la potencia instantánea de la misma como

$$p(t) = x^2(t).$$

De acuerdo con esta convención, se define la *energía total* de la señal como

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt,$$

y la *potencia promedio* a la expresión

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt.$$

Para el caso de señales discretas, la energía se define como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n],$$

y la potencia es

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n].$$

En cualquiera de los dos casos, se dice que una señal es de *energía* si $0 \leq E < \infty$, y de *potencia* si $0 < P < \infty$.

Las clasificaciones de señales como de potencia o energía son mutuamente excluyentes. En particular, cualquier señal de energía tiene potencia promedio nula, mientras que una señal de potencia tiene energía infinita. Ejemplos de señales de potencia son las señales sinusoidales, constantes o las señales aleatorias, mientras que señales determinísticas y no periódicas (como $x(t) = e^{-\alpha t}$ ó $x[n] = e^{-\alpha n}$, con $\alpha > 0$ y $n \geq 0$) suelen ser señales de energía.

Una señal de longitud finita tiene energía finita, y potencia promedio nula. Sin embargo, una señal de longitud infinita puede ser una señal de energía (por ejemplo, $x[n] = a^n$, con $|a| < 1$ y $n \geq 0$) o de potencia, como $x[n] = A\,\mathrm{sen}(2\pi n/N)$.

1.7.10. Otras clasificaciones

Entre la inagotable variedad de señales merecen citarse los tipos de señales

- causales y no causales;
- pares o impares.

Ambos tipos de señales serán estudiadas con detalle en el Capítulo 2.

1.8. Referencias

1. Brandenburg, K., Popp, H., "An introduction to MPEG Layer-3", *EBU Technical Review*, junio 2000.
2. Chierchie, F., "Up-Sampling, Noise Shaping and Pseudo Natural Pulse Width Modulation: an experimental approach and review", enviado a *J. Audio Eng. Society*, 2010.

3. Dutoit, T., Marques, F., *Applied signal Processing: A Matlab-based proof of concept*, Springer, 2009.

4. Eyre, J.,. "The Digital Signal Processor Derby", *IEEE Spectrum*, **38**, 6, (2001), 62–68.

5. Fernández Moroni, G., *Sistema de reducción de ruido de lectura en Charged Coupled Devices*, Proyecto final de carrera. Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur, 2010.

6. González, J. P., Cutini, G., Cousseau, J. E, Paolini, E. E., "Cancelamiento Activo de Banda Ancha", *XVIII Congreso Argentino de Control Automático AADECA 2002*, Buenos Aires, 2 al 4 de Setiembre de 2002, ref. 055.

7. Haykin, S., *An Introduction to Analog and Digital Communications*, Wiley, 1989.

8. Kintsch, W., Van Dijk, T. A., "Toward a model of text comprehension and production", *Psychological Review*, **85** (5), 363-394, 1978.

9. Lyons, R., *Understanding Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 2001.

10. Madiseti, V., Williams, D., *The Digital Signal Processing Handbook*, CRC Press & IEEE Press, 1998.

11. Mitra, S., *Digital Signal Processing: A computer-based approach*, Mc Graw Hill, 1998.

12. Orazi, V., *Sistema de seguimiento Ocular*. Proyecto final de carrera. Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur, 2010.

13. Nieto, J. I., Paolini, E. E., Cousseau, J. E., "Aspectos de la implementación de un ambiente de cancelamiento activo de ruido", *IX Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC'2001)*, Santa Fe, 12 al 14 de septiembre de 2001, pp. 139-144.

14. Porat, B., *A course in Digital Signal Processing*, Wiley, 1997.

15. Proakis, J., Manolakis, D., *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Macmillan, 1992.

16. Smith, S., *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, 2da. Ed., California Technical Publishing, 1999. (disponible vía internet en http://www.dspguide.com).

17. Stefanazzi, L., *Modulación "click" para amplificadores de audio conmutados*. Tesis de Magister, Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur, 2008.

18. Strauss, W., "The Embeded DSP Trend", *IEEE Signal Processing Magazine*, **21**, 3, (2004), 101.

19. Tretter, S., *Communication System Design Using DSP Algorithms*, Kluwer/Plenum Publishing, 2003.

1.9. Ejercicios

多闻阙疑，慎言其余，则寡尤。多见阙殆，慎行其余，则寡悔。言寡尤，行寡悔，禄在其中矣。

Escucho, y olvido.
Veo, y recuerdo.
Hago, y entiendo.

atribuida a Confucio, 551-479.

不闻不若闻之，闻之不若见之，见之不若知之，知之不若行之。学至于行之而止矣。

Mejor que nada es oír,
mejor que oír es ver,
mejor que ver es saber,
mejor que saber es hacer.
El aprendizaje no concluye
hasta que se lleva a la práctica.

Xunzi, 340-245.

Sobre los ejercicios:

Los ejercicios forman una parte muy importante (si no la *más* importante) del curso. Algunos son sencillos, otros más complicados, y dentro de lo posible se ha tratado de evitar ejercicios triviales o donde se repita el argumento necesario para su solución. Se incluyen los problemas más interesantes de los parciales de años anteriores. Si bien no hay ejercicios más importantes que otros, las siguientes indicaciones pueden ser de utilidad:

- Los ejercicios señalados Ⓘ son **interesantes**: aunque en la mayoría de los casos no son de resolución sencilla, se aconseja estudiarlos y discutirlos pues su finalidad es enfatizar algunos conceptos importantes.
- Los ejercicios marcados Ⓜ pueden (¡o deben!) resolverse con MATLAB. El grado de dificultad es variable: en algunos basta usar MATLAB como una calculadora, mientras que en otros es necesario escribir pequeños programas (*funciones* o *m-files*).
- Los ejercicios indicados con Ⓒ son **complementarios**: profundizan sobre ciertos temas o desarrollan algunas aplicaciones interesantes, pero no son indispensables para comprender los temas de la materia.

Ejercicio 1. Especifique si estas señales son analógicas, discretas, cuantizadas o digitales.

1. La lectura de un termómetro de mercurio montado en un globo meteorológico, expresada en función de la altura.
2. Los mismos datos de temperatura, pero registrados en un *data logger*.
3. El intervalo de tiempo que transcurre entre la llegada de clientes a un mostrador.
4. El número de personas por hora que han sido atendidos por un empleado a lo largo de un día de trabajo.
5. La variación de los precios de la bolsa a lo largo del año.

Ejercicio 2. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales periódicas, con períodos fundamentales T_1 y T_2, respectivamente. ¿Bajo qué condiciones la suma $x(t) + y(t)$ es periódica? Si es periódica, calcule cuál es el período fundamental de la señal.

Ejercicio 3. Encuentre, si es posible, ejemplos de señales $x(t)$ e $y(t)$, periódicas con el mismo período fundamental T, tales que:

1. la señal $x(t) + y(t)$ tenga período fundamental $T/2$.
2. la señal $x(t) + y(t)$ tenga período fundamental $2T$.

Ejercicio 4. Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos señales periódicas, con períodos fundamentales N_1 y N_2, respectivamente. ¿Bajo qué condiciones la suma $x[n] + y[n]$ es periódica? Si es periódica, calcule cuál es el período fundamental de la señal.

Ejercicio 5. Si $x(t)$ es una señal continua en el tiempo, $x(2t)$ es una versión "acelerada" de $x(t)$, en el sentido que la duración de la nueva señal es la mitad de la original. De manera similar, $x(t/2)$ es una versión "desacelerada" de $x(t)$, donde la escala temporal de la señal se ha duplicado. Si $y(t) = x(2t)$ y $z(t) = x(t/2)$, determine si las siguientes afirmaciones son ciertas, y si la respuesta es afirmativa, determine la relación entre los períodos de las dos señales consideradas en la proposición. Si la proposición es falsa, dé un contraejemplo.

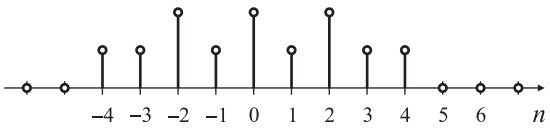
1. Si $x(t)$ es periódica, entonces $y(t)$ es periódica.
2. Si $x(t)$ es periódica, entonces $z(t)$ es periódica.
3. Si $y(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.
4. Si $z(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

Ejercicio 6. Los conceptos de "aceleración" o "desaceleración" de una señal son ligeramente diferentes para señales discretas en el tiempo. Dada una señal $x[n]$ discreta en el tiempo, las señales $y[n]$ y $z[n]$ definidas a continuación representan en cierta forma las señales "aceleradas" (o *decimadas* en tiempo) y "desaceleradas" (o *interpoladas*) de $x[n]$:

$$y[n] = x[2n] \qquad\qquad z[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{si } n \text{ es par.} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas, y si la respuesta es afirmativa, determine la relación entre los períodos de las dos señales consideradas en la proposición. Si la proposición es falsa, dé un contraejemplo.

1. Si $x[n]$ es periódica, entonces $y[n]$ es periódica.
2. Si $x[n]$ es periódica, entonces $z[n]$ es periódica.
3. Si $y[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.
4. Si $z[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.



5. Para la señal $x[n]$ que se muestra en la figura, dibuje $y[n]$ y $z[n]$.

Ejercicio 7. La señal continua $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ tiene frecuencia fundamental f_0 y período $T_0 = 1/f_0$. La señal $x[n]$ se obtiene al tomar muestras de $x(t)$ cada T segundos: $x[n] = x(nT) = e^{j2\pi f_0 nT}$.

1. Muestre que la señal $x[n]$ es periódica si y sólo si T/T_0 es un número racional, es decir, si y sólo si el período de muestreo iguala exactamente un múltiplo del período de $x(t)$.
2. Si $x(t)$ es periódica, ($T/T_0 = p/q$ donde p y q son enteros), ¿cuál es el período y la frecuencia fundamental de $x[n]$? Exprese la frecuencia fundamental como una fracción de $f_0 T$.
3. Si se cumple la condición dada en el inciso anterior, determine precisamente cuántos períodos de $x(t)$ son necesarios para obtener las muestras que formen un período de $x[n]$.

Ⓒ **Ejercicio 8.** Si una señal analógica sinusoidal $x_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$ se muestrea a una frecuencia Ω_s, de modo tal que si Ω_0 y Ω_s están *armónicamente relacionadas* entre sí ($\Omega_0 N = \Omega_s k$, donde N y k son números naturales) se obtiene un conjunto de señales periódicas $\phi_k[n] = \phi_k[n+M] = e^{j(\frac{2\pi}{N}k)n}$. En los siguientes ejercicios, observe la relación entre la frecuencia de la señal (directamente proporcional a k si N y Ω_s son constantes) y su período M.

1. Para el conjunto de señales $\phi_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{7}k)n}$, $0 \leq n \leq 27$, ($N = 7$), encuentre el período fundamental para todos los valores enteros de k.
2. Repita el inciso anterior si $\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{8})n}$, $0 \leq n \leq 31$, ($N = 8$).
3. Generalice los resultados anteriores para una señal periódica, discreta en el tiempo $\phi_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{N}k)n}$. Muestre que el período fundamental N_0 de esta señal está dado por $N_0 = N/\,\mathrm{MCD}(k, N)$, donde $\mathrm{MCD}(k, N)$ (el máximo común divisor entre k y N) es el mayor entero que divide a ambos k y N un número entero de veces. Por ejemplo, $\mathrm{MCD}(2,3) = 1$, $\mathrm{MCD}(2,4) = 2$, $\mathrm{MCD}(8,12) = 4$. Note que $N_0 = N$ si m y N no tienen factores en común (en ese caso se dice que k y N son *relativamente primos*).

Ejercicio 9. Las siguientes sucesiones representan un período fundamental de una señal sinusoidal $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$. Determine los valores de A, ω_0 y ϕ para cada caso. El primer valor de cada sucesión corresponde a $n = 0$.

1. $x[n] = \{0, -\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}\}$.
2. $x[n] = \{-3, 3\}$.
3. $x[n] = \{0, 3/2, 0, -3/2\}$.

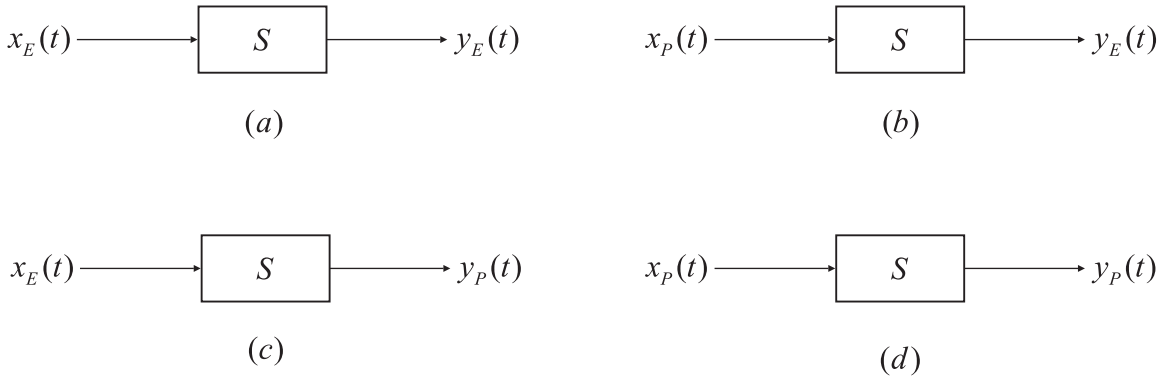
Ejercicio 10. Calcule la energía y/o la potencia promedio de las siguientes señales:

1. $x(t) = e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0, \alpha > 0$.
2. $x(t) = e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0, \alpha < 0$.
3. $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t)$ para $-\infty < t < \infty, \omega_0 \in \mathbb{R}$.
4. $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t)\, u(t)$ para $-\infty < t < \infty$, donde $u(t)$ es el escalón unitario: $u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$
5. $x[n] = \begin{cases} A \operatorname{sen}(\omega_k n), & \text{si } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$ para $\omega_k = 2\pi k/N, 0 \leq k \leq N-1$.
6. $x[n] = A \operatorname{sen}(\omega_0 n)$ para $-\infty < n < \infty$, si $2\pi/\omega_0 = p/q \in \mathbb{Q}$.
7. $x[n] = A \operatorname{sen}(\omega_0 n)$ para $-\infty < n < \infty$, si $2\pi/\omega_0 \notin \mathbb{Q}$.
8. $x[n] = k$ (constante)

Ayuda: para resolver el inciso 5 aplique la identidad de Euler $\operatorname{sen}\alpha = -j(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})/2$, y tenga en cuenta que $\sum_{n=0}^{N-1}(e^{j\theta})^n = (e^{j\theta N} - 1)/(e^{j\theta} - 1)$. Para los incisos 6 y 7 puede ser más sencillo determinar una cota sobre la potencia o la energía de la señal; el cálculo exacto se puede efectuar en base a propiedades que se estudiarán en el Capítulo siguiente.

Ejercicio 11. Una señal es de *longitud finita* si $x(t) = 0$ para todo $t \notin [t_0, t_1]$ (caso continuo) o $x[n] = 0$ para todo $n \notin [n_0, n_1]$. Muestre que toda señal continua o discreta de longitud finita tiene energía finita, y potencia promedio nula.

Ejercicio 12. Las entradas $x(t)$ y las salidas $y(t)$ de los sistemas de la figura pueden ser señales de potencia o de energía, y se indican con subíndices P o E, según corresponda. Los sistemas $\mathcal{S}$ son lineales e invariantes en el tiempo. Dé ejemplos de funciones transferencia que permitan satisfacer las cuatro relaciones indicadas entre los tipos de señales de entrada y salida.



2 Análisis de Fourier

The material essential for a student's mathematical laboratory is very simple. Each student should have a copy of Barlow's tables of squares, etc., a copy of Crelle's Calculation Tables, and a seven-place table of logarithms. Further it is necessary to provide a stock of computing paper, ...and lastly, a stock of computing forms for practical Fourier analysis. With this modest apparatus nearly all the computation hereafter described may be performed, although time and labor may often be saved by the use of multiplying and adding machines, when these are available.

E.T. Whitakker and G. Robinson, *The calculus of observations*, 1924[1].

En este capítulo se revisan algunos conceptos del análisis de Fourier. Después de una breve reseña histórica, se recuerdan algunas nociones elementales de la serie de Fourier, que permite representar una señal periódica como una suma infinita de componentes sinusoidales. Se estudia luego la transformada de Fourier, que juega un papel similar en el análisis de las señales no periódicas, y es de aplicación más general que la serie. La motivación principal de la aplicación de la serie o la transformada es obtener el *espectro* de una señal dada, que revela el contenido frecuencial de la misma. La descripción de la señal en el dominio frecuencial (o transformado) frecuentemente es más revelador que la representación original en función del tiempo.

2.1. Reseña histórica

La historia[2] del análisis de Fourier tiene más de 200 años. Sus orígenes principian unos 60 años antes del momento en que Jean Baptiste Joseph Fourier presentó la primera versión de su trabajo sobre la teoría de la conducción del calor a la Academia de París (1807). El año 1750 es un buen punto de partida: Fernando VI era rey de España, y Jorge II de

[1] "El material indispensable para el laboratorio matemático de un alumno es muy simple. Cada estudiante deberá tener una copia de la tabla de cuadrados de Barlow, una copia de las Tablas de Cálculos de Crelle, y una tabla de logaritmos a siete decimales. Además, es necesario que cuente con papel borrador, y finalmente, un cuaderno para hacer análisis práctico de Fourier. Con este modesto equipamiento podrá realizar casi todos los cálculos descriptos aquí, aunque podrá ahorrar tiempo y esfuerzo utilizando máquinas de sumar y multiplicar, si están disponibles."

[2] Parte de esta reseña está extractada de Briggs y Henson, 1995. En el Apéndice E se resumen las biografías de las principales personalidades que participaron en el desarrollo del análisis de Fourier y del procesamiento de señales en general.

Inglaterra; las colonias de América del norte estaban en medio de las guerras con los nativos y los franceses; unos años después Carlos III creaba el virreynato del Río de la Plata (1776). Voltaire, Rousseau y Kant estaban escribiendo sus libros en Europa; Bach acababa de morir, y Mozart estaba pronto a nacer; y el cálculo de Leibnitz y Newton, publicado 75 años antes, estaba permitiendo la creación de poderosas nuevas teorías sobre la mecánica celeste y la mecánica del continuo.

En ese momento los esfuerzos de los físicos y matemáticos se concentraban en dos problemas principales, que sentarían las bases de lo que posteriormente se conocería como análisis de Fourier:

- El problema de la cuerda vibrante o la propagación del sonido en un medio elástico;
- La determinación de las órbitas de los planetas a partir de mediciones.

2.1.1. El problema de la cuerda vibrante

Una cuerda elástica (un alambre metálico) sujeta en ambos extremos, vibra al ser golpeada o punteada. Para simplificar el modelo se supondrá que la cuerda es un objeto unidimensional, ocupando el intervalo $0 \leq x \leq 1$ en el plano x-y cuando está en reposo. En el tiempo $t = 0$ se desplaza de su posición inicial, manteniendo sus extremos fijos. La forma de la cuerda se puede expresar como el grafo de una función

$$y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{con } f(0) = f(1) = 0.$$

Apenas la cuerda se libera comienza a vibrar: éste es el modelo de una cuerda *punteada*.

El modelo de la cuerda *golpeada* tiene en cuenta además que en $t = 0$ a cada punto x de la cuerda se le imparte una velocidad $g(x)$ (la velocidad inicial) en la dirección y. La expresión $y(t, x)$ describe el gráfico del desplazamiento del punto x de la cuerda en el tiempo t.

El movimiento queda gobernado por las ecuaciones:

(i) $\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$ (ecuación de onda)

(ii) $y(t,0) = y(t,1) = 0$ para todo t (condiciones de borde)

(iii) $y(0,x) = f(x), \quad \dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t} = g(x)$ (condiciones iniciales)

La solución de este problema atrajo la atención de muchas generaciones de matemáticos. Un hecho evidente es que para cada entero k, tanto

$$y(t,x) = \operatorname{sen} k\pi x \, \operatorname{sen} ak\pi t \tag{2.1}$$

como

$$y(t,x) = \operatorname{sen} k\pi x \, \cos ak\pi t \tag{2.2}$$

satisfacen (i) y (ii). La primera verifica (iii) si $f(x) = 0$ y $g(x) = ak\pi \operatorname{sen} k\pi x$, y la segunda cumple con (iii) si $f(x) = \operatorname{sen} k\pi x$ y $g(x) = 0$.

Cualquier combinación lineal *finita* de funciones como (2.1) y (2.2), esto es, una función de la forma

$$y(t,x) = \sum_k (\alpha_k \cos ak\pi t + \beta_k \operatorname{sen} ak\pi t) \operatorname{sen} k\pi x \tag{2.3}$$

también satisface (*i*) y (*ii*), y verifica (*iii*) para *cierta* elección de $f(\,\cdot\,)$ y $g(\,\cdot\,)$. Pero si $f(\,\cdot\,)$ y $g(\,\cdot\,)$ son funciones *arbitrarias* es muy probable que la suma finita de (2.3) no satisfaga (*iii*). Por otra parte, una suma *infinita* de la forma (2.3) también verifica (*i*) y (*ii*) siempre que sea posible derivar la serie término a término.

Es natural preguntarse: ¿cuándo es posible tal diferenciación? Si la solución expresada en forma de serie converge, y puede diferenciarse, ¿se puede hacer que cumpla con la condición (*iii*) para cualquier elección de $f(\,\cdot\,)$ y $g(\,\cdot\,)$? ¿Existen otras soluciones al problema? Las series de Fourier se idearon para intentar solucionar estas preguntas, y en el curso de su desarrollo se precisaron conceptos tales como *conjunto* y *función*.

Una de las primeras soluciones al problema de la cuerda vibrante fue propuesto por J. D'Alembert en 1747, quien derivó una solución simple y elegante de la forma

$$y(t,x) = v(at+x) - v(at-x),$$

que puede interpretarse como la suma de dos ondas viajeras, una desplazándose hacia la izquierda y otra hacia la derecha. Para el caso de la cuerda punteada, hay una única $f(\,\cdot\,)$ y la solución involucra la función $v(\,\cdot\,)$ que puede calcularse a partir de $f(\,\cdot\,)$. Por lo tanto, D'Alembert creyó que había resuelto el problema completamente.

En esta época la palabra *función* tenía un significado muy restringido: significaba *fórmula*, y representaba objetos tales como $f(x) = x^2$, o $f(x) = x \tan x^2 + 10e^x$. Podía ser tan complicada como se quisiese, pero tenía que ser una única expresión analítica. Algo como

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 \le x \le 1/2, \\ (1-x^2), & \text{si } 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

no calificaba como "función" en el intervalo $[0,1]$. En otra palabras, *función* y *gráfico* significaban objetos diferentes. Cada función puede ser representada por su grafo, pero no todo grafo puede dibujarse como el gráfico de una función.

Euler pensó que no era necesario que la posición inicial de la cuerda fuese una "función", pero sí un gráfico, y que la solución de la onda viajera debía ser válida, interpretando las dos ondas como gráficos. Este razonamiento "físico" fue rechazado por D'Alembert; su razonamiento analítico sólo funcionaba para funciones.

Tanto Euler como Lagrange resolvieron el problema "discretizando" la cuerda vibrante: la supusieron formada por un número finito de pequeñas partículas conectadas. La solución requería encontrar los valores que toma la función que describe el desplazamiento de la cuerda sobre un conjunto de puntos.

En 1755 Daniel Bernoulli propuso otra solución en función de *ondas estacionarias*. Su argumento se comprende mejor al considerar la solución

$$y(t,x) = \operatorname{sen} k\pi x \, \cos ak\pi t.$$

Cuando $k = 1$, los puntos $x = 0$ y $x = 1$ (los extremos de la cuerda) permanecen fijos para todo t, y los otros puntos se mueven según una ley que depende del coseno del tiempo.

Cuando $k = 2$, los puntos $x = 0$, $x = 1$ y también el punto $x = 1/2$ quedan fijos; el resto de los puntos se mueve. En cualquier instante de tiempo t dado, la forma de la cuerda es la de una sinusoide, y el movimiento de un punto arbitrario es una función cosenoidal del tiempo. El punto $x = 1/2$ se denomina *nodo.* Para cualquier $k > 1$ arbitrario, los puntos $1/k$, $2/k$, ..., $(k-1)/k$ de la cuerda quedan fijos, mientras que el resto de los puntos se desplazan como se describió más arriba. Estas son las llamadas *ondas estacionarias*; los puntos fijos interiores se denominan *nodos* y el movimiento para $k = 1, 2, ...$ se denomina *primer armónico*, *segundo armónico*, etc. Bernoulli afirmó que cada solución de la cuerda pulsada con condiciones iniciales $y(0, x) = f(x)$, $\partial y(0, x)/\partial t = 0$ es una suma de estas armónicas, y que esta suma podía ser infinita.

Euler no estaba de acuerdo con este planteo y sus principales objeciones fueron dos. En primer lugar, las hipótesis de Bernoulli implicarían que cualquier función $f(x)$ podría representarse como

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \operatorname{sen} k\pi x, \tag{2.4}$$

porque en $t = 0$ la condición inicial puede ser cualquier $f(x)$. Sin embargo, el miembro derecho de (2.4) es una función periódica (e impar), mientras que el miembro de la izquierda es completamente arbitrario. La segunda objeción es que (2.4) no puede ser una solución *general* del problema, ya que el miembro de la derecha (aunque sea una serie infinita) es una función analítica y por lo tanto una "función" (en el sentido que se entendía entonces). Sin embargo, como el mismo Euler había observado anteriormente en conexión con la solución propuesta por D'Alembert, la posición inicial de la cuerda podía ser cualquier *gráfico*, y no necesariamente una *función*. En síntesis, la solución propuesta por Bernoulli sería aplicable sólo a una clase muy restringida de funciones.

Bernoulli insistió en que su solución era válida para todas las funciones. Su respuesta a la primera objeción de Euler fue que la serie (2.4) incluía una sucesión infinita de coeficientes α_k, y que eligiéndolos de manera apropiada se podía hacer que la serie tomara el valor $f(x)$ para infinitamente muchos x. Hoy se sabe que si dos funciones $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son iguales en infinitamente muchos puntos, no necesariamente son iguales en todos los puntos; sin embargo, en aquella época la naturaleza del infinito y de una función no estaba completamente comprendida, y este argumento parecía plausible. Euler no lo aceptó, pero por otros motivos.

En 1804 Joseph Fourier comenzó sus estudios sobre la conducción del calor en sólidos, y en sólo tres años descubrió las ecuaciones básicas de conducción de calor, desarrolló nuevos métodos para resolverlas, utilizó sus métodos para solucionar muchos problemas prácticos, y aportó evidencia experimental para soportar su teoría.

Una de las situaciones más simples en las que se puede aplicar la técnica de análisis ideada por Fourier es considerar un disco bidimensional para el cual la temperatura sobre el borde es conocida. A partir de estos datos, se desea determinar la temperatura en *cualquier* punto interior del disco

En estado estacionario, la temperatura $u(r, \theta)$ de un punto (r, θ) obedece a la ecuación de Laplace (en coordenadas polares)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0. \tag{2.5}$$

Las temperaturas en el borde del disco están dadas por

$$u(1,\theta) = f(\theta), \tag{2.6}$$

donde $f(\cdot)$ es una función continua dada. El problema de encontrar $u(r,\theta)$ para todo r y θ es análogo al de la cuerda vibrante. Empleando un análisis muy similar al de Bernoulli, Fourier observó que la suma finita

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-N}^{N} A_n r^{|n|} e^{jn\theta}$$

también es una solución de (2.5), y que eligiendo adecuadamente los coeficientes A_n se podía hacer que satisficiera la condición de borde (2.6). En otras palabras, se puede escribir

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{jn\theta} \tag{2.7}$$

cuando $f(\cdot)$ es una función continua.

Fourier avanzó un paso más y aseguró que su método servía no sólo cuando $f(\cdot)$ fuese una "función" sino también cuando $f(\cdot)$ estuviese dada por un grafo arbitrario, eliminando las distinciones entre un gráfico y una función. De hecho, si la afirmación de Fourier fuese correcta, cualquier grafo tendría una fórmula, dada por la serie asociada con él.

Fourier, como Euler, calculó la expresión de los coeficientes A_k de una forma muy laboriosa (y errónea). La versión corregida es

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-jn\theta}\, d\theta. \tag{2.8}$$

La serie (2.7) se conoce como *serie de Fourier*, y los coeficientes (2.8) como *coeficientes de Fourier* de $f(\cdot)$. Fourier observó que los coeficientes A_n tienen sentido siempre que $f(\cdot)$ sea un gráfico limitando un área definida (integrable en la terminología actual), y por lo tanto declaró que sus resultados eran válidos para cualquier $f(\cdot)$ que tuviese esa propiedad.

En 1807 Fourier presentó su trabajo *Mémoire sur la propagation de la chaleur* al Instituto de París. El trabajo recibió apenas una tenue acogida, y los jueces recomendaron a Fourier que puliera su trabajo, y lo presentara para el gran premio de 1812. El panel de jueces de la Academia para este concurso incluía a Lagrange, Laplace, y Legendre, y acordaron a Fourier el gran premio, pero no sin reservas: incomodaba el comentario de Fourier acerca de que *cualquier* función periódica arbitraria podía ser representada con la ecuación (2.7). El gran premio contenía el siguiente comentario:

> *La forma en la que el autor arriba a sus ecuaciones no está exenta de dificultades, y su análisis deja algo que desear, sea en generalidad o aún en rigurosidad.*

En definitiva, el artículo nunca fue publicado, y el trabajo de Fourier sobre la conducción del calor, y la teoría de las series trigonométricas que lo soportaba, recién vio la luz con la publicación en 1822 de *Théorie analytique de la chaleur*. Desde ese año, el trabajo de Fourier recibió comentarios muchos más entusiastas que los de la Academia de París. James Clerk Maxwell lo llamó un "gran poema matemático". La carrera entera de William Thompson (Lord Kelvin) estuvo marcada por la teoría del calor de Fourier:

El teorema de Fourier no es sólo uno de los más bellos resultados del análisis moderno, sino que se ha vuelto un instrumento indispensable en el tratamiento de casi cualquier recóndito problema de la física moderna.

Euler falleció en 1783, y no tuvo oportunidad de conocer el trabajo de Fourier. Sin embargo quedaban pendientes sus objeciones al trabajo de Bernoulli: ¿cómo podía una función arbitraria ser la suma de funciones periódicas? La solución propuesta por Fourier es extremadamente simple: la función dada se define sobre un intervalo cerrado (por ejemplo, $[0, 1]$ o $[0, \pi]$, etc.), donde representa una cantidad física de interés (el desplazamiento de la cuerda, la distribución de calor en la periferia del disco, etc.) La clave está en extender la función *fuera* de ese intervalo, y hacer que esa extensión sea periódica. Por supuesto, si una función se piensa como una fórmula, estas extensiones no son "funciones". La idea de Fourier de admitir funciones que son idénticas en un intervalo y diferentes fuera de él hizo posible aplicar su teoría a una gran variedad de problemas, y condujo a un examen crítico de la noción de función.

Como observó Fourier, los coeficientes A_n de (2.126) tienen sentido para todas las funciones para las cuales la integral es finita, y creía que la serie (2.7) era *exactamente* igual a $f(\,\cdot\,)$ para todas las $f(\,\cdot\,)$ posibles y para todo θ. Esto es cierto todas las funciones "buenas" (suaves a tramos), aunque no es cierto (de manera no trivial) para cualquier $f(\,\cdot\,)$.

Ninguna de las afirmaciones de Fourier acerca de las series sería considerada correcta bajo los parámetros matemáticos de hoy en día. Dirichlet tomó el trabajo de Fourier y lo fundamentó de manera rigurosa, sentando bases firmes para el análisis moderno. En primer lugar era necesario precisar el concepto de función, y la definición de Dirichlet es la que se estudia en los cursos de análisis actuales: una función es una regla que asigna un valor definido $f(x)$ a cualquier x en un conjunto de puntos. Bajo esta definición una función ya no tiene que ser una fórmula o un gráfico, y en 1828 Dirichlet dio un ejemplo que Fourier ni siquiera habría imaginado: la función característica del conjunto de números racionales, definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Esta función no puede representarse con ningún gráfico; tampoco encierra ningún área, de modo que sus coeficientes de Fourier no pueden ser calculados con (2.8).

Sin embargo, para todas las funciones que pueden "dibujarse", Dirichlet probó que la serie de Fourier converge a $f(x)$ en cualquier punto x donde $f(\,\cdot\,)$ sea continua, y al valor medio $[f(x_+) + f(x_-)]/2$ si $f(\,\cdot\,)$ tiene una discontinuidad en x. Además demostró que si $f(\,\cdot\,)$ es suave en un intervalo $[a, b]$, entonces la serie de Fourier converge uniformemente a $f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Este fue el primer resultado importante sobre la convergencia de las series de Fourier. Posteriormente, C. Jordan demostró que las funciones continuas de variación acotada tienen series de Fourier convergentes. A lo largo de los años aparecieron otros muchos teoremas estableciendo condiciones suficientes para que una función tenga una serie de Fourier convergente.

Para trabajar con funciones que no pueden dibujarse es necesario generalizar la idea de la integral más allá de la idea intuitiva del "área bajo una curva". Sólo entonces es posible calcular los coeficientes de Fourier de una función con un número infinito de discontinuidades. Riemann desarrolló una teoría de integración que soportaba tales funciones,

y dio un ejemplo de una función que no satisface las condiciones de Dirichlet pero que tiene una serie de Fourier que converge punto a punto. También inició el estudio de series trigonométricas que no tienen por qué ser series de Fourier de alguna función.

Dirichlet creía (y pensaba que iba a poder probar) que la serie de Fourier de toda función continua, y posiblemente de cualquier función integrable según el criterio de Riemann converge en todo punto. Este punto de vista era compartido por muchos matemáticos prominentes, como Riemann, Weierstrass y Dedekind. Sin embargo, en 1876 Du Bois-Reymond ideó una función continua cuya serie de Fourier es divergente en un punto.

Cantor también estuvo interesado en el estudio de las series de Fourier. Observó que el cambio de una función $f(\cdot)$ en unos pocos puntos no varía sus coeficientes de Fourier, y se preguntó cuántos puntos podían ignorarse, y qué tipos de conjuntos formaban, lo que lo condujo al estudio de conjuntos infinitos y números cardinales.

En 1904 Féjer probó que la serie de Fourier de una función continua es sumable en un sentido particular (el promedio de las primeras sumas parciales converge), y bajo este punto de vista converge uniformemente a la función. Este teorema es extremadamente útil e impulsó el estudio de la sumabilidad de las series.

El hecho notado por Cantor que el cambio de una función en unos pocos puntos no altera los coeficientes de Fourier porque la integral (2.8) no se ve afectada por ellos, llevó a formular de manera diferente la identidad de las funciones con las series: en lugar de preguntarse cuándo la serie de Fourier y la función son iguales en todo punto, se debe examinar cuándo las dos son iguales en todo intervalo excepto en aquellos que son irrelevantes para la integración. Este problema condujo a una revisión crítica de la integral de Riemann, y motivó a Lebesgue a definir una nueva integral que fuese más flexible. Conceptos tales como *conjuntos de medida nula* y igualdad de funciones *casi en todo punto* cambiaron el significado de "función" todavía más: dos funciones son "iguales" si difieren sólo sobre un conjunto de medida nula. Por lo tanto, la función de Dirichlet (la función característica de los racionales) es igual a 0 "casi en todo punto". Así, a lo largo de la historia, el concepto de función evolucionó desde una fórmula, pasando por un grafo, luego una regla, hasta llegar en la actualidad a convertirse en una clase de equivalencia. El concepto de integral de Lebesgue se ha vuelto imprescindible en el análisis moderno.

Antes del ejemplo de 1876 de Du Bois-Reymond los matemáticos creían que la serie de Fourier de una función continua converge en todo punto. Como no pudieron probar esta hipótesis, el ejemplo les hizo pensar que exactamente lo opuesto podría ser cierto: esto es, que existiese una función continua cuya serie de Fourier diverge en todo punto. En 1926 Kolmogorov probó algo menos, pero igualmente sorprendente: existen una función Lebesgue-integrable definida sobre $[-\pi, \pi]$ (espacio L_1) cuya serie de Fourier diverge en todo punto. La función ideada por Kolmogorov no es continua, ni Riemann integrable. Luego de que este ejemplo fuese publicado se esperaba que tarde o temprano alguien descubriese una función continua con una serie de Fourier divergente en casi todo punto. Sin embargo, hubo una nueva sorpresa. En 1966 Carleson probó que si $f(\cdot)$ es de cuadrado integrable (espacio L_2), entonces la serie de Fourier converge a $f(\cdot)$ en casi todo punto. En particular, esto es cierto para funciones continuas, de modo que Fourier casi tenía razón! El teorema de Carleson es mucho más difícil de probar que la mayoría de los resultados que se han citado. En 1967 R. A. Hunt demostró que la serie de Fourier de cualquier función definida sobre un intervalo $[a, b]$ tal que $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$, con $1 < p < \infty$ (espacios L_p) converge en casi todo punto, y en la dirección inversa, Y.

Tabla 2.1: Datos de la órbita del asteroide Pallas.

Ascención θ (grados)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
Declinación x (minutos)	408	89	-66	10	338	807	1238	1511	1583	1462	1183	804

Katznelson y J. P. Kahane mostraron en 1966 que dado un conjunto E de medida nula en $[-\pi, \pi]$ existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en E.

2.1.2. La determinación de las órbitas de los planetas

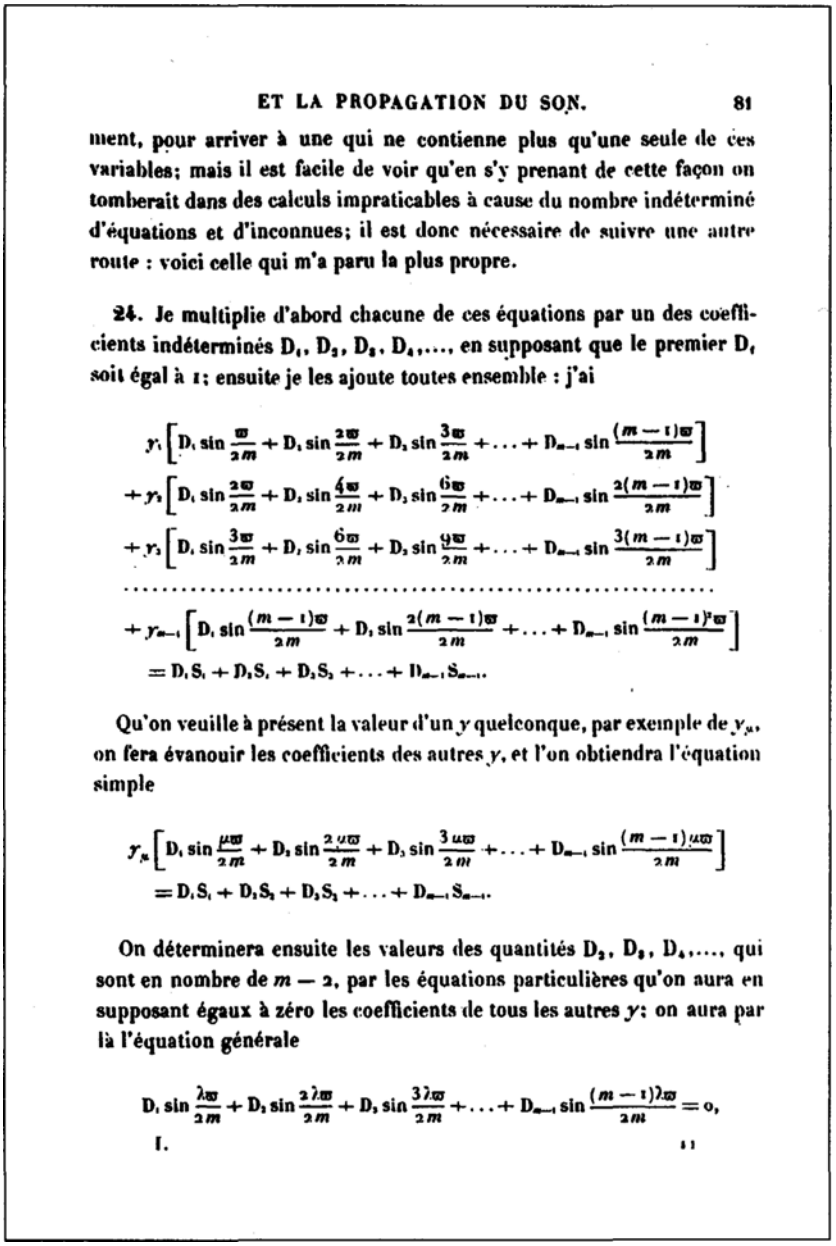
El segundo problema que anticipó las bases del análisis de Fourier, particularmente en su forma discreta, fue la determinación de las órbitas de los cuerpos celestes. Euler, Lagrange y Alexis Claude Clairaut hicieron contribuciones fundamentales al proponer que los datos obtenidos a partir de las observaciones podían ser aproximados por combinaciones lineales de funciones periódicas. El cálculo de los coeficientes de esas expansiones trigonométricas llevó al cálculo de lo que hoy llamamos transformada discreta de Fourier. En realidad, un artículo escrito en 1754 por Clairaut contiene la primera fórmula explícita para el cálculo de la transformada discreta de Fourier (TDF).

Clairaut y Lagrange habían estudiado el problema de ajustar datos astronómicos; como estos datos tienen patrones periódicos, era natural emplear funciones aproximadoras formadas por una suma ponderada de un número finito de funciones seno y coseno. La solución del cálculo de los pesos de las funciones trigonométricas condujo a una de las primeras expresiones de la transformada discreta de Fourier. Una página del trabajo de Lagrange publicado en 1759, que se muestra en la Fig. 2.1, contiene todos los ingredientes de una serie discreta de Fourier de senos; en la figura, el símbolo $\tilde{\omega}$ representa a π.

En junio de 1801 el astrónomo Zach publicó las posiciones orbitales de Ceres, un nuevo "pequeño planeta" que había sido descubierto por G. Piazzi en enero del mismo año. Desafortunadamente Piazzi sólo pudo observar 9 grados de la órbita antes que desapareciera detrás del sol. Zach publicó varias predicciones de su posición, incluyendo una calculada por Gauss que difería notoriamente de las demás. Cuando Ceres fue redescubierto por Zach en diciembre de 1801 estaba casi exactamente donde Gauss había predicho. Casi al mismo tiempo Gauss obtuvo los datos de posición del asteroide Pallas, que se muestran en la Tabla 2.1. La variable θ representa la ascensión en grados, y la variable x la declinación en minutos. La dupla (θ_n, x_n) representa un par de datos, donde $n = 0, \ldots, 11$. Para determinar la órbita es necesario encontrar una función continua de θ que pase por cada uno de los 12 pares de puntos con el menor error posible. Como los valores de x parecen tener una distribución periódica en función de θ, Gauss propuso una función de la forma

$$x = f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{5} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{360}\theta\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{360}\theta\right) \right] + a_6 \cos\left(\frac{2\pi 6}{360}\theta\right). \qquad (2.9)$$

Esta ecuación tiene doce coeficientes desconocidos (los a_k y los b_k) cada uno de los cuales multiplica a una función coseno o seno de un cierto período o frecuencia, denominados



ET LA PROPAGATION DU SON. 81

ment, pour arriver à une qui ne contienne plus qu'une seule de ces variables; mais il est facile de voir qu'en s'y prenant de cette façon on tomberait dans des calculs impraticables à cause du nombre indéterminé d'équations et d'inconnues; il est donc nécessaire de suivre une autre route : voici celle qui m'a paru la plus propre.

24. Je multiplie d'abord chacune de ces équations par un des coefficients indéterminés D_1, D_2, D_3, D_4,..., en supposant que le premier D_1 soit égal à 1; ensuite je les ajoute toutes ensemble : j'ai

$$y_1\left[D_1\sin\frac{\varpi}{2m}+D_2\sin\frac{2\varpi}{2m}+D_3\sin\frac{3\varpi}{2m}+\ldots+D_{m-1}\sin\frac{(m-1)\varpi}{2m}\right]$$
$$+y_2\left[D_1\sin\frac{2\varpi}{2m}+D_2\sin\frac{4\varpi}{2m}+D_3\sin\frac{6\varpi}{2m}+\ldots+D_{m-1}\sin\frac{2(m-1)\varpi}{2m}\right]$$
$$+y_3\left[D_1\sin\frac{3\varpi}{2m}+D_2\sin\frac{6\varpi}{2m}+D_3\sin\frac{9\varpi}{2m}+\ldots+D_{m-1}\sin\frac{3(m-1)\varpi}{2m}\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+y_{m-1}\left[D_1\sin\frac{(m-1)\varpi}{2m}+D_2\sin\frac{2(m-1)\varpi}{2m}+\ldots+D_{m-1}\sin\frac{(m-1)^2\varpi}{2m}\right]$$
$$=D_1S_1+D_2S_2+D_3S_3+\ldots+D_{m-1}S_{m-1}.$$

Qu'on veuille à présent la valeur d'un y quelconque, par exemple de y_μ, on fera évanouir les coefficients des autres y, et l'on obtiendra l'équation simple

$$y_\mu\left[D_1\sin\frac{\mu\varpi}{2m}+D_2\sin\frac{2\mu\varpi}{2m}+D_3\sin\frac{3\mu\varpi}{2m}+\ldots+D_{m-1}\sin\frac{(m-1)\mu\varpi}{2m}\right]$$
$$=D_1S_1+D_2S_2+D_3S_3+\ldots+D_{m-1}S_{m-1}.$$

On déterminera ensuite les valeurs des quantités D_2, D_3, D_4,..., qui sont en nombre de $m-2$, par les équations particulières qu'on aura en supposant égaux à zéro les coefficients de tous les autres y; on aura par là l'équation générale

$$D_1\sin\frac{\lambda\varpi}{2m}+D_2\sin\frac{2\lambda\varpi}{2m}+D_3\sin\frac{3\lambda\varpi}{2m}+\ldots+D_{m-1}\sin\frac{(m-1)\lambda\varpi}{2m}=0,$$

I. 11

Fig. 2.1. Página de *La Naturaleza y Propagación del Sonido*, escrito por Lagrange en 1759, donde trata la solución del problema de la cuerda vibrante, supuesta formada por $m-1$ partículas cuyos desplazamientos y_n son sumas de funciones senoidales de distinta frecuencia. Esta representación es escencialmente una transformada discreta de Fourier de senos.

modos. El período fundamental, representado por los términos con coeficientes a_1 y b_1, es de 360 grados; los modos con $k > 1$ poseen períodos menores, de $360/k$ grados. El coeficiente a_0 representa el valor medio de la función.

Para determinar los 12 coeficientes son necesarias 12 condiciones, que resultan de exigir que la función $f(\theta)$ pase por los datos X, es decir

$$x_n = f(\theta_n)$$

para $n = 1, \ldots, 12$. Esto conduce a un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 + \sum_{k=1}^{5} \left[a_k \cos\left(\tfrac{2\pi k}{360}\theta_1\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi k}{360}\theta_1\right)\right] + a_6 \cos\left(\tfrac{2\pi 6}{360}\theta_1\right) \\ &\vdots \\ x_{12} &= a_0 + \sum_{k=1}^{5} \left[a_k \cos\left(\tfrac{2\pi k}{360}\theta_{12}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi k}{360}\theta_{12}\right)\right] + a_6 \cos\left(\tfrac{2\pi 6}{360}\theta_{12}\right) \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{c},$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{12})', \qquad \mathbf{c} = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_5, b_5, a_6)',$$

y

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi 0}{360}\theta_1\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi 0}{360}\theta_1\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2\pi 5}{360}\theta_1\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi 5}{360}\theta_1\right) & \cos\left(\frac{2\pi 6}{360}\theta_1\right) \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi 0}{360}\theta_2\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi 0}{360}\theta_2\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2\pi 5}{360}\theta_2\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi 5}{360}\theta_2\right) & \cos\left(\frac{2\pi 6}{360}\theta_2\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi 0}{360}\theta_{12}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi 0}{360}\theta_{12}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2\pi 5}{360}\theta_{12}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi 5}{360}\theta_{12}\right) & \cos\left(\frac{2\pi 6}{360}\theta_{12}\right) \end{pmatrix}.$$

El vector de coeficientes $\mathbf{c}$ se puede calcular como $\mathbf{c} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$, y sus valores son

$$\begin{aligned} a_0 &= 780{,}6, & & \\ a_1 &= -411{,}0, & b_1 &= -720{,}2, \\ a_2 &= 43{,}4, & b_2 &= -2{,}2, \\ a_3 &= -4{,}3, & b_3 &= 5{,}5, \\ a_4 &= -1{,}1, & b_4 &= -1{,}0, \\ a_5 &= 0{,}3, & b_5 &= -0{,}3. \\ a_6 &= 0{,}1, & & \end{aligned}$$

En la Fig. 2.2 se comparan los datos, marcados "□", y la función $f(\cdot)$ graficada como una curva suave. Más allá de que la función pasa exactamente por los puntos que representan los datos medidos, lo importante es que los coeficientes a_k y b_k permiten otra interpretación: representan la "estructura" o "comportamiento frecuencial" de los datos. Los coeficientes de mayor valor corresponden al modo constante a_0 y al modo fundamental (a_1 y b_1). Los coeficientes de los modos de frecuencia mayor tienen magnitudes que apenas alcanzan el 10 % de la magnitud de los primeros, pero igual son necesarios para aproximar los datos con exactitud.

El sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas podía resolverse sin mayor esfuerzo aún en épocas de Gauss. Sin embargo, ya sea por buscar un atajo o sorprendido por las simetrías de las funciones seno y coseno, Gauss descubrió una forma de reordenar los coeficientes y las ecuaciones en tres subproblemas que se resolvían de manera más sencilla. Un pequeño cálculo contenido en su tratado sobre interpolación *Theoria Interpolationes Methodo Nova Tractata*, datado en 1805 pero publicado póstumamente en 1866, contiene la primera

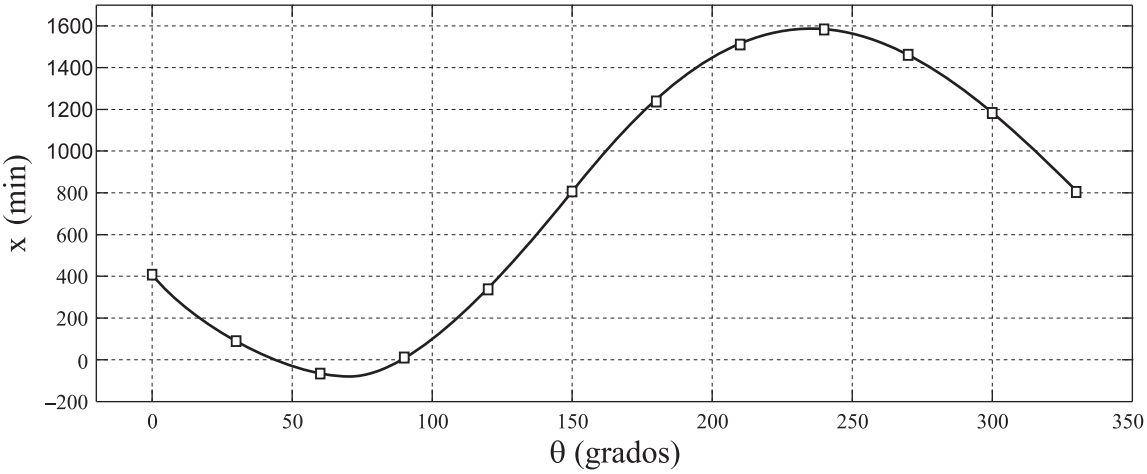


Fig. 2.2. Los doce puntos marcados "□" describen la posición del asteroide Pallas. La declinación x en minutos se grafica en función de la ascención θ en grados. Para aproximar los datos se utiliza una suma ponderada de doce funciones seno y coseno con diferentes períodos (curva continua). Los coeficientes de la suma ponderada se calculan con una transformada discreta de Fourier.

prueba clara e indudable del empleo de la transformada rápida de Fourier (más conocida por sus siglas en inglés FFT), cuya autoría se atribuye generalmente a Cooley y Tukey por su trabajo publicado en 1965. Es una ironía del destino que el trabajo de Gauss fuese citado en la enciclopedia matemática de Burkhardt *Encyklopädie der Matematischen Wissenchaften*, publicada en 1904, y nuevamente en 1977 en un trabajo de Goldstine, quien reprodujo estos resultados y mostró que el particionado ideado por Gauss es el corazón del método de cálculo de la moderna transformada rápida de Fourier. En 1985 Heideman, Johnson y Burrus reconstruyeron la historia completa de la FFT en una fascinante pieza de investigación, donde resaltan:

> *Los trabajos de Burkhardt y de Goldstine pasaron tan desapercibidos como el mismo trabajo de Gauss.*

Estos métodos serán estudiados con mucho mayor detalle en Capítulos posteriores.

2.1.3. Influencia en otras ramas de la ciencia

Las series de Fourier han permitido el desarrollo de nuevos campos en la matemática. Uno de los teoremas fundamentales del análisis funcional, el teorema de Riesz-Fischer, se demuestra usando series de Fourier. Se considera que este teorema es la base de la teoría de transformación de von Newman, que muestra la equivalencia entre la descripción ondulatoria y matricial de la mecánica cuántica. Otra teoría de transformación que perseguía los mismos objetivos fue desarrollada por P. A. M. Dirac, en la que juega un papel fundamental la "función" δ, cuyas propiedades inusuales (algunas de las cuales se estudian en la Seccion 2.3.4) no son consistentes con el análisis clásico (von Newman la describe como una "ficción" en lugar de una función). El estudio de tales objetos, denominados hoy en día *funciones generalizadas* o *distribuciones*, es una rama importante del análisis desarrollada por S. L. Sobolev y L. Schwartz. En algunos aspectos, los espacios de tales funciones son el dominio natural de las series de Fourier.

Un objeto matemático relacionado con las series es la *transformada*, introducida por Fourier al estudiar la conducción del calor en una barra de longitud infinita. Se ha aplicado en área tales como conducción de calor, óptica, procesamiento de señales y probabilidad, y recibió importantes contribuciones de N. Wiener, quien desarrolló lo que hoy en día se conoce como *análisis armónico generalizado*. También se ha vuelto más abstracta en una rama de la matemática conocida como *análisis armónico*, algunas de las principales figuras fueron E. Cartan, H. Weyl, y Harish-Chandra.

Las series de Fourier fueron ideadas para estudiar un problema físico; no sorprende entonces que hayan encontrado tantas aplicaciones. Como muestra esta breve reseña, los intentos para comprender el comportamiento de estas series sentaron las bases del análisis riguroso.

Una de las ramas más teóricas de la matemática es la teoría de números, y a primera vista parecería que no tiene puntos de contacto con las series de Fourier. Sin embargo, H. Weyl utilizó los resultados de convergencia de Féjer para probar uno de sus teoremas más relevantes.

Otra de las áreas de aplicación de las series de Fourier es la cristalografía. En 1985 H. A. Hauptman y J. Karle ganaron el premio Nobel de Química por desarrollar un nuevo método de cálculo de las constantes cristalográficas a partir de sus coeficientes de Fourier, que pueden inferirse por mediciones. Dos ingredientes fundamentales de su desarrollo son el teorema de Weyl comentado más arriba, y los teoremas de Toeplitz sobre las series de Fourier de funciones no negativas.

Recientemente, el desarrollo de métodos computacionales rápidos para el cálculo de una versión discreta de la transformada de Fourier, iniciado por J. Cooley y J. Tukey en 1965, aumentaron enormemente su rango de aplicación. La transformada rápida de Fourier (FFT) tuvo una difusión tan masiva que en 1993 se estimó que casi la mitad de todo el tiempo de cálculo de las supercomputadoras se gastaba calculando FFT, aún para tareas tales como la multiplicación de grandes números.

Otro desarrollo reciente que ha recibido gran atención es la teoría de onditas (wavelets). En este caso las funciones no se expanden en series de Fourier, sino utilizando otras bases ortogonales que son apropiadas para cálculos eficientes, lo que dio lugar a nuevos algoritmos utilizados en procesamiento de señales y para la solución numérica de ecuaciones.

2.2. Series de Fourier

Una señal $\tilde{x}(t)$ es periódica de período T_0 si $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + kT_0)$ para todo k entero. La expansión en *series de Fourier* consiste en expresarla como una suma infinita de términos seno y coseno, que habitualmente se escribe como

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} kt\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} kt\right). \tag{2.10}$$

Los coeficientes a_k y b_k representan las amplitudes de los términos coseno y seno, respectivamente. La cantidad $2\pi/T_0 \doteq \Omega_0$ es la *frecuencia angular fundamental* de la señal, y en consecuencia, la cantidad $k(2\pi/T_0) \doteq k\Omega_0$ representa el k-ésimo armónico de la frecuencia fundamental. Cada una de las funciones seno y coseno de la expresión (2.10)

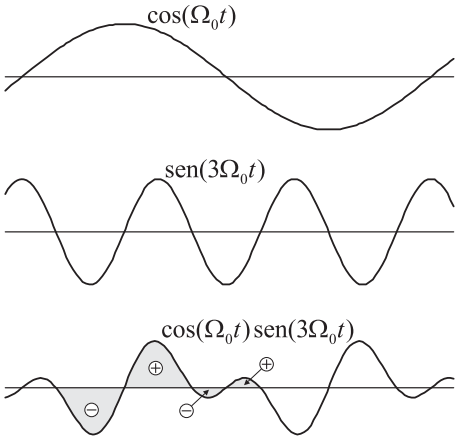


Fig. 2.3. Verificación gráfica de las ecuaciones (2.11) y (2.13), para $m \neq n$, y de la ecuación (2.12).

se denomina *función base*, y forman un conjunto *ortogonal* sobre el intervalo T_0, lo que significa que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\int_0^{T_0} \cos m\Omega_0 t \, \cos n\Omega_0 t \, dt = \begin{cases} T_0/2, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\int_0^{T_0} \cos m\Omega_0 t \, \operatorname{sen} n\Omega_0 t \, dt = 0, \quad \text{para todo } m,\ n, \tag{2.12}$$

$$\int_0^{T_0} \operatorname{sen} m\Omega_0 t \, \operatorname{sen} n\Omega_0 t \, dt = \begin{cases} T_0/2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{2.13}$$

Estas relaciones pueden verificarse analíticamente (calculando la integral) o bien estudiando gráficamente el producto de dos señales de diferentes frecuencias, tal como se ve en la Fig. 2.3: el producto de dos armónicos de distinta frecuencia, en el lapso de un período fundamental de la señal genera una función con idéntica área por encima y por debajo del eje de las abscisas, y por lo tanto el área neta (la integral) es nula.

Para determinar el coeficiente a_0, se integran ambos miembros de la ecuación (2.10) sobre un período completo:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}\,(t)\ dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_0\, dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) \right] dt = a_0 T_0,$$

ya que las integrales sobre un período de tiempo de los términos $\cos k\Omega_0 t$ y $\operatorname{sen} k\Omega_0 t$ son nulas. Se encuentra entonces que a_0 es el *valor medio* de la señal periódica $\tilde{x}\,(t)$ sobre un período, es decir

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}\,(t)\ dt. \tag{2.14}$$

Para determinar los coeficientes a_k se multiplican ambos miembros de la ecuación (2.10) por la función $\cos k\Omega_0 t$, y se integra sobre un período completo. Es indistinto integrar sobre el intervalo $-T_0/2 \leq t < T_0/2$ o sobre el intervalo $0 \leq t \leq T_0$, como se verá en la

Sección 2.4 (Ejemplo 2.14). Utilizando las identidades (2.11) y (2.12), se encuentra que

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\cos k\Omega_0 t\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

De manera análoga, aplicando la ecuación (2.13) puede determinarse que

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\,\mathrm{sen}\, k\Omega_0 t\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

2.2.1. Serie de Fourier con exponenciales complejas

La serie de Fourier de la ecuación (2.10) se puede escribir de una manera más compacta utilizando exponenciales complejas; basta sustituir en (2.10) los términos seno y coseno por su forma exponencial

$$\begin{aligned}\cos k\Omega_0 t &= \frac{1}{2}\left(e^{jk\Omega_0 t} + e^{-jk\Omega_0 t}\right),\\ \mathrm{sen}\, k\Omega_0 t &= \frac{1}{2j}\left(e^{jk\Omega_0 t} - e^{-jk\Omega_0 t}\right) = j\frac{1}{2}\left(-e^{jk\Omega_0 t} + e^{-jk\Omega_0 t}\right).\end{aligned}$$

Se obtiene entonces

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_k - jb_k}{2}\right)e^{jk\Omega_0 t} + \left(\frac{a_k + jb_k}{2}\right)e^{-jk\Omega_0 t}\right]. \tag{2.17}$$

Definiendo el número complejo c_k en base a a_k y b_k como

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k), & k > 0,\\ a_0, & k = 0,\\ \frac{1}{2}\left(a_{(-k)} + jb_{(-k)}\right), & k < 0,\end{cases} \tag{2.18}$$

se puede escribir la ecuación (2.17) de manera más simple:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}, \tag{2.19}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.20}$$

La expansión en series (2.19) se conoce como *serie de Fourier compleja*. Los coeficientes c_k dados por (2.20) son los *coeficientes complejos de Fourier*[3].

La ecuación (2.20) explica cómo calcular todos los coeficientes complejos de Fourier a partir de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ dada. Por ello se la suele denominar *ecuación de análisis*. Por otra parte, la ecuación (2.19) indica cómo reconstruir la señal $\tilde{x}(t)$ a partir de un conjunto de coeficientes c_k dados, y por tal motivo se la suele denominar *ecuación de síntesis*.

[3]La derivación de la ecuación (2.20) también puede obtenerse siguiendo un procedimiento similar al utlizado para la serie de senos y cosenos, sabiendo que

$$\int_0^{T_0} e^{jn\Omega_0 t}e^{-jm\Omega_0 t}dt = \int_0^{T_0} e^{j(n-m)\Omega_0 t}dt = \begin{cases} T_0, & n = m,\\ 0, & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Algunas propiedades

El análisis de (2.18) y (2.20) revela que:

1. Si la función $\tilde{x}(t)$ es *par* los coeficientes c_k son reales. En efecto, si $\tilde{x}(t)$ es par, esto es $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(-t)$, la serie (2.10) es una serie de cosenos (los coeficientes b_k son nulos). De (2.18) se observa que $c_k = c_{(-k)} \in \mathbb{R}$ $(k \geq 0)$.

2. Si $\tilde{x}(t)$ es *impar*, i.e. $\tilde{x}(t) = -\tilde{x}(-t)$, los coeficientes c_k son imaginarios. En este caso la serie (2.10) es una serie de senos (los coeficientes a_k son nulos), y de (2.18) se desprende que $c_k = -c_{(-k)} \in \mathbb{I}$ $(k \geq 0)$.

3. Si $\tilde{x}(t)$ es real
$$c_k = c_{-k}^*, \tag{2.21}$$
donde el símbolo "*" indica conjugación.

2.2.2. ¿Qué significan las frecuencias negativas?

De acuerdo la representación de la serie compleja (2.19), una señal periódica contiene todas la frecuencias (positivas y negativas) que están armónicamente relacionadas –en relación entera– con la frecuencia fundamental Ω_0. Según Haykin (1989), la presencia de las frecuencias negativas se debe a que el modelo matemático de la señal descrito por la ecuación (2.19) requiere el uso de frecuencias negativas. De hecho, esta representación utiliza una función base ($e^{jk\Omega_0 t}$) que toma valores complejos, lo que tampoco tiene significado físico. La razón de utilizar funciones que toman valores complejos y componentes de frecuencia negativas permite una descripción matemática compacta de una señal periódica, que es útil tanto para la teoría como para las aplicaciones.

Sin embargo, para Porat (1997) la existencia física de las frecuencias negativas se manifiesta, por ejemplo, al pensar en el giro de una rueda. Ciertamente la rotación en sentido horario es diferente del giro en sentido antihorario; de modo que si la velocidad angular de una rueda que gira en sentido antihorario se define como positiva, la rotación en sentido horario será negativo. La frecuencia angular de una señal juega el mismo papel que la velocidad angular de la rueda y puede tomar cualquiera de los dos signos. Para señales que toman valores reales, la propiedad de simetría conjugada $c_k = c_{(-k)}^*$ (2.21) de los coeficientes de la serie de Fourier –o de la transformada de Fourier $X(-f) = X^*(f)$ que se estudia en la Sección 2.5.10– oculta la existencia de frecuencias negativas. Sin embargo, para señales complejas las frecuencias positivas y negativas son diferentes. Por ejemplo, la señal compleja $e^{j2\pi f_0 t}$ con $f_0 > 0$ es distinta de la señal con $f_0 < 0$.

Las señales complejas también son motivo de controversia, debido a que tales señales no suelen encontrarse como entidades físicas. En realidad, sirven como representaciones matemáticas apropiadas para señales reales de cierto tipo. Un ejemplo familiar en de ingeniería eléctrica es la representación fasorial de tensiones y corrientes alternas utilizada en el análisis de estado estacionario de circuitos eléctricos. Una tensión real $v(t) = v_m \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ se representa con el fasor $V = v_m e^{j\phi_0}$; la relación entre $v(t)$ y V es $v(t) = \mathrm{Re}\{Ve^{j2\pi f_0 t}\}$. El fasor representa la señal alterna *real* con una señal constante *compleja* V.

2.2.3. Espectro discreto

La representación de una señal periódica por medio de una serie de Fourier es equivalente a resolver la señal en sus diferentes componentes armónicos. La expresión de la serie de Fourier compleja (2.19) indica que una señal periódica $\tilde{x}(t)$ de período T_0 tiene componentes de frecuencia 0, $\pm f_0$, $\pm 2f_0$, $\pm 3f_0$, ..., donde $f_0 = 1/T_0$ es la frecuencia fundamental. Mientras que $\tilde{x}(t)$ pertenece al dominio tiempo, donde t es una variable definida *continuamente* sobre un intervalo finito o infinito, su descripción en el dominio de la frecuencia consta de componentes c_k concentrados en las frecuencias $\pm k f_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. El gráfico de c_k en función de la frecuencia $f = k f_0 = k/T_0$ se denomina *espectro*[4] de la señal. Dada una señal $\tilde{x}(t)$ se puede determinar su espectro utilizando la ecuación de análisis (2.20); recíprocamente, si se especifica el espectro, es posible determinar la señal temporal asociada utilizando la ecuación de síntesis (2.19). Esto implica que la señal periódica $\tilde{x}(t)$ puede especificarse de dos formas equivalentes:

1. en el *dominio tiempo*, donde se representa $\tilde{x}(t)$ como una función de la variable real tiempo;
2. en el *dominio frecuencia*, donde la señal es descrita por su espectro en función de las frecuencias armónicas de f_0.

Ambas representaciones son aspectos diferentes de un mismo fenómeno, y no son independientes una de otra, sino que están fuertemente relacionadas entre sí por las ecuaciones de síntesis y análisis (2.19) y (2.20), respectivamente.

En general, el coeficiente de Fourier c_k es un número complejo, de modo que se puede expresar en la forma polar

$$c_k = |c_k| \, e^{j \arg(c_k)}.$$

El término $|c_k|$ define la amplitud de la k-ésima componente armónica de la señal $\tilde{x}(t)$, y la gráfica de $|c_k|$ versus la frecuencia permite obtener el *espectro de amplitud* discreto de la señal. El gráfico del $\arg(c_k)$ en función de la frecuencia se denomina *espectro de fase* discreto de la señal. Se dice que el espectro es *discreto* porque tanto la amplitud como la fase de c_k están concentrados en frecuencias que son múltiplos enteros (positivos y negativos) de la frecuencia fundamental f_0, y no están definidos para otros valores de frecuencia.

Las propiedades de la Sección 2.2.1 muestran que los coeficientes complejos de Fourier (2.20) de una señal $\tilde{x}(t)$ que toma valores reales verifican $c_{(-k)} = c_k^*$, donde c_k^* es el complejo conjugado de c_k. Es un hecho conocido que

$$\left| c_{(-k)} \right| = |c_k^*| = |c_k| \,,$$

y

$$\arg(c_{-k}) = \arg(c_k^*) = -\arg(c_k) \,.$$

Esto significa que el espectro de amplitud de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ que tome valores reales es *simétrico* (una función par de la frecuencia), y que el espectro de fase es *antisimétrico* (una función impar de la frecuencia) respecto de un eje vertical que pase por el origen.

[4] El término "espectro" proviene del latín *spectrum*, o imagen. Fue utilizado originariamente por Newton en sus investigaciones sobre la naturaleza de la luz.

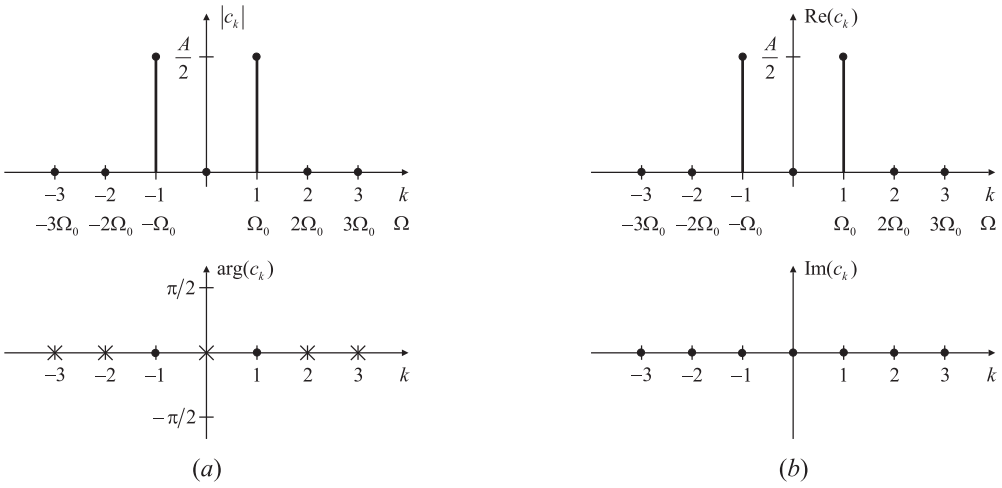


Fig. 2.4. Espectro discreto de $\tilde{x}(t) = A\cos\Omega_0 t$: módulo-fase (a) y parte real-parte imaginaria (b).

EJEMPLO **2.1. Serie de Fourier de una constante**
Si bien una señal constante $\tilde{x}(t) = A$, $-\infty \leq t \leq \infty$ no es una señal periódica típica, es fácil ver que cumple con la condición que $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + T_0)$ para todo t y cualquier T_0; es una señal periódica de *período arbitrario*. Los coeficientes de la serie de Fourier se calculan a partir de la ecuación (2.20), resultando para $k = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\, dt = A,$$

y para $k \neq 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{-jk\Omega_0} A\, e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} \\ &= \frac{A}{-jk\Omega_0 T_0}\left(e^{-jk\Omega_0 T_0/2} - e^{jk\Omega_0 T_0/2}\right) = \frac{A}{-jk\Omega_0 T_0}\left[-2j\,\mathrm{sen}\,(k\Omega_0 T_0/2)\right] \qquad (2.22) \\ &= \frac{A}{\pi k}\,\mathrm{sen}\, k\pi = 0. \end{aligned}$$

(En el desarrollo del último término de (2.22) se tuvo en cuenta que $\Omega_0 T_0 = 2\pi$). En consecuencia, el espectro discreto de una señal constante $\tilde{x}(t) = A$ consta de un único valor A para la frecuencia $f = 0$, asociada a $k = 0$. En este caso no tiene sentido hablar de los "armónicos superiores". □

EJEMPLO **2.2. Serie de Fourier de un coseno**
La función periódica $\tilde{x}(t) = A\cos\Omega_0 t$ se puede expresar, aplicando la fórmula de Euler, como

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= A\cos\Omega_0 t \\ &= \frac{A}{2}e^{-j\Omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\Omega_0 t}. \end{aligned}$$

Una comparación con la ecuación (2.19) revela que esta expresión coincide con la serie de Fourier; por lo tanto, los únicos coeficientes complejos no nulos son $c_{(-1)}$ y c_1, y su valor es

$$c_{(-1)} = c_1 = \frac{A}{2}.$$

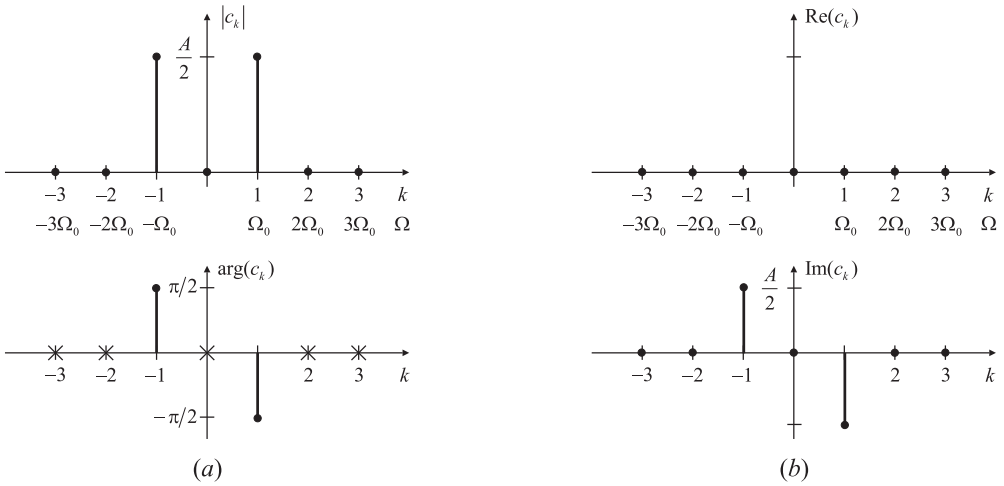


Fig. 2.5. Espectro discreto de $\tilde{x}(t) = A \operatorname{sen} \Omega_0 t$: módulo-fase (a) y parte real-parte imaginaria (b).

De modo que el espectro discreto de una señal tipo coseno es real, y sólo tiene dos valores no nulos, correspondientes a la primera armónica $k = \pm 1$, o bien a las frecuencias $\pm\Omega_0$, tal como se muestra en la Fig. 2.4, en donde el espectro discreto ha sido graficado en las dos formas típicas: módulo y fase o parte real-parte imaginaria. □

EJEMPLO **2.3. Serie de Fourier de una sinusoide**
De manera similar, puede determinarse el espectro de una señal $\tilde{x}(t) = A \operatorname{sen} \Omega_0 t$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \Omega_0 t &= -\frac{1}{2j} e^{-j\Omega_0 t} + \frac{1}{2j} e^{j\Omega_0 t} \\ &= \frac{j}{2} e^{-j\Omega_0 t} - \frac{j}{2} e^{j\Omega_0 t} \end{aligned}$$

se deduce que el espectro discreto consta solamente de dos valores no nulos, correspondientes a la primera armónica (frecuencia Ω_0), para $k = \pm 1$ y cuyos valores son

$$c_{(-1)} = j\frac{A}{2}, \quad c_1 = -j\frac{A}{2}.$$

Este espectro es imaginario puro, como muestra la Fig. 2.5 tanto en módulo y fase como en la forma parte real-parte imaginaria. □

EJEMPLO **2.4. Serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares**
La Fig. 2.6 muestra un tren periódico de pulsos rectangulares de amplitud A, duración τ y período T_0. Por conveniencia se elige que el origen del tiempo $(t = 0)$ coincida con el centro del pulso. Sobre un período $T_0/2 < t \leq T_0/2$, la señal puede describirse analíticamente como

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

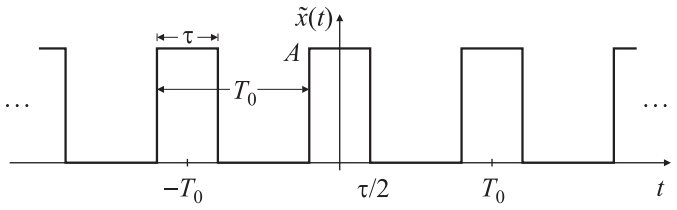


Fig. 2.6. Tren periódico de pulsos rectangulares de amplitud A, duración τ, y período T_0.

El espectro discreto de $\tilde{x}(t)$ formado por los coeficientes complejos c_k se calcula a partir de la ecuación (2.20). Se encuentra que[5]

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt \\ &= \frac{A}{\pi k}\,\text{sen}\left(\pi\tau\frac{k}{T_0}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

que, por motivos que serán evidentes más adelante, también puede escribirse como

$$c_k = A\frac{\tau}{T_0}\frac{\text{sen}\left(\pi\tau\frac{k}{T_0}\right)}{\pi\tau\frac{k}{T_0}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.23}$$

El espectro de amplitud $|c_k|$ y de fase $\arg(c_k)$ en función de los valores discretos de frecuencia $f_k = k/T_0$, para un *ciclo de trabajo* $\tau/T_0 = 1/5$, se ha graficado en la Fig. 2.7. Se observa que:

1. El *espaciado* entre las líneas del espectro de la Fig. 2.7 está determinado por la frecuencia fundamental f_0 de la señal, que es la inversa del período T_0, $f_0 = 1/T_0$.
2. La *envolvente* de la magnitud del espectro está determinada por la amplitud A y la duración τ del pulso, y sigue una forma tipo $(\text{sen}\, x)/x$. El valor del espectro a la frecuencia $f = 0$ es precisamente el valor medio o de continua de la señal $\tilde{x}(t)$, que vale $A\tau/T_0$ (como se deduce de la Fig. 2.6).
3. La envolvente del espectro de amplitud cruza por cero en frecuencias que son múltiplos de $1/\tau$ (el *ancho* del pulso), y que pueden o no coincidir con las líneas espectrales separadas k/T_0. En este caso particular, como $\tau/T_0 = 1/5$ los ceros de la envolvente del espectro se anulan para los múltiplos de 5 veces la frecuencia fundamental, como revela la Fig. 2.7(a).
4. El espectro de fase toma los valores 0 y $\pm\pi$, según sea el signo de $[\text{sen}\,(\pi\tau k/T_0)]\,/\,(\pi\tau k/T_0)$. La elección del signo de π (positivo o negativo) es irrelevante; en la figura se han elegido de forma de preservar la antisimetría. Debe resaltarse que el valor de la fase es *indefinido* para aquellos armónicos en donde se anula c_k (en este caso, los múltiplos de $5f_0$); esta indefinición en la fase se ha indicado con cruces en la Fig. 2.7(b). □

Observación: En la Fig. 2.4 y en la Fig. 2.5 el espectro se ha graficado en función de las armónicas de la *frecuencia angular* $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ (en radianes por segundo), mientras que en la Fig. 2.7 la variable independiente son los armónicos de la *frecuencia fundamental* $f_0 = 1/T_0$ (en ciclos por segundo). Aunque las dos representaciones son equivalentes, se verá más adelante que en ciertos casos una puede ser más conveniente que la otra pues algunas constantes de proporcionalidad toman valores unitarios.

[5] En muchas aplicaciones, el valor de la función en $t = \pm\tau/2$ es irrelevante, y las funciones

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 \le t \le \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \tilde{x}_2(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \tilde{x}_3(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

aunque matemáticamente diferentes, suelen ser representaciones equivalentes de un mismo fenómeno físico.

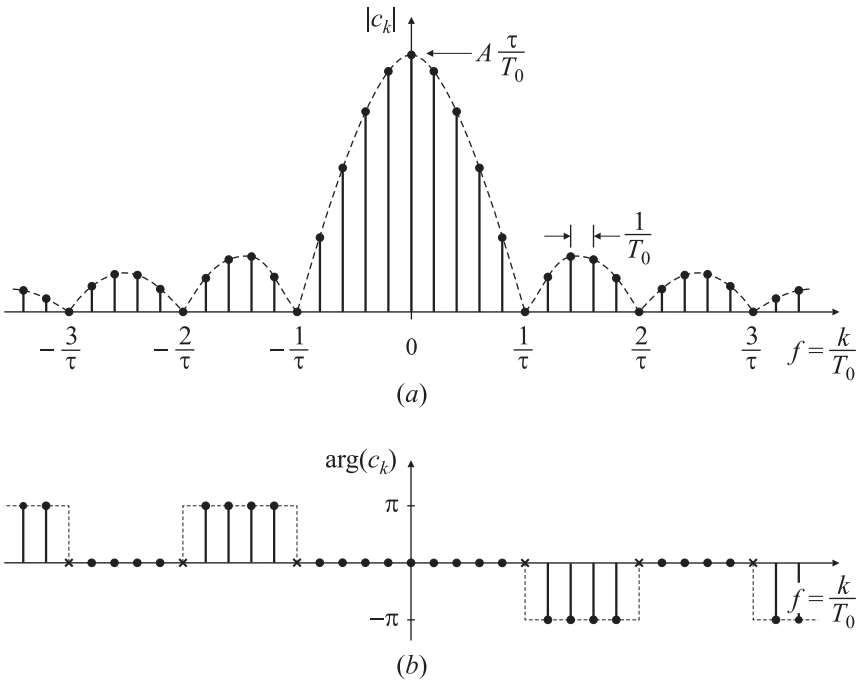


Fig. 2.7. Espectro discreto del tren periódico de pulsos rectangulares para un ciclo de trabajo $\tau/T_0 = 1/5$; amplitud (a) y fase (b).

2.2.4. La función sinc(·)

Esta función juega un papel muy importante en el análisis de Fourier, en el estudio de sistemas lineales e invariantes en el tiempo y en la teoría de comunicaciones en general. Se define la función $\text{sinc}(\cdot)$ como

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}\,\pi x}{\pi x}, \tag{2.24}$$

cuya grafica se representa en la Fig. 2.8. La función $\text{sinc}(x)$ alcanza su máximo en $x = 0$, donde vale 1 (puede probarse aplicando la regla de l'Hôpital), y tiende a cero cuando x tiende a $\pm\infty$, oscilando entre valores positivos y negativos, con una envolvente que decae según $1/x$. La función pasa por cero para los valores enteros de la variable x, es decir, cuando $x = \pm 1, \pm 2, \ldots$ etc. El tramo de la función entre dos ceros consecutivos se denomina *lóbulo*. El tramo comprendido entre $x = \pm 1$ es el *lóbulo principal*, y los demás son los *lóbulos laterales*.

Los extremos relativos ocurren en $x = x_k$ donde $d[\text{sinc}(x)]/dx = 0$, es decir cuando

$$\pi x_k \cos(\pi x_k) - \text{sen}(\pi x_k) = 0, \qquad \text{o bien} \qquad \tan(\pi x_k) - \pi x_k = 0.$$

Esta es una ecuación trascendente, y no puede resolverse de forma analítica. Los primeros extremos relativos y los valores de la función en estos puntos se listan en la Tabla 2.2. Esta tabla muestra que la abscisa del extremo y su módulo son aproximadamente $k + 1/2$, y $[\pi(n + 1/2)]^{-1}$ para el k-ésimo lóbulo, cuando $k \to \infty$.

Aunque no es trivial, puede demostrarse que el área encerrada por la función $\text{sinc}(\cdot)$ es finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x)\,dx = 1,$$

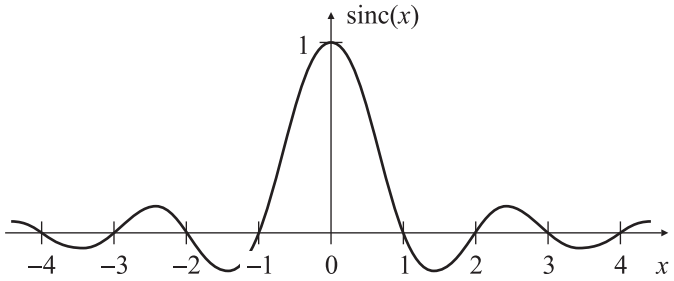


Fig. 2.8. La función sinc(x).

Tabla 2.2: Ubicación y valor de los extremos relativos.

abscisa x_k	0,000	1,430	2,459	3,471	4,477	5,482	6,484	7,486	8,488
sinc(x_k)	1,000	−0,217	0,128	−0,091	0,071	−0,058	0,049	−0,042	0,037

y en forma general,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(ax)dx = \frac{1}{|a|},$$

es decir, que la integral de la función converge. Esta igualdad se puede demostrar de manera sencilla aplicando los resultados de la Sección 2.5.12. Es interesante comparar el área de los distintos lóbulos. El área del lóbulo principal es

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \text{sinc}(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\,\text{Si}(\pi) = 1{,}17898,$$

donde $\text{Si}(x) = \int_0^x \text{sen}(\sigma)\, d\sigma$ es la función *seno integral*, cuyos valores están tabulados. Si A_k indica el área del k-ésimo lóbulo, se encuentra que

$$A_k = \frac{1}{\pi}\,\text{Si}[(k+1)\pi] - \frac{1}{\pi}\,\text{Si}(k\pi).$$

Algunos valores de las áreas de los lóbulos laterales expresados en porcentajes del área total se listan en la Tabla 2.3, y se representan en la Fig. 2.9(a). En la Fig. 2.9(b) se muestra que el área es muy aproximadamente inversamente proporcional al número de lóbulo.

Tabla 2.3: Área relativa de los lóbulos laterales.

lóbulo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
área (%)	118	−13,8	8,2	−5,8	4,5	−3,7	3,1	−2,7	2,4	−2,1

Si bien la función sinc$(\cdot)$ tiene área acotada, esto no ocurre para $|\text{sinc}(\cdot)|$, lo que se demuestra fácilmente separando el intervalo de integración en segmentos de longitud $1/a$ (la distancia entre ceros sucesivos del sinc), y notando que $|\text{sen}(\pi ax)/(\pi ax)| \geq$

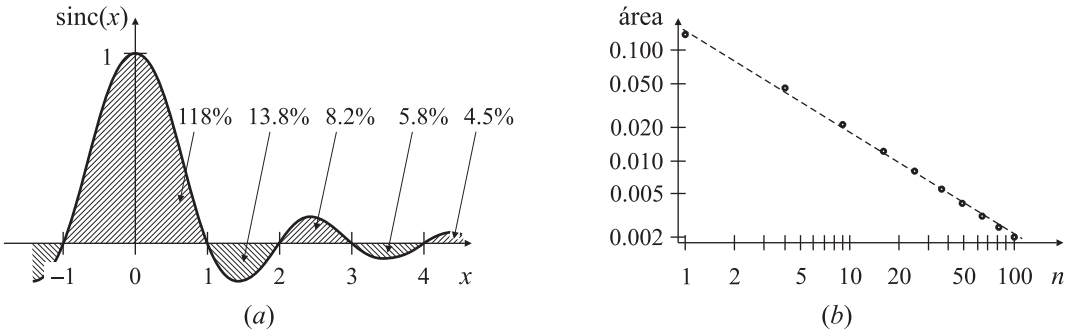


Fig. 2.9. Área de los lóbulos de la función sinc(·).

$|\text{sen}(\pi ax)/(\pi n)|$ para $(n-1)/a \leq x \leq n/a$. Entonces

$$\int_0^\infty \left|\frac{\text{sen}(\pi ax)}{\pi ax}\right| dx \geq \int_0^{1/a} \left|\frac{\text{sen}(\pi ax)}{\pi}\right| dx + \int_{1/a}^{2/a} \left|\frac{\text{sen}(\pi ax)}{2\pi}\right| dx + \cdots + \int_{(n-1)/a}^{n/a} \left|\frac{\text{sen}(\pi ax)}{n\pi}\right| dx + \cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{(n-1)/a}^{n/a} |\text{sen}(\pi ax)|\, dx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,|\cos(n\pi)| = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

La serie del último término, conocida como serie armónica, no converge. Por lo tanto,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} |\text{sinc}(ax)|\, dx \to \infty.$$

Utilizando la función sinc$(\cdot)$ la expresión (2.23) de los coeficientes c_k de la serie de Fourier del tren de pulsos rectangulares del Ejemplo 2.4 se puede escribir de manera más compacta como

$$c_k = A\frac{\tau}{T_0}\,\text{sinc}\left(\tau\frac{k}{T_0}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

2.3. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier juega un papel importante en muchas ramas de la ciencia. Si bien puede ser pensada de manera estrictamente funcional, como es común en el tratamiento de otras transformadas, también asume en muchos casos un significado físico tan preciso como el de las funciones de las cuales se deriva. Una forma de onda –óptica, eléctrica o acústica– y su espectro son apreciados igualmente como representación matemática o entidades medibles: un osciloscopio nos muestra la forma de onda, y un espectrómetro (un prisma!) o un analizador de espectro revela el espectro óptico o eléctrico. La apreciación acústica es más directa, ya que el oído "oye" el espectro. Las formas de onda y los espectros son transformadas unas de los otros; la transformada de Fourier es entonces una relación eminentemente física.

En muchas ramas de la ciencia se conocía la teoría de Fourier no en forma matemática, sino como un conjunto de proposiciones acerca de un fenómeno físico. Frecuentemente, la interpretación física de un teorema es un hecho experimentalmente comprobable, y esto permite al científico mantenerse alejado de lo que matemáticamente puede ser muy abstracto. El énfasis en la interpretación física permite tratar de manera natural con tópicos que normalmente se considerarían mas "avanzados".

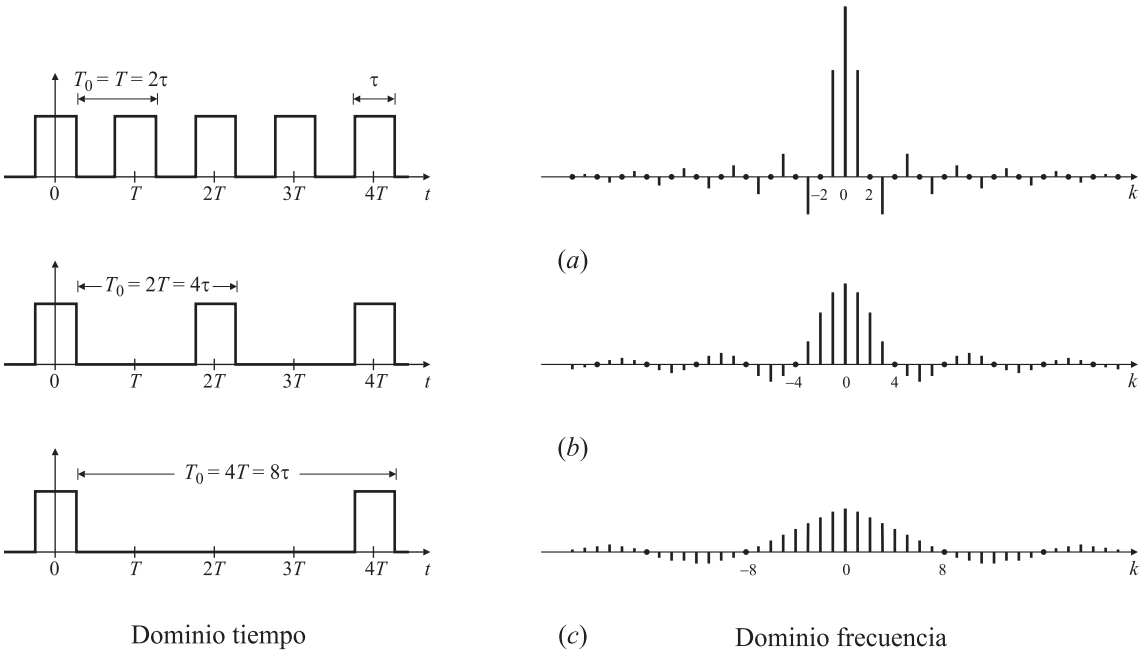


Fig. 2.10. Ondas cuadradas de distintos períodos y sus coeficientes de Fourier en función del número de armónico. $T_0 = 2\tau$ (a); $T_0 = 4\tau$ (b); $T_0 = 8\tau$ (c).

2.3.1. Desarrollo de la transformada de Fourier

En la Sección 2.2 se estudió cómo una señal periódica puede representarse como una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas. Estos resultados pueden extenderse para desarrollar una representación de señales *aperiódicas* como combinación lineal de exponenciales complejas. La introducción de esta representación es una de las más importantes contribuciones de Fourier, y el desarrollo que se presenta aquí es muy similar al que él desarrolló en su trabajo original.

Los coeficientes complejos de la serie de Fourier de la onda periódica cuadrada del Ejemplo 2.4 están dados por la expresión (2.23), repetida aquí por comodidad,

$$c_k = A\frac{\tau}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\tau\frac{k}{T_0}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \tag{2.25}$$

donde T_0 es el período de la señal, y τ el tiempo durante el cual la señal toma el valor A. En la Fig. 2.10 se grafican los valores de estos coeficientes, para un valor fijo de τ y distintos valores del período T_0, en función del número de armónica k. En la Fig. 2.11 se ha repetido esta figura con algunas modificaciones. En primer lugar, se ha graficado $T_0 c_k$ en lugar de c_k, y se ha modificado el eje de abscisas, graficando los coeficientes en función de la *frecuencia* $f_k = k/T_0$ de los armónicos, y no en función del número k de armónico. La importancia de estos cambios puede apreciarse examinando la ecuación (2.25). Multiplicando c_k por T_0 se obtiene

$$T_0 c_k = A\tau\,\mathrm{sinc}\left(\tau\frac{k}{T_0}\right) = A\tau\,\frac{\mathrm{sen}\,(\pi\tau f)}{\pi\tau f}\bigg|_{f=k/T_0}.$$

Pensando en f como una variable continua, la función $A\tau\mathrm{sen}(\pi\tau f)\,/\,(\pi\tau f)$ representa la envolvente de los coeficientes $T_0 c_k$, y estos coeficientes son simplemente muestras

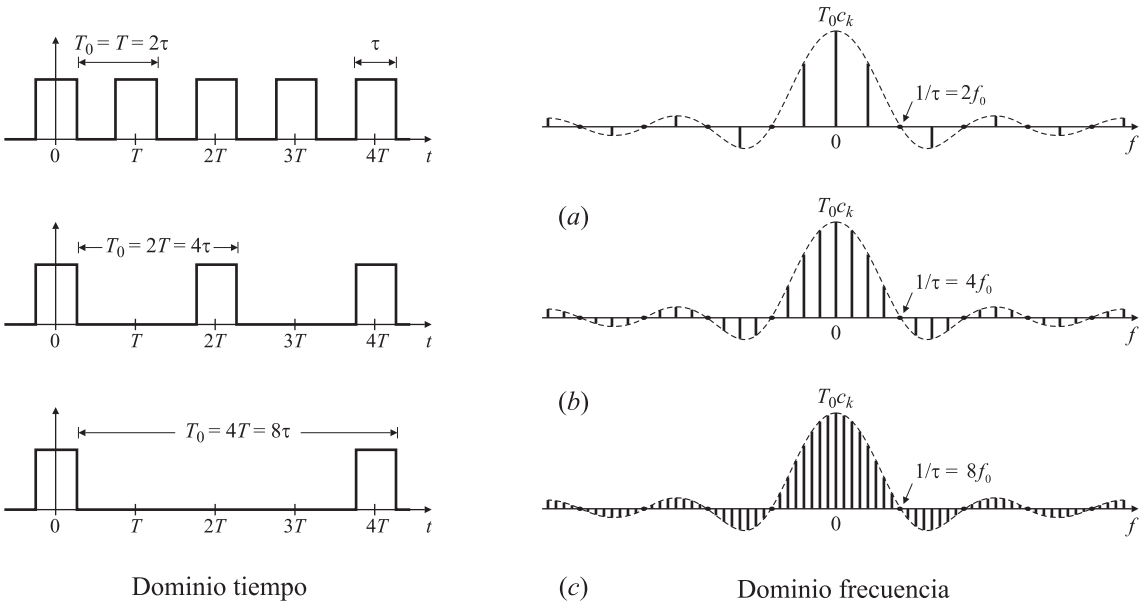


Fig. 2.11. Ondas cuadradas de distintos períodos y sus coeficientes de Fourier (escalados por el período T_0) en función de la frecuencia $f_k = k/T_0$. $T_0 = 2\tau$ (a); $T_0 = 4\tau$ (b); $T_0 = 8\tau$ (c).

equiespaciadas de esta envolvente. Además, si τ (el "tiempo de encendido") se deja fijo, la envolvente de $T_0 c_k$ *es independiente de* T_0. Sin embargo, tal como se observa en la Fig. 2.11, a medida que aumenta el espaciado entre los pulsos (T_0 crece o disminuye f_0) la envolvente se "muestrea" más finamente. Cuando T_0 se hace arbitrariamente grande la onda periódica cuadrada original se *parece* a un pulso: en el dominio tiempo se tiene una señal aperiódica que coincide con un período de la onda cuadrada. Además los coeficientes de la serie de Fourier (multiplicados por T_0) son muestras cada vez más próximas entre sí de la envolvente, de manera que, en un sentido que se especificará en seguida, el conjunto de coeficientes de la serie de Fourier tiende a la función envolvente cuando $T_0 \to \infty$.

Este ejemplo ilustra la idea básica del desarrollo de Fourier para representar señales aperiódicas. Específicamente, se piensa en una señal aperiódica como el límite de una señal periódica cuando el período se hace arbitrariamente grande, y se examina el comportamiento en el límite de la representación en series de Fourier. Para tal fin se considera una señal aperiódica $x(t)$ cualquiera que tenga duración finita[6]; esto es, que para algún número T, $x(t) = 0$ para $|t| > T$, como se muestra en la Fig. 2.12(a). A partir de esta señal aperiódica se puede construir una señal periódica $\tilde{x}(t)$ –de la cual $x(t)$ sea un período– replicando $x(t)$ cada T_0 unidades de tiempo como se observa en la Fig. 2.12(b). A medida que se incrementa T_0, $\tilde{x}(t)$ se asemeja a $x(t)$ sobre un intervalo de tiempo mayor y en el límite, cuando $T_0 \to \infty$, ambas señales son idénticas para cualquier valor finito de t.

Es interesante examinar este efecto sobre la representación en serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$ (la

[6]Esto no es estrictamente necesario; basta que sea de "duración finita" en el sentido que se define en la Sección 2.8.2. La hipótesis adoptada aquí no cambia los resultados fundamentales pero facilita la demostración.

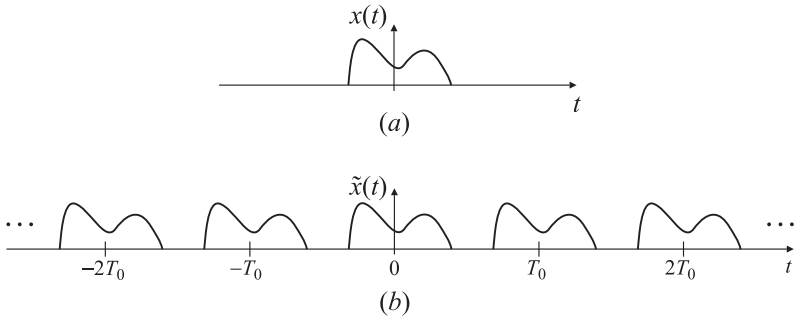


Fig. 2.12. (a) Señal aperiódica $h\,(t)$; (b) señal periódica $\tilde{h}\,(t)$ construida a partir de $h\,(t)$.

señal periódica). Reescribiendo por conveniencia las ecuaciones (2.20) y (2.19), se tiene

$$\tilde{x}\,(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}, \tag{2.26}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}\,(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.27}$$

Ya que $\tilde{x}\,(t) = x\,(t)$ cuando $|t| < T_0/2$, y como $x\,(t) = 0$ fuera de este intervalo, (2.27) puede reescribirse como

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}\,(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x\,(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt. \tag{2.28}$$

Si se define $X\,(f)$ como la envolvente de $T_0 c_k$ reemplazando la variable discreta kf_0 por una variable continua f, se tiene

$$X\,(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt, \tag{2.29}$$

y entonces los coeficientes c_k resultan

$$c_k = \frac{1}{T_0} X\,(k f_0)\,. \tag{2.30}$$

Combinando (2.30) con (2.26), $\tilde{x}\,(t)$ puede escribirse en función de $X\,(f)$ como

$$\begin{aligned} \tilde{x}\,(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\,(k f_0)\, e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\,(k f_0)\, e^{j2\pi k f_0 t} f_0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

ya que $f_0 = 1/T_0$. Cuando $T_0 \to \infty$, $\tilde{x}\,(t)$ se aproxima a $x\,(t)$, y por lo tanto, (2.31) es una representación de $x\,(t)$. Además, $f_0 \to 0$ cuando $T_0 \to \infty$, y entonces el miembro derecho de (2.31) se convierte en una integral. Esto puede apreciarse interpretando gráficamente la ecuación (2.31) como se muestra en la Fig. 2.13. Cada término de la sumatoria es el área de un rectángulo de altura $X\,(k f_0)\, e^{jk2\pi f_0 t}$ y ancho f_0 (como t no es una "variable" en este análisis se está calculando el valor de $\tilde{x}\,(\cdot)$ para un valor determinado de su argumento).

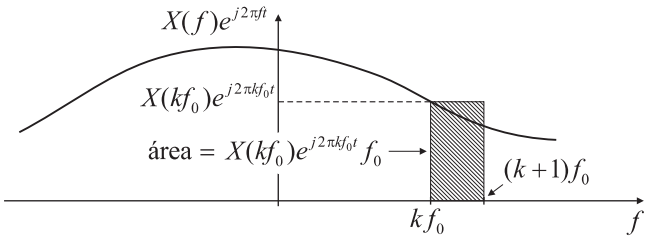


Fig. 2.13. Interpretación gráfica de la ecuación (2.31).

De acuerdo con la interpretación de Riemann de la integral, cuando $f_0 \to 0$ la sumatoria de (2.31) converge, por definición, a la integral de $X(f)\,e^{j2\pi ft}$. De acuerdo entonces al hecho que $\tilde{x}(t) \to x(t)$ cuando $T_0 \to \infty$, las ecuaciones (2.31) y (2.29) se convierten en

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,e^{j2\pi ft} df, \tag{2.32}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt, \tag{2.33}$$

respectivamente. Las ecuaciones (2.32) y (2.33) se denominan *par transformado de Fourier*; la ecuación (2.33) se denomina *transformada de Fourier* de $x(t)$, o ecuación de *análisis*, mientras que la ecuación (2.32) es la transformada inversa de Fourier de $X(f)$, o también ecuación de *síntesis*. La ecuación de síntesis (2.32) juega un papel similar al de la ecuación (2.19) para las señales periódicas, ya que ambas tratan de la descomposición de una señal como una combinación lineal de exponenciales complejas. Para señales periódicas estas exponenciales tienen amplitud c_k dadas por (2.20) o (2.27), y sus frecuencias toman valores sobre un conjunto discreto kf_0, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ armónicamente relacionadas entre sí. Para el caso de las funciones aperiódicas, las exponenciales complejas ocurren para un continuo de frecuencias, y de acuerdo a la ecuación de síntesis (2.32) tienen "amplitud" $X(f)\,df$. En analogía con la terminología empleada para los coeficientes de la serie de Fourier de una señal periódica, la transformada $X(f)$ de la señal aperiódica $x(t)$ se denomina el *espectro* de $x(t)$, ya que brinda información referida a cómo se combinan ondas sinusoidales de distinta frecuencia para componer la señal $x(t)$.

2.3.2. Transformada directa e inversa de Fourier

Sea $x(\cdot)$ una función real o compleja de una variable real s. A veces, $x(\cdot)$ puede no estar disponible explícitamente como función, sino como un conjunto de valores discretos. Sin embargo, para fijar ideas se asume que $x(\cdot)$ está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y que tiene algunas propiedades, entre ellas las de ser absolutamente integrable sobre la línea real. Esto significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(s)|\,ds < \infty. \tag{2.34}$$

Si éste es el caso se puede definir una función $X(\cdot)$ que evaluada en el punto f toma el valor

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,e^{-j2\pi fs}\,ds, \qquad -\infty < f < \infty \tag{2.35}$$

donde $j = \sqrt{-1}$. Si se satisface (2.34), entonces $X(f)$ está bien definida, ya que

$$|X(f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\, e^{-j2\pi fs}\, ds \right| < \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(s)\, e^{-j2\pi fs} \right| ds = \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)|\, ds < \infty \qquad (2.36)$$

pues $\left|e^{-j2\pi fs}\right| = 1$. La función $X(f)$ es la *transformada de Fourier* de $x(\cdot)$, y queda definida de manera única por (2.35). Se dice que la función $X(\cdot)$ está definida en el *dominio frecuencial* o *dominio transformado*, mientras que la función $x(\cdot)$ original está definida en el dominio espacial si s es una coordenada espacial (con dimensiones de longitud), o en el dominio temporal si $x(\cdot)$ es una función dependiente del tiempo $(s = t)$, lo que será el caso habitual. De importancia fundamental es el hecho que también existe una relación inversa entre $x(\cdot)$ y $X(\cdot)$, dada por

$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi fs} df, \qquad -\infty < f < \infty. \qquad (2.37)$$

Esta relación permite obtener $x(\cdot)$ como la *transformada inversa de Fourier* de $X(\cdot)$. En la ecuación (2.37) f es una variable "muda", que toma todos los valores desde $-\infty$ a ∞ a medida que se calcula la integral; la verdadera variable es s. Lo contrario ocurre en la ecuación (2.35), donde s es la variable muda de integración, y f la variable de la función.

La transformada de Fourier tiene una interpretación física. El **kernel** o **núcleo** de la transformada de Fourier es el término $e^{-j2\pi fs}$ (el de la transformada inversa es $e^{j2\pi fs}$); aplicando la fórmula de Euler estos núcleos pueden escribirse como

$$e^{\pm j2\pi fs} = \cos(2\pi fs) \pm j \operatorname{sen}(2\pi fs).$$

Para el caso de la ecuación (2.35) y para cada valor fijo de f, el núcleo consiste de ondas (senos y cosenos) con un período o longitud de onda $T = 1/f$, medido en las unidades de s (ya sean longitud o tiempo). Estas ondas se llaman *modos*. Análogamente, los modos correspondientes a un valor fijo de f tienen una frecuencia de f períodos por unidad de longitud, o ciclos por unidad de tiempo: la combinación ciclos por segundo se llama Hertz, abreviado Hz.

La transformada inversa de Fourier (2.37) puede verse como una "receta" para recuperar el valor de la función $x(\cdot)$ en un punto t a partir de una combinación de modos de todas las frecuencias $-\infty < f < \infty$. El modo asociado con una frecuencia particular f tiene un cierto "peso" en esta combinación y ese peso está dado por $X(f)$. Este proceso de "construir" una función a partir de sus modos recibe frecuentemente el nombre de *síntesis*: dados los pesos de los modos $X(f)$, se puede generar la función $x(\cdot)$ para cada valor de t que se desee. El conjunto completo de valores de $X(\cdot)$ se denomina el *espectro* de $x(\cdot)$, ya que expresa el contenido frecuencial completo de la función o señal $x(\cdot)$. Igualmente importante es el proceso opuesto, denominado *análisis*: dada la función $x(\cdot)$ se puede encontrar qué "cantidad" $X(f)$ del modo de frecuencia f está presente en $x(\cdot)$, aplicando la transformada directa (2.35).

EJEMPLO **2.5. Transformada directa**
La función temporal (exponencial decreciente)

$$x(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad (2.38)$$

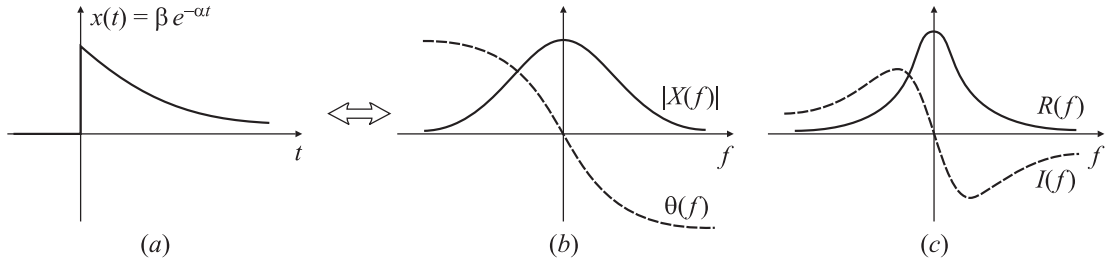


Fig. 2.14. Señal $x(t) = \beta e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t > 0$ (a). Representación módulo-fase (b) y parte real-imaginaria (c) de la transformada de Fourier.

con $\alpha > 0$, cumple con (2.34), es decir, es absolutamente integrable. De la ecuación (2.35),

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} \beta e^{-(\alpha + 2\pi f)t} dt = \frac{-\beta}{\alpha + j2\pi f} e^{-(\alpha + j2\pi f)t}\Big|_0^{\infty}$$

y entonces,

$$X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}.$$

La expresión de $X(f)$ es una función compleja de f; es interesante hallar las expresiones de la parte real y la parte imaginaria, $X(f) = R(f) + jI(f)$

$$\begin{aligned} R(f) &= \mathrm{Re}\{X(f)\} = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}, \\ I(f) &= \mathrm{Im}\{X(f)\} = \frac{-2\pi f\, \beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}, \end{aligned}$$

y también del módulo y la fase, $X(f) = |X(f)|\, e^{j\theta(f)}$,

$$|X(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}, \qquad \theta(f) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\pi f}{\alpha}\right).$$

Cada una de estas funciones está graficada en la Fig. 2.14, ilustrando las diversas formas de presentar la transformada de Fourier. □

Para probar la validez de la ecuación de síntesis (2.37) se puede determinar la función $x(t)$ del ejemplo anterior a partir de su transformada de Fourier $X(f)$.

EJEMPLO **2.6. Transformada inversa**
Dado el espectro

$$X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f} = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j\frac{2\pi f\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2},$$

calculado en el ejemplo anterior, la transformada inversa $x(t)$ se obtiene aplicando la ecuación de síntesis (2.37),

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j\frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}\right] e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta \left[\frac{\alpha\cos(2\pi f t)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + \frac{2\pi f \sin(2\pi f t)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}\right] df + j\int_{-\infty}^{\infty} \beta \left[\frac{\alpha\sin(2\pi f t)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - \frac{2\pi f\cos(2\pi f t)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}\right] df. \end{aligned}$$

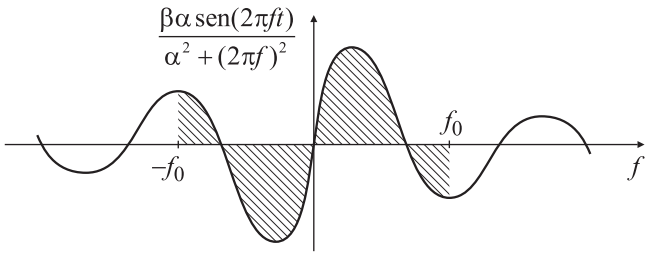


Fig. 2.15. Integración de una función impar.

La segunda integral es nula porque cada término del integrando es una función impar. La Fig. 2.15 muestra el primer integrando de la segunda integral y permite una interpretación gráfica. Como la función es impar, $g(t) = -g(-t)$, y en consecuencia, el área bajo la función desde $-f_0$ hasta f_0 es nula. En el límite, a medida que $f \to \infty$ la integral de la función es nula[7]. Bajo estas consideraciones,

$$x(t) = \frac{\beta\alpha}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi ft)}{(\alpha/2\pi)^2+f^2}df + \frac{2\pi\beta}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\sin(2\pi ft)}{(\alpha/2\pi)^2+f^2}df.$$

De una tabla de integrales, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi}{b}e^{-ab}, \quad a>0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{b^2+x^2}dx = \pi e^{-ab}, \quad a>0,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\beta\alpha}{(2\pi)^2}\left[\frac{\pi}{\alpha/2\pi}e^{-(2\pi t)(\alpha/2\pi)}\right] + \frac{2\pi\beta}{(2\pi)^2}\left[\pi e^{-(2\pi t)(\alpha/2\pi)}\right] \\ &= \frac{\beta}{2}e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{2}e^{-\alpha t} \\ &= \beta e^{-\alpha t}, \quad t>0. \end{aligned}$$

□

En general, si las funciones $x(\cdot)$ y $X(\cdot)$ están relacionadas por las ecuaciones (2.35) y (2.37), se dice que las dos funciones forman un *par transformado de Fourier*, y esta relación se indica

$$x(\cdot) \Leftrightarrow X(\cdot).$$

Otra notación usual es

$$X(\cdot) = \mathcal{F}\{x(\cdot)\} \qquad \text{y} \qquad x(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}.$$

[7] En realidad, cualquier integral de $-\infty$ a $+\infty$ es en realidad un límite definido por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \lim_{T_1,T_2\to\infty}\int_{-T_1}^{+T_2} x(t)\,dt \tag{2.39}$$

donde T_1 y T_2 tienden a infinito *independientemente* uno del otro. El *valor principal de Cauchy* (VPC) de una integral es un límite más específico, definido como

$$VPC\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt\right] = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{+T} x(t)\,dt. \tag{2.40}$$

Mientras que (2.39) implica (2.40), es posible que exista (2.40) pero no (2.39): por ejemplo, la integral (2.40) de todas las funciones impares es nula, pero la integral (2.39) de estas funciones puede no existir. Para las funciones que satisfacen la CONDICIÓN 1 (véase la Sección 2.3.3) las integrales de Fourier pueden interpretarse en el sentido de (2.39). En cambio, para las funciones que satisfacen la CONDICIÓN 2 las transformadas se definen por el valor principal de Cauchy (2.40) de la integral.

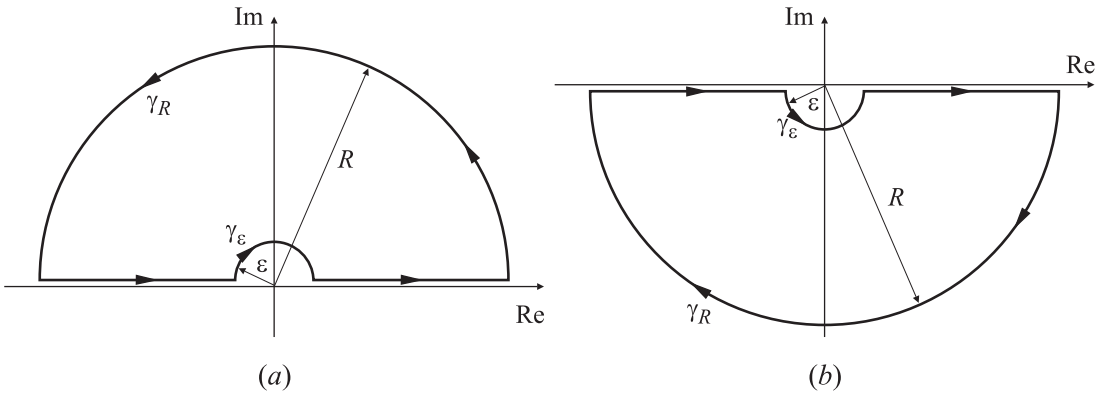


Fig. 2.16. Contorno de integración para el cálculo de la transformada del Ejemplo 2.7 para $f < 0$ (a) y para $f > 0$ (b).

Comentario sobre el cálculo de las integrales impropias

El cálculo de la transformada de Fourier implica evaluar integrales impropias, y en algunas ocasiones se pueden calcular más fácilmente aplicando la teoría de Cauchy de las funciones analíticas. La idea es aplicar el cálculo de integrales complejas sobre curvas cerradas para evaluar integrales reales sobre la recta real.

Si $f(x)$ es una función de una variable real x, la *extensión analítica* de $f(\,\cdot\,)$ es la función $f(z)$, donde $z = x + jy \in \mathbb{C}$, tal que $f(x) = f(z)|_{\mathrm{Im}\{z\}=0}$. En particular, son de utilidad los lemas de Jordan, dos de los cuales son:

1. Si $f(z)$ es una función analítica en todo punto del semiplano $\mathrm{Im}\{z\} \geq 0$, salvo en un número finito de puntos z_k, $k = 1, \ldots, n$, que **no** están sobre el eje real, si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ para $z \in \mathrm{Im}\{z\} > 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jx}dx = j2\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k}\{f(z)e^{iz}\},$$

   donde la sumatoria se extiende sobre todos los puntos singulares de $f(z)$ contenidos en $\mathrm{Im}\{z\} > 0$.

2. Si la función $f(z)$ posee puntos singulares sobre el eje real, por ejemplo en $z = z_0$, la contribución del residuo de ese polo es sólo $j\pi$.

En el caso de la transformada o la antitransformada, el integrando es de la forma $e^{\pm j\alpha x}$, donde α es una constante. Dependiendo de su signo, la región de analiticidad sera $\mathrm{Im}\{z\} > 0$ si $\pm\alpha > 0$, o $\mathrm{Im}\{z\} < 0$ si $\pm\alpha < 0$, como se detalla en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO **2.7. Transformada de Fourier de** $x(t) = 1/t$
Aunque la función $x(t) = 1/t$ es singular en el origen, aún así puede calcularse la transformada de Fourier considerando

$$X(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{t}e^{-j2\pi ft}\,dt\right).$$

Esta integral se puede calcular como la integral de contorno

$$\int_C \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz,$$

donde el contorno de integración C es el borde del semidisco de radio R con una pequeña indentación de radio ε en el origen, donde R se hace tender a infinito, y ε a cero. Bajo estas condiciones, la integral coincide con la transformada que se desea calcular si $\mathrm{Im}\{z\} = 0$. En este caso, la función $f(z) = 1/z$ tiene un polo en el eje real, en $z = 0$.

El semiplano donde yace C se elige de modo que el integrando tienda a cero cuando $R \to \infty$, y esto impone condiciones sobre f, de manera de satisfacer las condiciones de los lemas de Jordan. En cualquier caso la región de integración debe elegirse de modo que $\left|e^{-j2\pi fz}\right| \to 0$ cuando $R \to \infty$. Si $f > 0$, esta región está dada por $\mathrm{Im}\{z\} < 0$, y si $f < 0$, la región de analiticidad es $\mathrm{Im}\{z\} > 0$.

Para una curva C contenida en la región $\mathrm{Im}\{z\} > 0$, que corresponde a $f < 0$, donde C está formada por la unión de las curvas $\gamma_R = R\, e^{j\theta}, 0 \le \theta \le \pi$, el segmento de recta $[-R, -\varepsilon]$, la curva $\gamma_\varepsilon = \varepsilon e^{j\theta}$, con $-\pi \le \theta \le 0$, y el segmento de recta $[\varepsilon, R]$, como se muestra en Fig. 2.16(a), la integral de contorno es nula porque la curva no encierra ningún polo. Se tiene entonces que

$$0 = \int_C \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft}\, dt + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft}\, dt + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz,$$

donde se efectuó el cambio de variable $z \mapsto t = \mathrm{Re}\{z\}$ sobre las rectas.

Sobre la curva γ_R se hace la sustitución $z \mapsto Re^{j\theta}$, $dz = jRe^{j\theta} d\theta$, resultando

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz = \int_0^\pi \frac{1}{R\, e^{j\theta}} e^{-j2\pi f(R\, e^{j\theta})}\, jR\, e^{j\theta} d\theta = j \int_0^\pi e^{-j2\pi f\, R(\cos\theta + j \,\mathrm{sen}\,\theta)}\, d\theta.$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{R\to+\infty} \left|e^{-j2\pi f\, R(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)}\right| = \lim_{R\to+\infty} \left|e^{f\, R\,\mathrm{sen}\,\theta}\right|$$

Como para esta región $\mathrm{sen}\,\theta \ge 0$, la única manera que el integrando se anule para $R \to \infty$ es que $f < 0$. Entonces,

$$\lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz = 0 \quad \text{para } f < 0.$$

Sobre la curva γ_ε se tiene que $z = \varepsilon e^{j\theta}$, $dz = j\varepsilon e^{j\theta} d\theta$, y por lo tanto,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}} e^{-j2\pi f(\varepsilon e^{j\theta})}\, j\varepsilon e^{j\theta}(-d\theta) = -j \int_{-\pi}^0 e^{-j2\pi f\varepsilon(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)}\, d\theta.$$

El signo del $d\theta$ tiene en cuenta que la curva γ_ε está orientada en sentido *horario*. Cuando $\varepsilon \to 0$, el argumento de la integral tiende a 1, y entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz = -j\pi.$$

A partir de estos resultados se encuentra que

$$0 = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft}\, dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft}\, dt \right)}_{X(f)} - j\pi,$$

de modo que

$$X(f) = j\pi \quad \text{si } f < 0.$$

Si $f > 0$, el contorno de integración que se elige es el que se representa en la Fig. 2.16(b). El desarrollo es idéntico, con un par de salvedades:

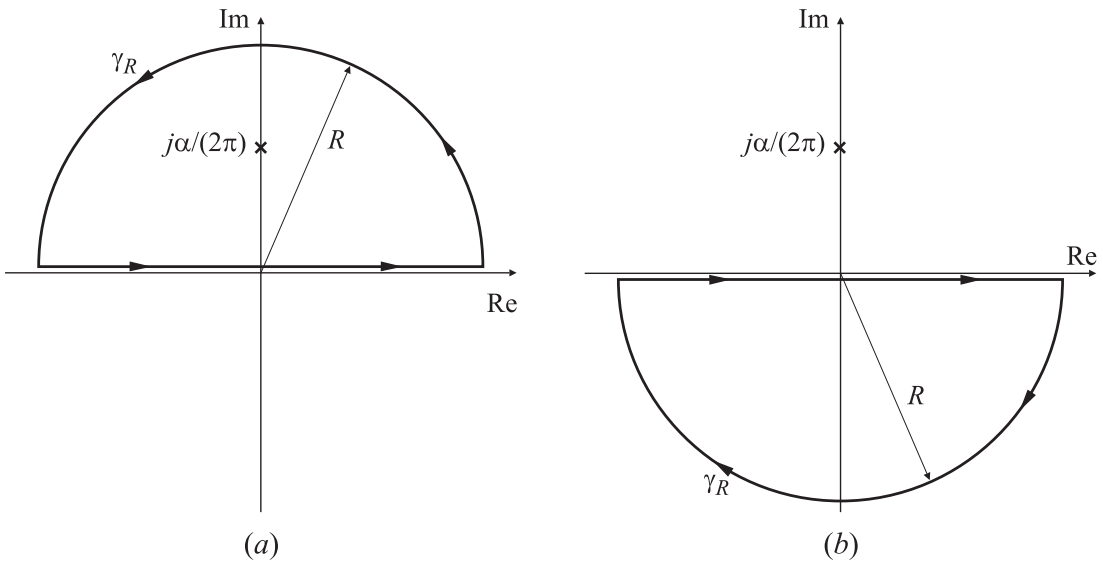


Fig. 2.17. Contorno de integración para el cálculo de la transformada del Ejemplo 2.8, para $t > 0$ (a) y para $t < 0$ (b).

- Sobre la curva γ_R resulta que $\operatorname{sen}\theta \leq 0$, y la integral sobre γ_R se anula sólo si $f > 0$.
- Sobre la curva γ_ε el recorrido es ahora en sentido *horario*, y se encuentra

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz}\, dz = j\pi,$$

y por lo tanto,

$$X(f) = -j\pi \quad \text{si } f > 0,$$

estableciendo entonces el par transformado

$$\frac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad -j\pi \operatorname{sgn}(f). \qquad \square$$

EJEMPLO **2.8. Otra forma de calcular la transformada inversa de** $X(f) = \beta/(\alpha + j2\pi f)$
En este caso,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \oint_C \frac{\beta}{\alpha + j2\pi z} e^{j2\pi tz} dz = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{\beta}{\alpha/(j2\pi) + z} e^{j2\pi tz} dz.$$

La función $X(f)$ es singular en $z = -\alpha/(j2\pi) = j\alpha/(2\pi)$, que pertenece a la región $\operatorname{Im}\{z\} > 0$ pues $\alpha > 0$. Si $t > 0$, la curva C debe estar contenida en la región $\operatorname{Im}\{z\} > 0$, de modo que $\left|e^{j2\pi tz}\right| \to 0$ cuando $R \to \infty$. El contorno de integración se muestra en la Fig. 2.17(a) y por lo tanto encierra al polo. En consecuencia,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{j2\pi} \oint_{C \subset \operatorname{Im}\{z\} > 0} \frac{\beta}{\alpha/(j2\pi) + z} e^{j2\pi tz} dz = j2\pi \operatorname{Res} \left(\frac{1}{j2\pi} \frac{\beta}{\alpha/(j2\pi) + z} e^{j2\pi tz} \right) \Big|_{z = -\alpha/(j2\pi)} \\ &= \beta e^{-\alpha t}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

Para $t < 0$, la curva C debe elegirse dentro del dominio $\operatorname{Im}\{z\} < 0$ como se muestra en la Fig. 2.17(b). Ya que esta curva no encierra ningún polo,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C \subset \operatorname{Im}\{z\} < 0} \frac{\beta}{\alpha/(j2\pi) + z} e^{j2\pi tz} dz = 0, \quad t < 0.$$

Combinando los resultados para $t > 0$ y $t < 0$, se tiene que

$$x(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t)$$

que coincide con (2.38). □

Aún contando con herramientas tan poderosas como las presentadas en los ejemplos anteriores, en algunos casos deben utilizarse otras técnicas para calcular las transformadas o antitransformadas, como se muestra a continuación.

EJEMPLO **2.9. Transformada de Fourier de** $x(t) = \operatorname{sgn} t$

En este ejemplo, recíproco del Ejemplo 2.7, la función $x(t) = \operatorname{sgn} t$ no es absolutamente integrable, y tampoco parece sencillo obtener una extensión analítica. De hecho, no se cumple uno de los requisitos de los lemas de Jordan (específicamente, que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$). La resolución se basa en considerar una sucesión de funciones (que *sí* tengan transformadas) y que se aproximen al $\operatorname{sgn} t$ en el límite; por ejemplo, la sucesión $x_\tau(t) = e^{-\tau|t|} \operatorname{sgn} t$ cuando $\tau \to 0$. La transformada de cada uno de los elementos de la sucesión es

$$\begin{aligned} X_\tau(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_\tau(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau|t|} \operatorname{sgn} t\, e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} -e^{(\tau - j2\pi f)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\tau + j2\pi f)t} dt \\ &= -\frac{e^{(\tau - j2\pi f)t}}{\tau - j2\pi f}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(\tau + j2\pi f)t}}{\tau + j2\pi f}\bigg|_{0}^{\infty} \\ &= -\frac{1}{\tau - j2\pi f} + \frac{1}{\tau + j2\pi f}. \end{aligned}$$

Cuando $\tau \to 0$, se tiene que

$$X(f) = \lim_{\tau\to 0} X_\tau(f) = \lim_{\tau\to 0} -\frac{1}{\tau - j2\pi f} + \frac{1}{\tau + j2\pi f} = \frac{1}{j\pi f},$$

que permite establecer el par transformado

$$\operatorname{sgn} t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{j\pi f}.$$ □

Las señales de los Ejemplos 2.7 y 2.9 no son frecuentes en los problemas de procesamiento, y en general las transformadas pueden resolverse integrando funciones reales o bien aplicando las propiedades que se verán en la Sección 2.5. Sin embargo, estas transformadas son importantes porque tienen relación con la *transformada de Hilbert*, como se explora en el Ejercicio 32.

Comentario sobre la variable en el dominio transformado (Ω o f)

En este apunte se ha definido la transformada de Fourier $X(f)$ de la señal $x(t)$ en función de la variable frecuencial f, que se mide en ciclos por segundo (cps, o Hz). Sin embargo también es frecuente en la literatura definir la transformada $X(\Omega)$ de la señal $x(t)$ en

función de la *frecuencia angular* Ω, que se mide en rad/s. La relación entre una y otra forma de expresión es sencilla. Sabiendo que $\Omega = 2\pi f$, es inmediato definir [cf. la ecuación (2.33) o (2.35)]

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt,$$

de modo que

$$X(\Omega) = X(f)|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}}.$$

Para el caso de la ecuación de síntesis (2.32) o (2.37), es necesario efectuar un cambio en la variable de integración. Resulta entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}}\, e^{j2\pi f t} d(2\pi f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega. \end{aligned}$$

En la variable frecuencia angular Ω el par transformado de Fourier se expresa entonces como

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt, \tag{2.41}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega. \tag{2.42}$$

En consecuencia, expresar la transformada de una señal en función de la frecuencia f o de la frecuencia angular Ω se limita simplemente a efectuar un cambio de variable. Para el caso del Ejemplo 2.6 se tiene que

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= X(f)|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}} = \left.\frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}\right|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}} \\ &= \frac{\beta}{\alpha + j\Omega}. \end{aligned}$$

Debe tenerse en cuenta que el cálculo de la transformada de algunas funciones especiales requiere algunas precauciones (vea el Ejemplo 2.18).

2.3.3. Existencia de la integral de Fourier

Hasta ahora no se ha cuestionado la validez de las ecuaciones (2.32) y (2.33), suponiendo que las ecuaciones integrales están bien definidas para todas las funciones. En general, para las mayoría de las funciones encontradas en el análisis científico práctico la transformada de Fourier y la transformada inversa están bien definidas. No se intenta presentar aquí una discusión teórica sobre la existencia de las transformadas de Fourier, sino destacar condiciones para su existencia y dar ejemplos de estas condiciones. Debido a la similitud de las ecuaciones de síntesis (2.32) y de análisis (2.33), las condiciones de existencia son igualmente aplicables tanto a la transformada directa como a la transformada inversa, intercambiando los roles de las variables tiempo-frecuencia. Sin embargo, para no oscurecer la presentación, las condiciones de existencia se enunciarán para la transformada directa (2.33). La discusión sigue la presentación de Papoulis (1962).

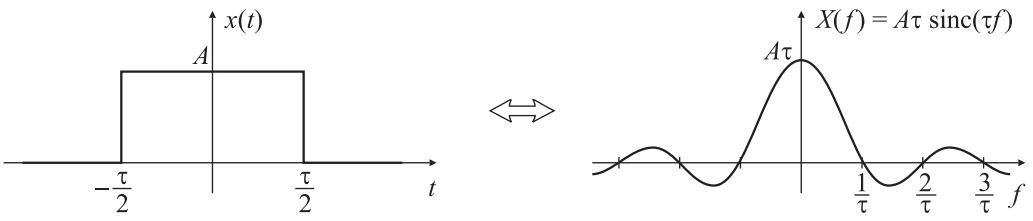


Fig. 2.18. Transformada de Fourier de un pulso.

CONDICIÓN **1.** Si $x(t)$ es absolutamente integrable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \tag{2.43}$$

existe la transformada de Fourier $X(f)$ existe, y está dada por la ecuación (2.36). De manera similar, si $X(f)$ es absolutamente integrable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(f)|\, df < \infty,$$

existe la transformada de Fourier inversa dada por la ecuación (2.37).

Esta condición ya fue comentada en la Sección 2.3.2, ecuación (2.36).

EJEMPLO **2.10. Transformada de Fourier de un pulso**
El pulso de la Fig. 2.18 definido como

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

verifica la CONDICIÓN 1 [ecuación (2.43)]. Por lo tanto, su transformada de Fourier existe y está dada por

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi f t} dt \\ &= A\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(2\pi f t)\, dt - jA\underbrace{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \operatorname{sen}(2\pi f t)\, dt}_{=0}. \end{aligned}$$

La segunda integral es cero porque el integrando es impar. Entonces,

$$X(f) = \frac{A}{2\pi f}\operatorname{sen}(2\pi f t)\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = A\tau\frac{\operatorname{sen}(\pi\tau f)}{\pi\tau f} = A\tau\operatorname{sinc}(\tau f). \tag{2.44}$$

Nuevamente, como en el Ejemplo 2.5, los términos que pueden cancelarse se mantienen para enfatizar la característica $\operatorname{sen}(ax)/ax$ de la transformada de Fourier de un pulso (Fig. 2.18).

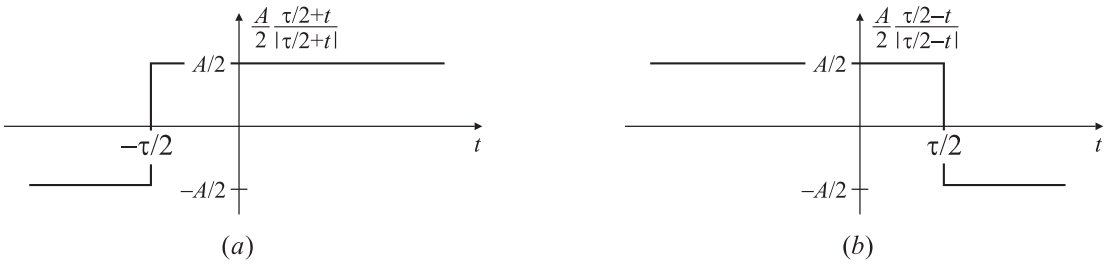


Fig. 2.19. Evaluación gráfica de la ecuación (2.46).

A partir de este resultado se puede calcular la transformada inversa (2.32), es decir, obtener $x(t)$ a partir de $X(f)$ dada por (2.44). Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A\tau \operatorname{sinc}(\tau f)\, e^{j2\pi ft} df \\ &= A\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \left[\cos(2\pi ft) + j \operatorname{sen}(2\pi ft)\right] df. \end{aligned}$$

El integrando imaginario es impar; por lo tanto,

$$x(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi\tau f)\cos(2\pi ft)}{f} df.$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\sin u \cos v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)\right]$, $x(t)$ se puede expresar

$$x(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi f(\tau/2+t)\right]}{f} df + \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi f(\tau/2-t)\right]}{f} df,$$

que se puede escribir como

$$x(t) = A(\tau/2+t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi f(\tau/2+t)\right]}{2\pi f(\tau/2+t)} df + A(\tau/2-t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi f(\tau/2-t)\right]}{2\pi f(\tau/2-t)} df. \tag{2.45}$$

Ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi ax)}{2\pi ax} dx = \frac{1}{2|a|},$$

resulta

$$x(t) = \frac{A}{2} \frac{\tau/2+t}{|\tau/2+t|} + \frac{A}{2} \frac{\tau/2-t}{|\tau/2-t|}. \tag{2.46}$$

Cada uno de los términos de la ecuación (2.46) se muestran en la Fig. 2.19; por inspección, es evidente que estos términos se suman para dar

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

□

El Ejemplo 2.10 ha permitido establecer el par transformado de Fourier (Fig. 2.18)

$$x(t) = A, \quad |t| < \tau/2 \qquad \Leftrightarrow \qquad X(f) = A\tau \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f).$$

En los ejemplos anteriores, la existencia de la transformada de Fourier estaba asegurada pues la función temporal satisface la CONDICIÓN 1. Ya se ha observado que debido a la simetría entre las ecuaciones que permiten calcular la transformada a partir de la señal y viceversa –véanse las ecuaciones (2.32) y (2.33)– la versión dual de la CONDICIÓN 1 establece que una condición suficiente para la existencia de la transformada inversa (2.32) es que la transformada $X(f)$ sea absolutamente integrable. En efecto, si $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|\, df < \infty$, entonces

$$|x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi tf} df \right| < \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(f)\, e^{j2\pi tf} \right| df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|\, df < \infty.$$

Sin embargo, tanto en el Ejemplo 2.6, donde

$$X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}, \quad -\infty < f < \infty,$$

como en el Ejemplo 2.10, en el cual

$$X(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f), \quad -\infty < f < \infty,$$

la transformada $X(f)$ *no* es absolutamente integrable. A pesar de ello, en ambos casos fue posible calcular la transformada inversa derivando $h(t)$ a partir de la ecuación de síntesis (2.37). Una situación dual ocurre en los Ejemplos 2.7 y 2.9. Esto muestra que la CONDICIÓN 1 de integrabilidad absoluta es sólo suficiente, y que funciones que no cumplen con ese requisito también pueden tener transformada de Fourier (o transformada inversa). Esto es lo que asegura la siguiente CONDICIÓN.

CONDICIÓN **2.** Si $x(t) = \rho(t)\operatorname{sin}(2\pi ft + \eta)$, donde f y η son constantes arbitrarias, si $|\rho(t+k)| < |\rho(t)|$, $k > 0$ y si para $|t| > \lambda > 0$ la función $x(t)/t$ es absolutamente integrable [ecuación (2.43)], entonces $X(f)$ existe y tiene transformada inversa de Fourier (2.32).

Para el caso de la transformada del Ejemplo 2.6 la condición homóloga a la CONDICIÓN 2 (es decir, intercambiando los roles de las variables t y f) se satisface eligiendo $t = 0$, $\eta = \pi/2$, y $\rho(f) = \beta/(\alpha + j2\pi f)$. Es evidente que $|x(f)/f|$ es absolutamente integrable para $|f| > \lambda > 0$. Un caso dual al de la transformada de Fourier $X(f)$ del Ejemplo 2.10 se estudia en el Ejemplo 2.11, que trata de la función temporal $\operatorname{sin}(at)/(at)$, que no es absolutamente integrable, y por lo tanto no cumple con la CONDICIÓN 1.

EJEMPLO **2.11. Transformada de una función del tipo** $\operatorname{sin}(at)/(at)$
El gráfico de la función

$$x(t) = 2Af_0 \frac{\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t},$$

se muestra en la Fig. 2.20. Esta función cumple con los requisitos pedidos por la CONDICIÓN 2, con $\rho(t) = 2Af_0/(2\pi f_0 t)$, $\eta = 0$. Además, $x(t)/t$ cumple con las condiciones de integrabilidad exigidas, ya que

$$\int_{\lambda}^{\infty} \left| \frac{x(t)}{t} \right| dt < \frac{2Af_0}{2\pi f_0} \int_{\lambda}^{\infty} \left| \frac{1}{t^2} \right| dt = \frac{A}{\pi\lambda} < \infty.$$

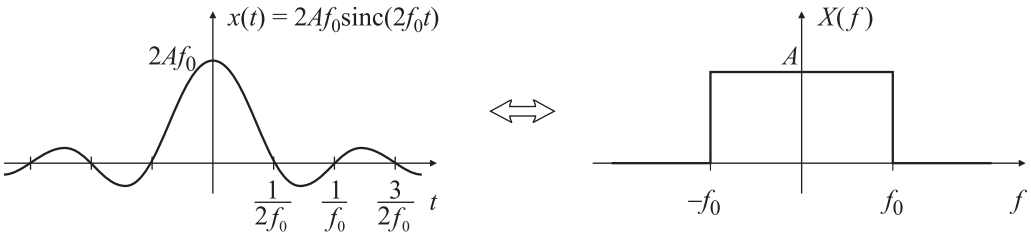


Fig. 2.20. Par transformado de Fourier de $2Af_0\,\mathrm{sinc}(2f_0t)$.

Entonces por la CONDICIÓN 2 existe la transformada de Fourier de $x(t)$ existe y está dada por

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2Af_0 \frac{\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}{t}\left[\cos(2\pi ft) - j\operatorname{sen}(2\pi ft)\right]dt \\ &= \frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}{t}\cos(2\pi ft)\ dt. \end{aligned}$$

El término imaginario es cero ya que el integrando es una función impar. Aplicando nuevamente la identidad trigonométrica $\sin u\cos v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v)+\operatorname{sen}(u-v)\right]$, se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi t\,(f_0+f)\right]}{t}dt + \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi t\,(f_0-f)\right]}{t}dt \\ &= A\,(f_0+f)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi t\,(f_0+f)\right]}{2\pi t\,(f_0+f)}dt + A\,(f_0-f)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi t\,(f_0-f)\right]}{2\pi t\,(f_0-f)}df. \end{aligned}$$

Esta ecuación es análoga a (2.45); idénticas técnicas de análisis conducen a

$$X(f) = \begin{cases} A, & |f| < f_0, \\ A/2, & f = \pm f_0, \\ 0, & |f| > f_0. \end{cases}$$

Como la transformada de Fourier $X(f)$ de este ejemplo verifica la CONDICIÓN 1, existe entonces la transformada inversa de Fourier, dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-f_0}^{f_0} Ae^{j2\pi ft}df = A\int_{-f_0}^{f_0}\cos(2\pi ft)\,df = A\left.\frac{\operatorname{sin}(2\pi ft)}{2\pi t}\right|_{-f_0}^{f_0} \\ &= 2Af_0\frac{\operatorname{sin}(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

De esta forma queda establecido el par transformado de Fourier

$$x(t) = 2Af_0\frac{\operatorname{sin}(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} \qquad \Leftrightarrow \qquad X(f) = A, \quad |f| < f_0$$

que se ilustra en la Fig. 2.20. □

CONDICIÓN **3.** Existe la transformada de Fourier para funciones que son de *variación acotada*; esto es, que pueden ser representadas por una curva de longitud finita en cualquier intervalo de tiempo finito.

Las funciones de los Ejemplos 2.10 y 2.11 son de variación acotada. Una función que no tiene variación acotada en cercanías del origen es sen $(1/t)$, que no tiene transformada de Fourier. Sin embargo esta CONDICIÓN es sólo suficiente, pues hay "funciones" que no tienen variación acotada pero sí tienen transformada de Fourier, tal como el impulso o "delta de Dirac" $\delta(t)$. En realidad el impulso no es estrictamente una función, sino una *distribución*, tal como se verá en la Sección 2.3.4.

2.3.4. El impulso o delta de Dirac $\delta(t)$

Estrictamente hablando la teoría de la transformada de Fourier se aplica a funciones temporales que cumplen con las condiciones de Dirichlet. Tales condiciones incluyen a las funciones que tienen *energía* finita, es decir, que verifican

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt < \infty, \tag{2.48}$$

como la exponencial decreciente del Ejemplo 2.5 o la función pulso del Ejemplo 2.10. Sin embargo, como se estudió en el Capítulo 1, hay otras señales de uso frecuente en el análisis de sistemas (las funciones periódicas, el escalón unitario, las señales constantes, etc.) que no tienen energía finita pero sí *potencia promedio* finita, que satisfacen

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt < \infty. \tag{2.49}$$

En general estas señales no verifican las condiciones de Dirichlet, y no tienen transformada de Fourier. Con las herramientas desarrolladas hasta el momento no es posible calcular la transformada de Fourier de una función senoidal o cosenoidal. Sin embargo estas señales se pueden representar usando *series* de Fourier. Resulta deseable extender la teoría de la transformada para poder

1. combinar la serie y la transformada de Fourier en una teoría unificada, de modo de tratar la serie como un caso particular de la transformada de Fourier;
2. poder aplicar la transformada de Fourier a señales de potencia promedio finita, ya que son muy usadas en el análisis de sistemas.

Tales objetivos pueden alcanzarse introduciendo el *delta de Dirac* o *impulso unitario*. Su uso simplifica muchas derivaciones que de otro modo requerirían desarrollos extensos y complejos. Aunque este concepto se aplica en la solución de muchos problemas la definición matemática precisa debe interpretarse en el sentido no de una función normal, sino en base a la teoría de distribuciones.

Se detallarán aquí algunas propiedades específicas del delta de Dirac que son necesarias para soportar los desarrollos posteriores.

Definición

Normalmente, la "función" impulso $\delta(t)$ se define como

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0 \tag{2.50}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1. \tag{2.51}$$

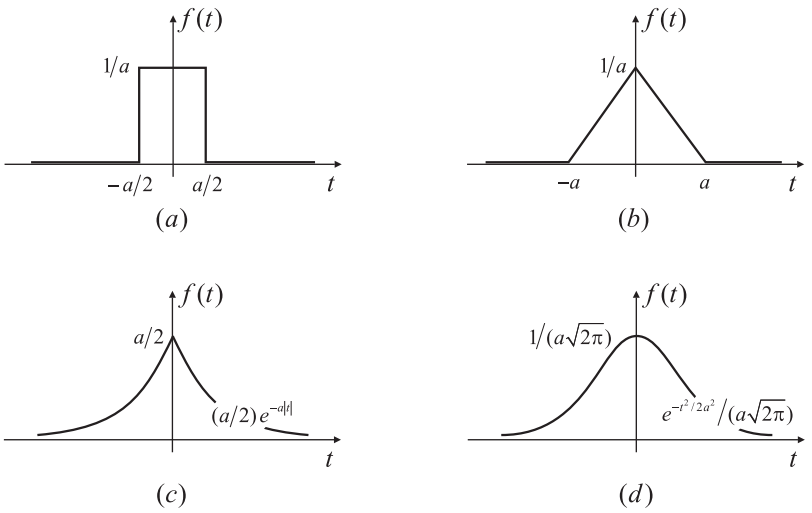


Fig. 2.21. Distintas representaciones del impulso.

Estas expresiones indican que $\delta(t)$ es cero en todo punto, salvo en $t = t_0$ [ecuación (2.50)], y que en ese punto la amplitud es indefinida, pero el área bajo la función es unitaria [ecuación (2.51)]. Parece difícil relacionar un impulso con una señal física; sin embargo, puede pensarse que un impulso es un pulso de gran amplitud y duración extremadamente breve, con área unitaria. El término "impulso" hace hincapié en el hecho que $\delta(\cdot)$ no es una "función". Por ello las ecuaciones o expresiones que la contengan tienen que tener una interpretación, y en general esta se da de modo elemental recurriendo a una serie de *pulsos* (no de *impulsos*). La expresión que contiene el "símbolo impulso" $\delta(\cdot)$ adquiere el significado de un límite que en muchos casos existe. Este hecho refleja la situación física en el cual las respuestas a señales tipo *pulso* se pueden producir u observar precisamente, dentro de los límites permitidos por el poder de resolución de los equipos de medición, mientras que los *impulsos* son ficticios. Tratando *con especial cuidado* las expresiones donde intervenga $\delta(\cdot)$ se puede retener el rigor y el procedimiento de manipulación que ha resultado tan práctico. Ejemplos familiares de esta situación física son el momento producido por una masa puntual que descansa sobre una viga, o el campo eléctrico de una carga puntual. En la aproximación física de tales problemas se observa el efecto producido por objetos o volúmenes con cargas cada vez más pequeños pero a su vez cada vez más densos, y se estudia si el efecto producido tiende a un límite definido.

Ninguna función "común" puede satisfacer las ecuaciones (2.50) y (2.51). Sin embargo, se puede pensar el impulso como una sucesión de funciones que progresivamente incrementan su amplitud y disminuyen su duración, manteniendo el área constante e igual a la unidad. En el límite la función tiende a cero en todo punto, excepto en el origen donde "tiende a infinito" para poder mantener el área constante. Por ejemplo, la señal de la Fig. 2.21(a) tiene área unitaria, y se puede escribir

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} f(t, a).$$

De manera similar, funciones como las ilustradas en la Fig. 2.21(b), (c) y (d) satisfacen la condición (2.51), y pueden utilizarse para representar un impulso cuando $a \to 0$: es

irrelevante la forma del pulso que forme la sucesión. Otra representación interesante se obtiene a partir de definir el impulso como el límite de un sinc,

$$\delta(t) = \lim_{a\to\infty} \frac{\operatorname{sen} at}{\pi t}$$

que permite "demostrar" (Papoulis, 1962) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi f t \, df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} \, df = \delta(t) . \tag{2.52}$$

Las diferentes propiedades de los impulsos pueden determinarse directamente a partir de las definiciones (2.50) y (2.51). En un sentido matemático estricto estas definiciones carecen de sentido si se piensa $\delta(t)$ como una función común y corriente; tal es el caso, por ejemplo, de la ecuación (2.51), con la interpretación de Riemann de la integral. En cambio estos problemas matemáticos desaparecen si se piensa en el impulso como una función generalizada o una distribución.

Propiedades

El impulso $\delta(t)$ tiene varias propiedades interesantes que son consecuencias directas de las reglas (2.50)–(2.51) que lo definen. Entre ellas se destacan:

1. La función delta es par: $\delta(t) = \delta(-t)$.

2. El escalado de la variable independiente resulta en un escalado del área del pulso

   $$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) ,$$

   como se desprende inmediatamente de analizar una sucesión de pulsos (como los de la Fig. 2.21) escalados en el tiempo.

3. La integral del producto de una función $x(t)$ cualquiera, continua en t_0, y un impulso $\delta(t - t_0)$ es igual a $x(t_0)$:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0) . \tag{2.53}$$

   Esta relación se conoce como propiedad de *criba* o de "*colador*" del impulso, ya que sólo "deja pasar" el valor que toma $x(t)$ cuando se evalúa en la abscisa donde está ubicado el impulso. Es frecuente definir el producto de una función cualquiera y una distribución por la integral de la ecuación (2.53), de modo que si $x(t)$ es continua,

   $$x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)\,\delta(t - t_0) .$$

   En general, el producto de dos distribuciones es indefinido.

4. Ya que el impulso es una función par, se puede reescribir la ecuación (2.53) de forma similar a la integral de convolución,

   $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t_0 - t)\,dt = x(t_0) , \qquad \text{es decir} \qquad x(t) * \delta(t) = x(t) .$$

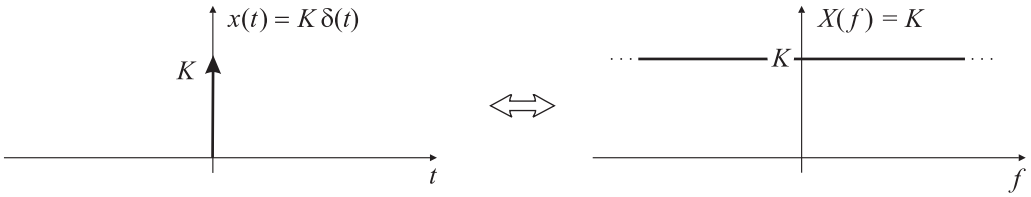


Fig. 2.22. Transformada de Fourier de un impulso.

de modo que la convolución de cualquier función con un impulso da como resultado la misma función original (propiedad de *replicación* del impulso). Si el impulso está desplazado en t_0,

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta[(t - t_0) - \tau]\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\, \delta(\tau - t_0)\, d\tau \\ &= x(t - t_0). \end{aligned}$$

es decir que la convolución de una función continua con un impulso desplazado resulta en un desplazamiento de la función original.

5. De manera más general, la Propiedad 4 puede generalizarse para la convolución de dos impulsos:
$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta[t - (t_1 + t_2)].$$

6. El impulso y la función escalón unitario
$$u(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(t)}{2} = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$
donde $u(0)$ toma cualquier valor finito, están relacionados por
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(s)\, ds, \qquad \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t).$$

7. Para cualquier señal $x(t)$,
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \frac{d^n}{dt^n} \delta(t)\, dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} x(t) \Big|_{t=0}.$$

2.3.5. Aplicaciones del impulso

La aplicación de las propiedades anteriores permite obtener directamente la transformada de Fourier de muchas señales importantes.

EJEMPLO **2.12. Transformada de un impulso**
La transformada de Fourier de la función impulsiva $x(t) = K\delta(t)$ se obtiene a partir de la Propiedad (3):
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = K e^0 = K.$$

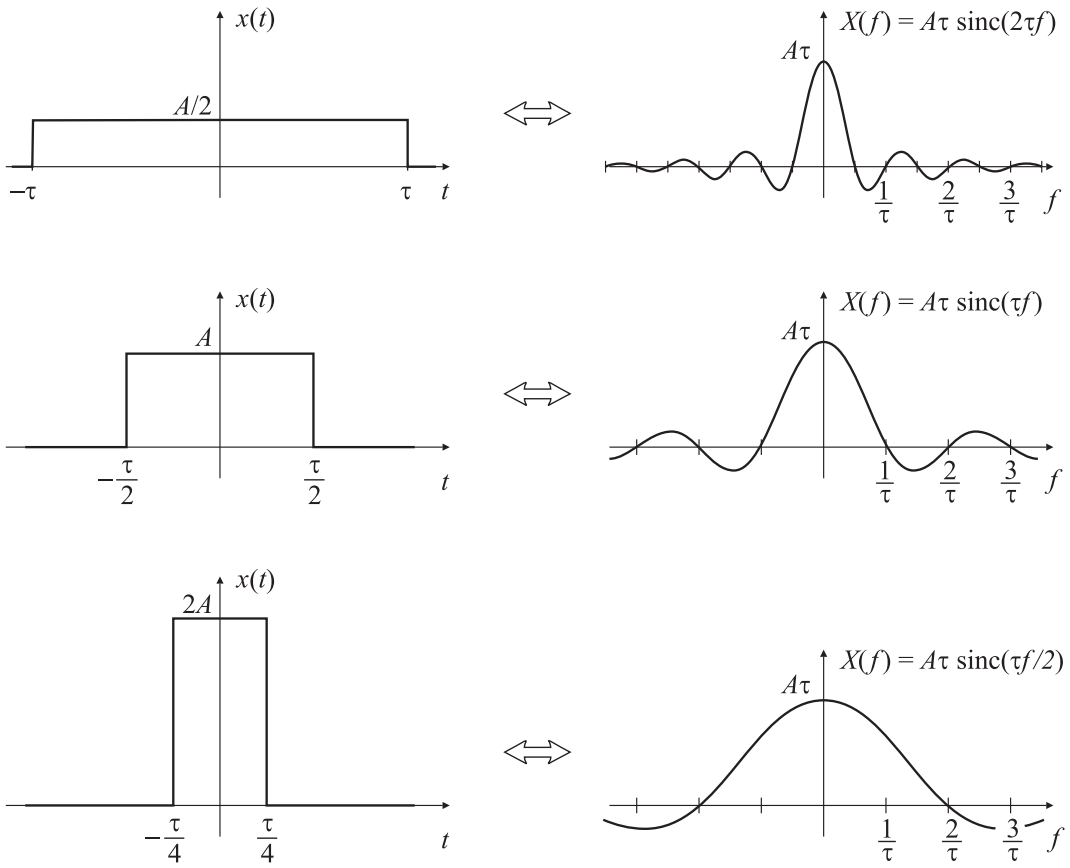


Fig. 2.23. Transformada de Fourier de pulsos de distinto ancho.

La transformada inversa no es tan directa, y se basa el resultado (2.52). Entonces,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K e^{j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} K \cos(2\pi f t)\, dt = K\delta(t),$$

lo que establece el par transformado que se muestra en la Fig. 2.22.

$$x(t) = K\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = K. \qquad \square$$

Una manera alternativa de obtener la transformada de un impulso es considerando nuevamente el Ejemplo 2.10, haciendo tender a cero el ancho del pulso ($T_0 \to 0$). Para mantener la energía del pulso constante, cada disminución del ancho se acompaña por un incremento en la altura del pulso (Fig. 2.23). A medida que el ancho del pulso disminuye, aumenta el valor de la abscisa para el cual se produce el primer cero de la transformada (el primer cero del "sinc"). En el límite, cuando el ancho del pulso tiende a cero (y su altura a infinito, pese a lo cual el área queda constante), la transformada tiende a una constante. Este comportamiento es un ejemplo de la relación inversa que existe entre los dominios tiempo y frecuencia. Más adelante se estudiará este fenómeno desde el punto de vista de la propiedad de escalado en frecuencia de la transformada de Fourier.

Es interesante notar que el valor de la transformada en el origen es igual al área del pulso, lo que resulta evidente a partir de la definición:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = \text{área bajo la función } x(t).$$

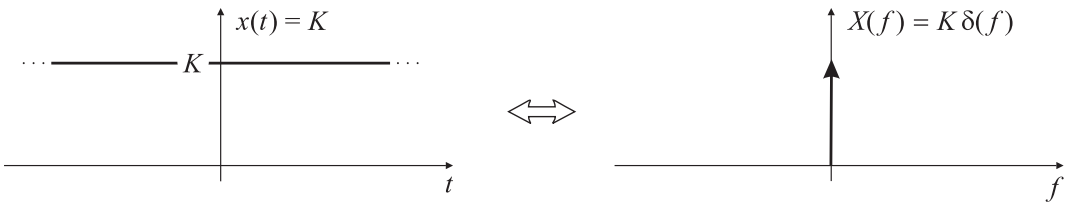


Fig. 2.24. Transformada de Fourier de una función constante.

EJEMPLO **2.13. Transformada de una constante**
De manera similar al desarrollo del Ejemplo 2.12 se puede obtener el par transformado

$$x(t) = K \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = K\,\delta(f)$$

que se ilustra en la Fig. 2.24. Es ilustrativo comparar este resultado con el obtenido en el Ejemplo 2.1 para la *serie* de Fourier de una función constante. □

El conocimiento los pares transformados desarrollados en los Ejemplos 2.12 y 2.13 facilita la obtención de otros pares transformados, pero específicamente, permite el cálculo de las transformadas de funciones periódicas, como se muestra en la siguiente sección..

2.4. Señales periódicas y la transformada de Fourier

Al presentar la transformada de Fourier (Sección 2.3.1) se determinó la relación entre los coeficientes de la serie de Fourier de una señal $\tilde{x}(t)$ de período T y la transformada de Fourier de un período de esa señal, dado por

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & |t| \leq T_0/2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{2.54}$$

La relación entre los coeficientes y la transformada está dada por (2.30), repetida aquí por comodidad

$$c_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) = f_0 X(k f_0). \tag{2.55}$$

Por lo tanto, los coeficientes de la serie de Fourier de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ de período T son *muestras* tomadas cada $f_0 = 1/T$ de la transformada de Fourier de la función (aperiódica) $x(t)$ determinada por un único período de $\tilde{x}(t)$.

Los coeficientes de la serie de Fourier se pueden obtener integrando sobre *cualquier* intervalo de longitud T_0. Específicamente, sea s cualquier punto en el tiempo, y definamos la señal $x(t)$ igual a $\tilde{x}(t)$ sobre el intervalo $s \leq t \leq s + T_0$, y cero fuera de él,

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & s \leq t \leq s + T_0, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{2.56}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$ están dados por (2.55), donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$ definida por (2.56). La ecuación (2.55) es válida para

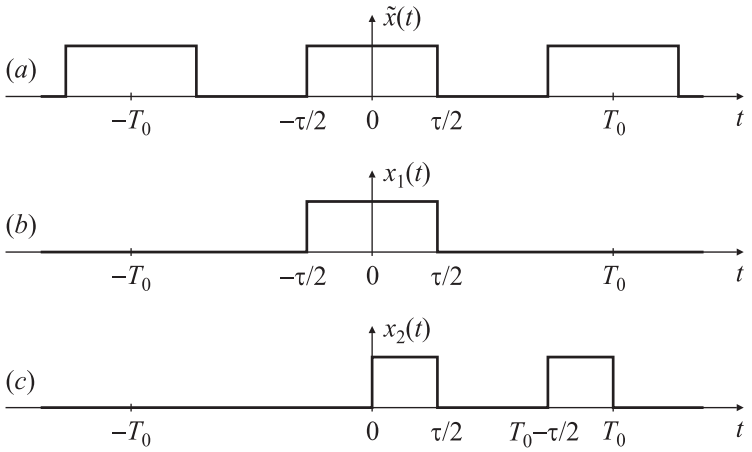


Fig. 2.25. (a) Onda cuadrada periódica $\tilde{x}(t)$; (b)–(c) dos señales aperiódicas cada una de las cuales coincide con $\tilde{x}(t)$ sobre intervalos diferentes de longitud T_0.

cualquier valor de s, y no necesariamente el valor $s = -T_0/2$ utilizado en (2.54) y (2.28). Esto *no significa* que la transformada $X(f)$ es la misma para todos los valores de s pero sí que el *conjunto* de muestras $X(k/T_0)$ es independiente de s, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO **2.14. Coeficientes de la serie de Fourier a partir de la transformada**
Sea $\tilde{x}(t)$ la señal cuadrada periódica de período T_0 que se muestra en la Fig. 2.25. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales aperiódicas que coinciden con $\tilde{x}(t)$ sobre diferentes intervalos de tiempo de longitud T_0.

La transformada de Fourier de $x_1(t)$ es:

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{1}{\pi f}\sin(\pi\tau f) = \tau\,\mathrm{sinc}(\tau f). \end{aligned} \tag{2.57}$$

La transformada de Fourier de $x_2(t)$ esta dada por

$$\begin{aligned} X_2(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt + \int_{T_0-\tau/2}^{T_0} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{-1}{j2\pi f}\left(e^{-j2\pi f\tau/2} - 1\right) + \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f T_0}\left(1 - e^{j2\pi f\tau/2}\right) \\ &= \frac{e^{-j\pi\tau f/2}}{-j2\pi f}\left(e^{-j\pi\tau f/2} - e^{j\pi\tau f/2}\right) + \frac{e^{-j2\pi(T_0-\tau/4)f}}{-j2\pi f}\left(e^{-j\pi\tau f/2} - e^{j\pi\tau f/2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi f}\sin(\pi\tau f/2)\left(e^{-j\pi\tau f/2} + e^{-j2\pi(T_0-\tau/4)f}\right). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Comparando (2.57) con (2.58) se advierte que las dos transformadas no son iguales: mientras que $X_1(f)$ es real $X_2(f)$ es compleja. Sin embargo, para las frecuencias $f_k = k/T_0$, (2.58) se puede escribir

$$\begin{aligned} X_2\left(\frac{k}{T_0}\right) &= \frac{1}{\pi(k/T_0)}\sin\left(\pi\tau\frac{k}{T_0}\right)\left(e^{-jk\pi\tau/(2T_0)} + e^{-jk2\pi[1-\tau/(4T_0)]}\right) \\ &= \frac{2}{\pi(k/T_0)}\sin\left(\pi\tau\frac{k}{2T_0}\right)\cos\left(\pi\tau\frac{k}{2T_0}\right). \end{aligned}$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$, se tiene

$$X_2\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{\pi\,(k/T_0)}\sin\left(\pi\tau\frac{k}{T_0}\right) = \frac{T_0}{k\pi}\sin\left(\pi\tau\frac{k}{T_0}\right) = \tau\,\mathrm{sinc}\left(\tau\frac{k}{T_0}\right) = X_1\,(f)|_{f=\frac{k}{T_0}}\,, \tag{2.59}$$

y por lo tanto,

$$c_k = \frac{1}{T_0}\,X_1\,(f)|_{f=\frac{k}{T_0}} = X_2\,(f)|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{\tau}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0}k\right),$$

lo que muestra que, a pesar que las transformadas de Fourier son diferentes, sus muestras en las frecuencias armónicas $f_k = kT_0$ coinciden. Este resultado concuerda con (2.55): los coeficientes de la serie de Fourier de una señal *periódica* de período T_0 pueden calcularse a partir de la transformada de Fourier de una señal *aperiódica* que coincida con aquella sobre un intervalo arbitrario de longitud igual al período T_0, y que valga cero fuera de él. □

2.4.1. La transformada de Fourier para señales periódicas

La *transformada* de Fourier de una señal periódica se puede obtener directamente a partir de su representación en *series* de Fourier, y consiste en un tren de impulsos en frecuencia, donde las áreas de los impulsos son proporcionales a los coeficientes de la serie de Fourier. Esta representación facilita el análisis de Fourier de problemas de muestreo y modulación.

Para sugerir el resultado general, se considera una señal $x\,(t)$ cuya transformada de Fourier $X\,(f)$ es un impulso de área unitaria en la frecuencia $f = f_0$, esto es,

$$X\,(f) = \delta\,(f - f_0)\,.$$

La señal $x\,(t)$ que corresponde a esta transformada se puede determinar a partir de la transformada inversa de Fourier

$$x\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta\,(f - f_0)\,e^{j2\pi f\,t}df = e^{j2\pi f_0 t}.$$

De manera más general, si $X\,(f)$ es una combinación lineal de impulsos equiespaciados en frecuencia,

$$X\,(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta\,(f - kf_0)\,, \tag{2.60}$$

la aplicación de la transformada inversa permite obtener

$$x\,(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t}. \tag{2.61}$$

Se observa que la ecuación (2.61) corresponde exactamente a la representación en serie de Fourier de una señal periódica, como se vio en la ecuación (2.19). Por lo tanto, la transformada de Fourier de una señal T_0-periódica con coeficientes $\{c_k\}$ puede interpretarse como un tren de impulsos ubicados en frecuencias armónicamente relacionadas con $1/T_0$ y tales que el área del impulso de la armónica kf_0 es el valor del k-ésimo coeficiente de la serie de Fourier c_k. Este es el resultado obtenido en el Ejemplo 2.15 para las señales periódicas seno y coseno.

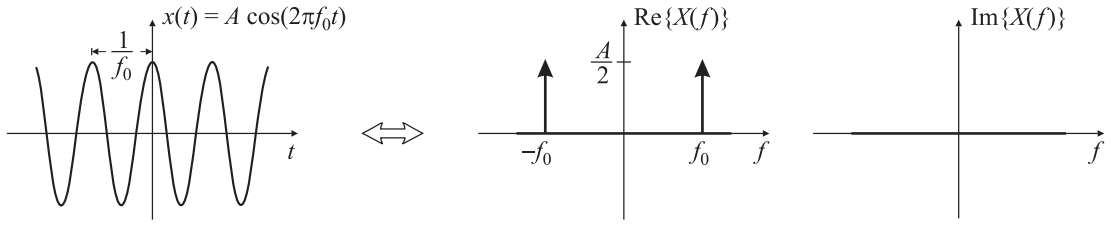


Fig. 2.26. Transformada de Fourier de $A\cos(2\pi f_0 t)$.

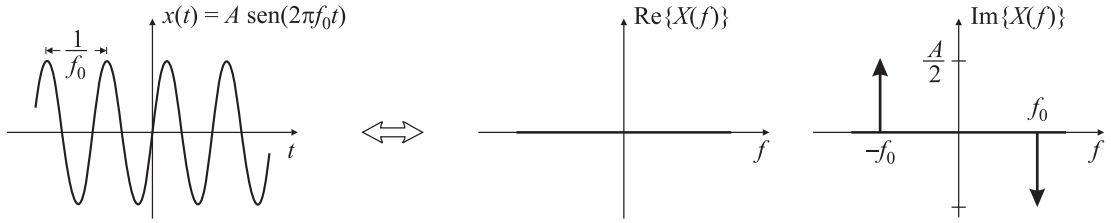


Fig. 2.27. Transformada de Fourier de $A\sin(2\pi f_0 t)$

Sintetizando, la relación entre la *serie* de Fourier y la *transformada* de Fourier de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ queda establecida por las expresiones (2.55), (2.60) y (2.61) repetidas aquí por completitud.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \\ &\Updownarrow \\ \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f-kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)\ \delta(f-kf_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)\end{aligned}$$

donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, definida como un período de la señal periódica,

$$x(t) = \begin{cases}\tilde{x}(t), & t_0 \le t \le t_0+T_0, \\ 0, & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

Un punto de vista alternativo de esta representación se estudiará en la Sección 2.6.4.

EJEMPLO **2.15. Transformada de Fourier de funciones periódicas**
La transformada de Fourier de la función periódica

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t),$$

puede calcularse aplicando la propiedad (2.52) del impulso:

$$\begin{aligned}X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(2\pi f_0 t)\ e^{-j2\pi f t}dt = \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-j2\pi f_0 t}+e^{j2\pi f_0 t}\right)e^{-j2\pi f t}dt \\ &= \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-j2\pi t(f-f_0)}+e^{-j2\pi t(f+f_0)}\right)dt \\ &= \frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0),\end{aligned}$$

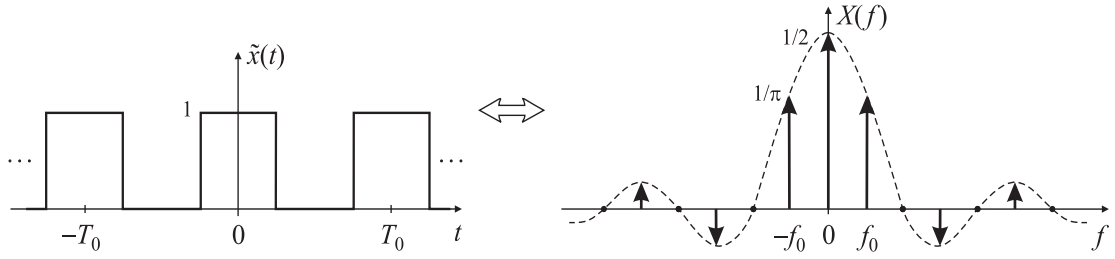


Fig. 2.28. Transformada de Fourier de una onda cuadrada simétrica periódica.

La fórmula de inversión permite obtener $x(t)$ a partir de $X(f)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0) \right] e^{j2\pi f t} df = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= A\cos(2\pi f_0 t). \end{aligned}$$

□

En la Fig. 2.26 se muestra el par transformado de Fourier

$$A\cos(2\pi f_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0).$$

De manera similar se puede obtener el par transformado que se observa en Fig. 2.27:

$$A\sin(2\pi f_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad j\frac{A}{2}\delta(f+f_0) - j\frac{A}{2}\delta(f-f_0).$$

La transformada de Fourier en este caso es imaginaria. Es instructivo comparar las similitudes y diferencias de estos resultados con los obtenidos al calcular la *serie* de Fourier de las señales coseno y seno (Ejemplos 2.2 y 2.3, respectivamente).

EJEMPLO **2.16. Transformada de Fourier de una onda cuadrada**
Dada la señal cuadrada de la Fig. 2.25, y de acuerdo a los resultados del Ejemplo 2.14, los coeficientes de la serie de Fourier para esta señal son

$$c_k = \frac{\tau}{T_0}\frac{\sin(k\pi\tau f_0)}{k\pi} = \frac{\tau}{T_0}\operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0}k\right),$$

de modo que su transformada de Fourier es

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_0}\operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0}k\right)\delta(f-kf_0),$$

que se muestra en la Fig. 2.28 para $\tau = T_0/2$. □

EJEMPLO **2.17. Transformada de Fourier de un tren de impulsos**
Un tren infinito de impulsos distanciados T unidades de tiempo entre sí se expresa matemáticamente como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT).$$

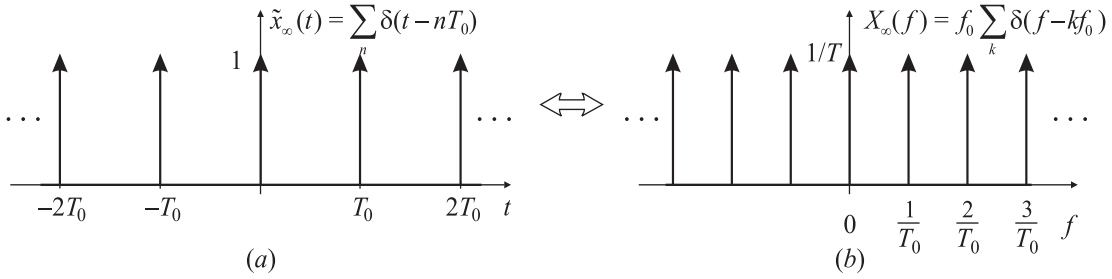


Fig. 2.29. (a) Tren de impulsos periódico; (b) su transformada de Fourier.

Esta señal es periódica, con período fundamental T. Para determinar su transformada de Fourier se calculan los coeficientes de la serie de Fourier

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

En base a este resultado y la ecuación (2.60) resulta que la transformada de Fourier de un tren de impulsos es

$$X(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

El resultado indica que la transformada de un tren de impulsos en tiempo es un tren de impulsos en frecuencia, como muestra la Fig. 2.29(b). Se vuelve a notar aquí la relación inversa entre los dominios tiempo y frecuencia: a medida que el espaciado entre los impulsos en tiempo se hace mayor (aumenta el período T), el espaciado entre los impulsos en el dominio frecuencia (la frecuencia fundamental $f_0 = 1/T$) disminuye. □

EJEMPLO **2.18. El tren de impulsos en función de la frecuencia angular**
Es habitual que muchos textos expresen los pares transformados de Fourier en función de la frecuencia angular Ω. Como ya vimos, la relación entre $X(\Omega)$ y $X(f)$ es sencillamente $X(\Omega) = X(f)|_{f=\Omega/(2\pi)}$. En el caso particular del tren de impulsos, la propiedad de escalado del impulso hace que la transformada pueda expresarse de manera ligeramente diferente. Hemos visto que el tren de impulsos satisface el par transformado

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right). \tag{2.62}$$

Sabiendo que $\Omega = 2\pi f$, definiendo $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, y aplicando la propiedad de escalado del impulso,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) &= \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\frac{1}{2\pi}\left(2\pi f - \frac{2\pi}{T_0}k\right)\right] = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T_0}k\right) \\ &= \frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 k),\end{aligned}$$

y entonces la relación (2.62) puede ser re-escrita en función de la frecuencia angular Ω como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(\Omega) = \Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0),$$

que coincide con la expresión dada por Papoulis (1962). □

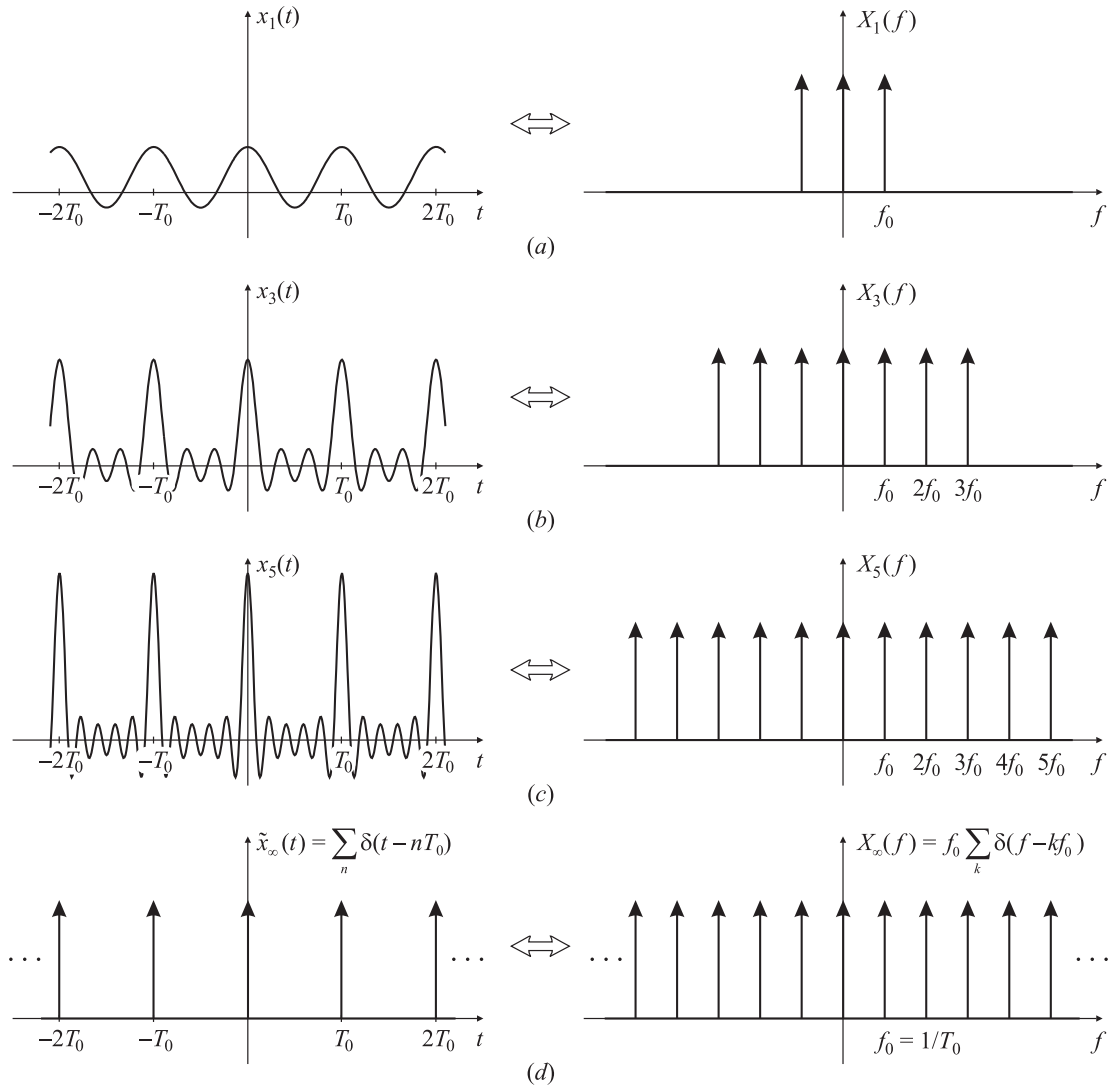


Fig. 2.30. Desarrollo de la transformada de Fourier de una sucesión de impulsos equiespaciados.

EJEMPLO **2.19. Transformada de un tren de impulsos**
Aunque la demostración rigurosa se presenta en el Ejemplo 2.17, es interesante "demostrar", al menos intuitivamente, que la transformada de Fourier de un tren de impulsos equiespaciados en tiempo es otro tren de impulsos equiespaciados en frecuencia

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right). \tag{2.63}$$

Un desarrollo gráfico del par transformado se puede apreciar en la Fig. 2.30. En esta figura, se parte de impulsos separados $f_0 = 1/T_0$ en el dominio frecuencia y se observa qué sucede en el dominio tiempo. Para el caso mostrado en la Fig. 2.30(a) (derecha), se tienen tres impulsos en el dominio frecuencia:

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0),$$

y en consecuencia,

$$x(t) = 1 + e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} = 1 + 2\cos(2\pi f_0 t),$$

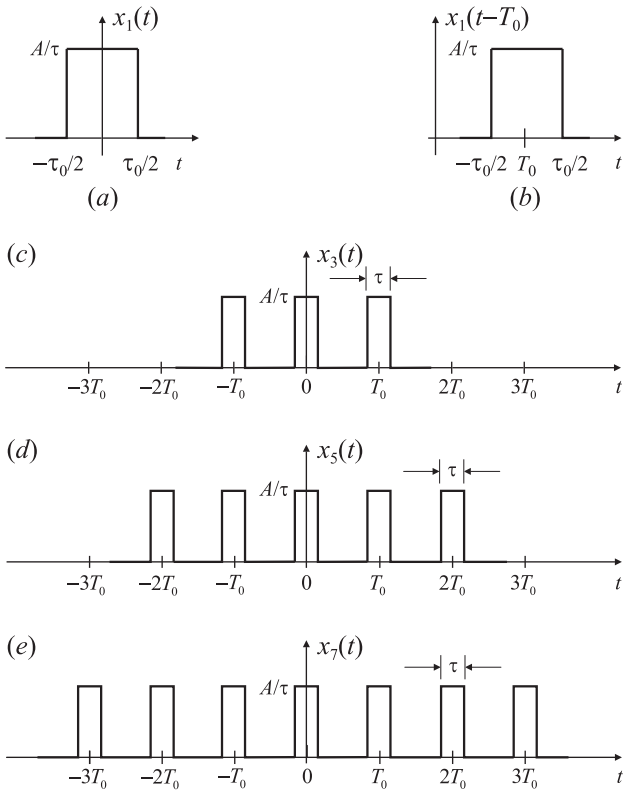


Fig. 2.31. Trenes de pulsos.

función que se puede observar en la Fig. 2.30(a) (izquierda). Si en el dominio frecuencia se agregan impulsos de la forma $\delta(f+kf_0)+\delta(f-kf_0)$, donde k es un entero positivo, es fácil ver (aplicando el principio de superposición) que en la función en el dominio tiempo aparecen términos de la forma $2\cos(2\pi k f_0 t)$. Esto se muestra en la Fig. 2.30(b) para tres términos, y en la Fig. 2.30(c) para cinco términos:

$$X(f)=\delta(f)+\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)+\delta(f-2f_0)+\delta(f+2f_0)+\delta(f-3f_0)+\delta(f+3f_0),$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} x(t) &= 1+e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}+e^{j2\pi(2f_0)t}+e^{-j2\pi(2f_0)t}+e^{j2\pi(3f_0)t}+e^{-j2\pi(3f_0)t} \\ &= 1+2\cos(2\pi f_0 t)+2\cos[2\pi(2f_0)t]+2\cos[2\pi(3f_0)t]. \end{aligned} \tag{2.64}$$

A medida que se incrementa el número de impulsos en el dominio frecuencia, se incrementa el número de términos $2\cos(2\pi n f_0 t)$ que aparecen en el dominio tiempo. La forma de onda de $x(t)$ se parece "cada vez más" a un tren de impulsos. Finalmente, en el límite, cuando el dominio frecuencia se tienen "infinitos" pulsos, se obtienen también "infinitos" impulsos en el dominio tiempo [Fig. 2.30(d)]. Obsérvese nuevamente que el valor de $x(t)$ en el origen tiene que ver con el área encerrada por la "curva" en el dominio frecuencia (recuérdese que los $\delta(t)$ tienen área unidad), salvo para el último caso, en que tanto la señal en el dominio frecuencia como la señal en el dominio tiempo son periódicas. □

Una forma alternativa de calcular la transformada de un tren de impulsos es partiendo del dominio temporal. En este caso, consideraremos *pulsos* en el dominio tiempo (en lugar de impulsos). El pulso temporal se muestra en la Fig. 2.31(a). En este caso el pulso está

definido por

$$x_1(t) = \begin{cases} A/\tau, & |t| < \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

El espectro del pulso es

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{j2\pi f t} dt = \frac{A}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{j2\pi f t} dt = \frac{A}{\tau} \frac{1}{j2\pi f} \left(e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} \right) \\ &= \frac{A}{\tau_0} \frac{1}{j\pi f} j \operatorname{sen}(\pi\tau f) = A \frac{\operatorname{sen}(\pi\tau f)}{\pi\tau f} = A \operatorname{sinc}(\tau f). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Las transformadas de Fourier del pulso, para $\tau = 0{,}5$, $0{,}2$ y $0{,}1$ se muestran en la Fig. 2.32(a)-(c), respectivamente. Se observa que a medida que disminuye el ancho del pulso, el lóbulo principal del sinc $(\cdot)$ es cada vez más amplio.

Como veremos en la Sección 2.5.4, al estudiar sus propiedades, la transformada de Fourier del pulso desplazado en T_0 [Fig. 2.31(b)] es

$$X_{T_0}(f) = e^{-j2\pi f T_0} X_1(f).$$

De modo que la transformada de Fourier de la señal con tres pulsos está dada por

$$\begin{aligned} X_3(f) &= X_1(f) + e^{j2\pi f T_0} X_1(f) + e^{-j2\pi f T_0} X_1(f) \\ &= X_1(f) \left(1 + e^{j2\pi f T_0} + e^{-j2\pi f T_0} \right) \\ &= X_1(f) \left[1 + 2\cos(2\pi f T_0) \right]. \end{aligned}$$

Esta transformada se ilustra en la Fig. 2.32(d)-(f). Se aprecia que, dependiendo del ancho del pulso, algunos de los"picos" pueden no aparecer [Fig. 2.32(d)]. Obsérvese además que la amplitud de los picos tiene como envolvente una "sinc" que depende del ancho de los pulsos en el dominio tiempo.

La transformada de la función con $2N+1$ pulsos es

$$X_{2N+1}(f) = X_1(f) \left[-1 + 2 \sum_{k=0}^{N} \cos(2\pi k T_0 f) \right] = X_1(f) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{N} \cos(2\pi k T_0 f) \right]. \tag{2.66}$$

(En la última expresión cambia el valor inicial del índice de la sumatoria de $k = 0$ a $k = 1$). Los casos para $N = 5$, 25, 75, (11, 51, 151 pulsos, respectivamente) se muestran también en la Fig. 2.32(g)-(o): a medida que aumenta el numero de pulsos en el dominio tiempo, la transformada de Fourier se concentra en las cercanías de frecuencias armónicas a la que corresponde con la separación entre pulsos. También se aprecia que a medida que disminuye el ancho de los pulsos, los "picos" en frecuencia resultan casi de la misma amplitud.

2.4.2. El núcleo de Dirichlet

Resulta interesante analizar en detalle las sumas de las ecuaciones (2.64) y (2.66). Por ejemplo, en el caso de (2.66), la transformada de un conjunto de $2N+1$ pulsos en el dominio tiempo puede escribirse

$$X_{2N+1}(f) = X(f) \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi k T_0 f} = X(f) (2N+1) \Phi_{T_0, 2N+1}(f), \tag{2.67}$$

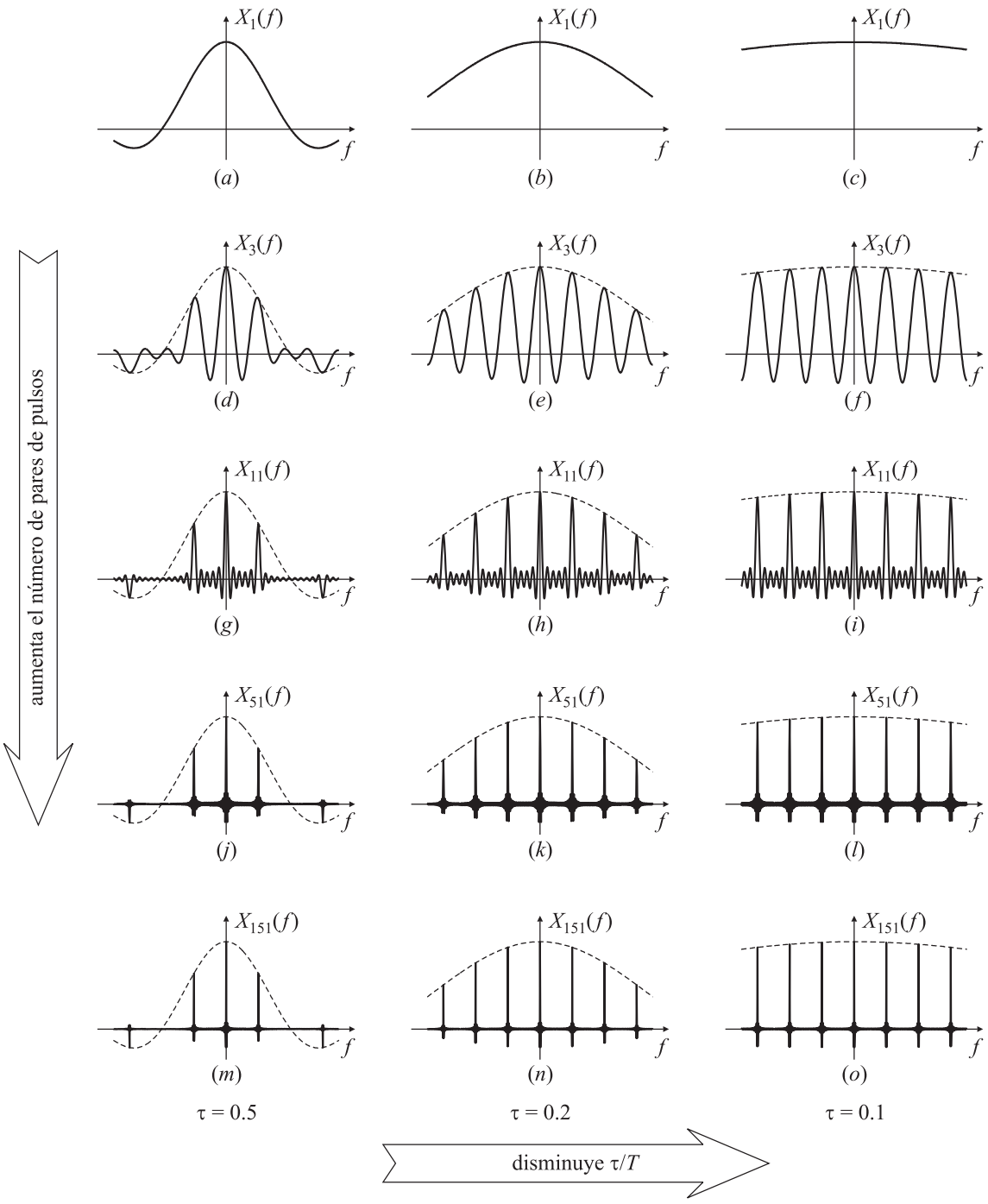


Fig. 2.32. Transformadas de los trenes de pulsos de la Fig. 2.31. (a)-(c) un único pulso; (d)-(f) tres pulsos; (g)-(i) once pulsos; (h)-(l) cincuenta y un pulsos; (m)-(o) ciento cincuenta y un pulsos. Cada columna corresponde a pulsos de distinta duración τ.

con

$$\Phi_{T_0,2N+1}(f) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi k T_0 f}.$$

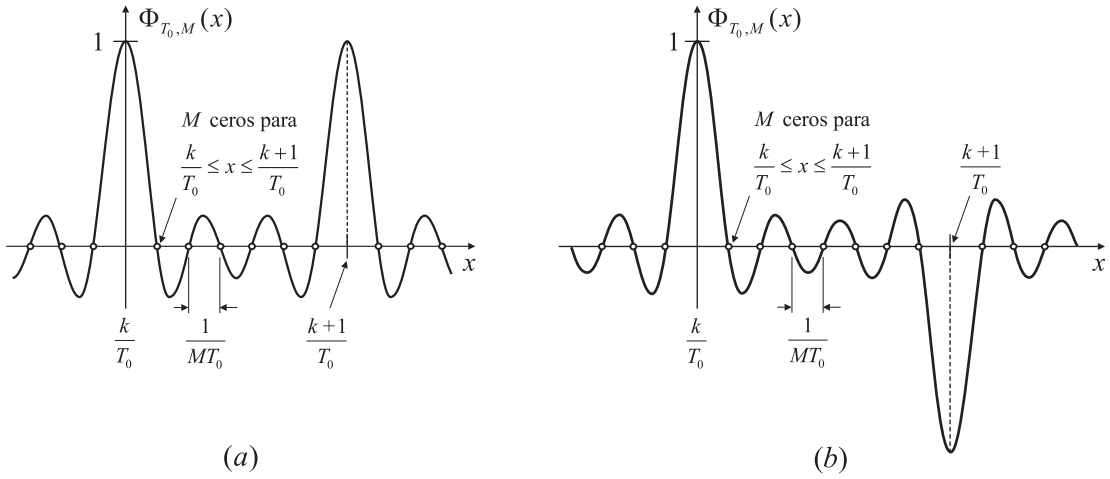


Fig. 2.33. Detalles de la función $\Phi_{T_0,M}(x)$ para M impar (a) y M par (b).

Recordando que $\Sigma_{k=0}^{N}\rho^k = (\rho^{N+1}-1)/(\rho-1)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Phi_{T_0,2N+1}(f) &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi k T_0 f} = \sum_{k=0}^{2N} e^{2\pi(k-N)T_0 f} = \frac{e^{-j2\pi N T_0 f}}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} e^{2\pi k T_0 f} \\
&= \frac{e^{-j2\pi N T_0 f}}{2N+1}\frac{e^{2\pi(2N+1)T_0 f}-1}{e^{2\pi T_0 f}-1} \\
&= \frac{e^{-j2\pi N T_0 f}}{2N+1}\frac{e^{2\pi(2N+1)T_0 f/2}\left[e^{2\pi(2N+1)T_0 f/2} - e^{-2\pi(2N+1)T_0 f/2}\right]}{e^{2\pi T_0 f/2}\left(e^{2\pi T_0 f/2} - e^{-2\pi T_0 f/2}\right)} \\
&= \frac{1}{2N+1}\frac{\operatorname{sen}\left[\pi T_0 (2N+1) f\right]}{\operatorname{sen}(\pi T_0 f)}.
\end{aligned}$$

que se puede generalizar como

$$\Phi_{T_0,M}(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi T_0 M x)}{M \operatorname{sen}(\pi T_0 x)}. \tag{2.68}$$

donde M puede ser un número par o impar, y el cambio de variable f por x permite independizarse de la interpretación frecuencial. Esta función, que aparecerá frecuentemente a lo largo del curso, se denomina *kernel* (*o núcleo*) *de Dirichlet* (Fig. 2.33).

Para los x que son múltiplos de $1/T_0 \doteq f_0$ tanto el numerador como el denominador se anulan. Aplicando l'Hôpital, se encuentra que

$$\Phi_{T_0,M}(x)\big|_{x=k/T_0} = \frac{\cos(\pi M k)}{\cos(\pi k)}, \quad M \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$$

y entonces

$$\Phi_{T_0,M}(x)\big|_{x=k/T_0} = \begin{cases} 1, & k \in \mathbb{Z},\ M \text{ impar}, \\ (-1)^k, & k \in \mathbb{Z},\ M \text{ par}, \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. 2.33(a) y Fig. 2.33(b), respectivamente. También es evidente de (2.68) que la función $\Phi_{T_0,M}(x)$ es periódica, de período $1/T_0$ si M es impar, y de período

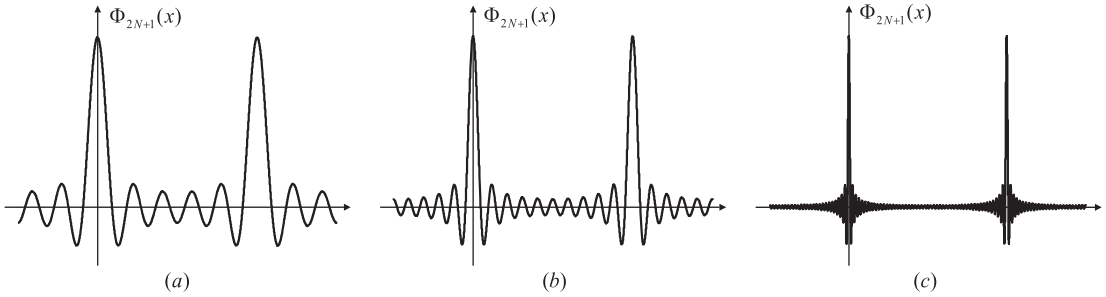


Fig. 2.34. Función $\Phi_{2N+1}(x)$ para distintos valores de N: (a) $N = 5$; (b) $N = 10$; (c) $N = 50$.

$2/T_0$ si M es par:

$$\Phi_{T_0,M}(x) = \begin{cases} \Phi_{T_0,M}\left(x + \frac{1}{T_0}k\right), & k \in \mathbb{Z},\ M \text{ impar}, \\ \Phi_{T_0,M}\left(x + \frac{2}{T_0}k\right), & k \in \mathbb{Z},\ M \text{ par}. \end{cases}$$

Además, se puede comprobar que

$$\int_0^{1/T_0} \Phi_{T_0,M}(x)\,dx = \frac{1}{MT_0}, \qquad \text{si } M \text{ es impar},$$
$$\int_0^{2/T_0} \Phi_{T_0,M}(x)\,dx = 0, \qquad \text{si } M \text{ es par},$$

como sugiere la Fig. 2.33.

La función (2.68) presenta $M-1$ ceros por período, que ocurren para los valores x_i que satisfacen

$$x_i = \frac{k}{T_0}\left(1 + \frac{i}{M}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, M. \tag{2.69}$$

donde $k/T_0 \leq x < (k+1)/T_0$, $k \in \mathbb{Z}$. En realidad, el numerador se anula M veces por período, pero uno de esos ceros, ubicado en $x = k/t_0$ [correspondiente a $i = 0$ en (2.69)], se "cancela" con el cero del denominador: son los puntos que deben evaluarse aplicando la regla de l'Hôpital.

La transformada del tren de pulsos aplicando el núcleo de Dirichlet

Retomando el análisis de la transformada del tren de pulsos, se deduce de (2.67) que la transformada del tren de $2N+1$ pulsos está dada por el producto de la transformada de un pulso [ecuación (2.65)] y la función $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ escalada por $(2N+1)$. O, en otras palabras, la transformada del tren de pulsos es la función $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ *modulada* por la transformada del pulso. Esta es la médula del análisis precedente, y bajo esta luz puede explicarse la Fig. 2.32 a partir de las Figs. 2.18 y 2.34. Lo interesante es que el análisis de la función $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ permite comprender mejor que en el límite, cuando $N \to \infty$, la función $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ tiende a un tren de impulsos en frecuencia, equiespaciados $1/T_0$ unidades entre sí

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1)\Phi_{T_0,2N+1}(f) = \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right),$$

como se muestra en la Fig. 2.34 para distintos valores de N. En efecto, tal como fue detallado en el análisis de la función $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$, esta función tiene $2N$ ceros por período. De modo que a medida que $N \to \infty$ la función será virtualmente nula en todo el período, excepto en aquellos puntos donde se anulen *simultáneamente* el numerador y denominador de la función, que, tal como fue explicado precedentemente, ocurre para múltiplos enteros de $1/T_0$.

Debe tenerse en cuenta que, mientras N sea finito, la función temporal *no será periódica*, de modo que, aunque $\tau \to 0$, la transformada de Fourier de $2N+1$ pulsos se asemeja a las gráficas de la Fig. 2.34, y no precisamente a un tren de impulsos. Además, a medida que el número de pulsos aumenta, se incrementa proporcionalmente el valor medio de la señal, y en consecuencia el valor de la transformada en $f = 0$ es $2N+1$, tal como se aprecia en la Fig. 2.34.

Finalmente, en el caso que $N \to \infty$, la función temporal es *periódica*, la función $\Phi(f)$ converge a un tren de impulsos periódicos, y en consecuencia, se comprueba la validez de la relación (2.63). La convergencia de funciones continuas como las $\Phi_{T_0,2N+1}(x)$ a una función discontinua como el tren de impulsos se estudiará en la Sección 2.7.

2.5. Propiedades de la transformada de Fourier

Un conjunto de propiedades de las transformadas de Fourier son básicas en el tratamiento de señales. Tan importante como el conocimiento matemático de las mismas es una adecuada interpretación visual. En esta sección se desarrollará no sólo la teoría de los pares transformados básicos, sino también se hará especial hincapié en el significado de estas propiedades. Para ellos se utilizarán muchos ejemplos analíticos y gráficos.

2.5.1. Linealidad

Si $x(t)$ e $y(t)$ tienen transformadas de Fourier $X(f)$ e $Y(f)$, respectivamente, entonces la suma $ax(t) + by(t)$ donde a, b son números complejos, tiene transformada de Fourier $aX(f) + bY(f)$. Esta propiedad se deduce fácilmente:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [a\,x(t) + b\,y(t)]\, e^{-j2\pi ft} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} a\,x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} b\,y(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \\ &= a\,X(f) + b\,Y(f),\end{aligned}$$

lo que permite obtener el par transformado

$$a\,x(t) + b\,y(t) \quad \Leftrightarrow \quad a\,X(f) + b\,Y(f).$$

Esta relación es importante porque refleja la posibilidad de aplicar la transformada de Fourier al análisis de sistemas lineales.

EJEMPLO **2.20. Propiedad de linealidad**
Dados los pares transformados de Fourier

$$\begin{aligned} x(t) = K &\quad \Leftrightarrow \quad X(f) = K\delta(t), \\ y(t) = A\cos(2\pi f_0 t) &\quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = \tfrac{A}{2}\delta(f - f_0) + \tfrac{A}{2}\delta(f + f_0). \end{aligned}$$

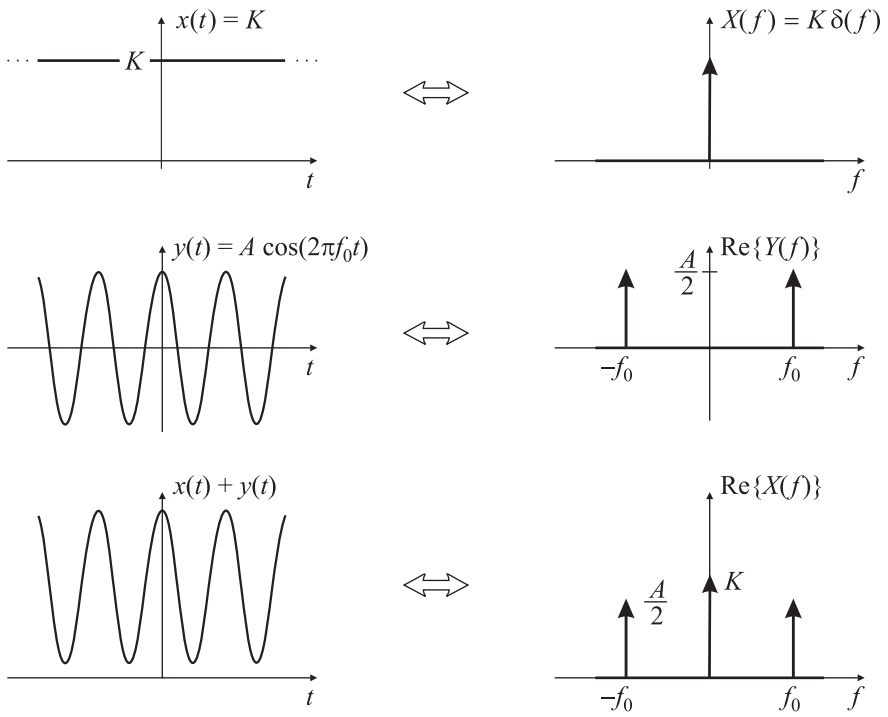


Fig. 2.35. La propiedad de linealidad.

por la propiedad de linealidad se verifica que

$$x(t) + y(t) = K + A\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow X(f) = K\delta(t) + \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0).$$

La Fig. 2.35(a), (b) y (c) ilustra cada uno de los pares transformados de Fourier. □

2.5.2. Escalado en tiempo

Si la transformada de Fourier de $x(t)$ es $X(f)$, entonces la transformada de $x(kt)$, donde k es una constante real mayor que cero, se puede determinar reemplazando $\tau = kt$ en la ecuación de análisis

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(kt)\, e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau/k} \frac{d\tau}{k} = \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right).$$

Para k negativos, el término de la derecha cambia de signo porque cambian los límites de integración, pero como también cambia el signo del diferencial dt, el resultado final no cambia. Entonces el escalado en tiempo resulta en el par transformado de Fourier

$$x(kt) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right).$$

EJEMPLO **2.21. Propiedad de escalado en tiempo**
La propiedad de escalado en tiempo es muy conocida en varias ramas de la ciencia. Como se observa

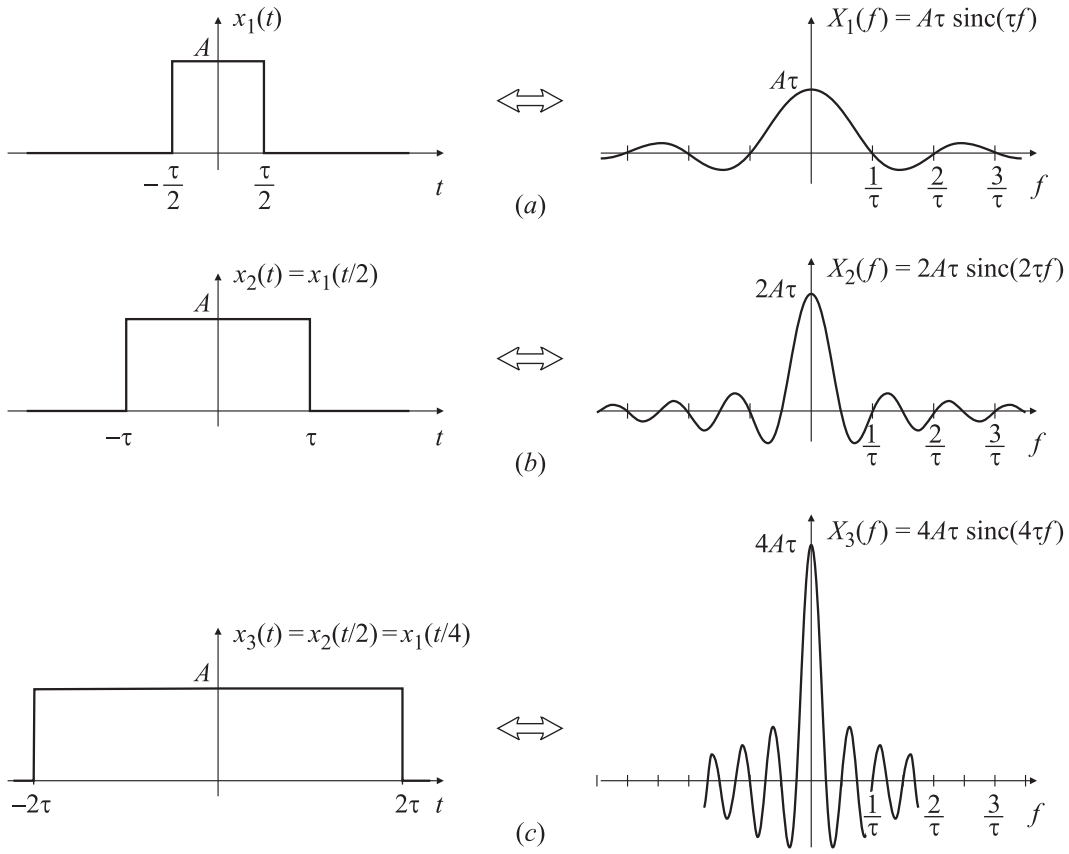


Fig. 2.36. Propiedad de escalado en tiempo.

en la Fig. 2.36, una expansión de la escala temporal se corresponde con una compresión de escala en el eje de frecuencias. En la Fig. 2.36(a) se muestra el par transformado de Fourier correspondiente a un pulso rectangular. El pulso $x_1(t)$ tiene "altura" A y ancho τ, y su transformada es un sinc$(\cdot)$ de altura $A\tau$, y con ceros cada $1/\tau$: esto es, $X_1(f) = A\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f)$. En la Fig. 2.36$(b)$ se representa un pulso $x_2(t)$ de la misma altura, pero del doble de ancho. El área del pulso corresponde a la amplitud máxima de su transformada de Fourier, que será un sinc$(\cdot)$ de altura $A(2\tau)$, con ceros que se repiten cada la inversa del ancho del pulso; en este caso cada $1/(2\tau)$. Por lo tanto, la transformada de Fourier de este pulso es

$$X_2(f) = A(2\tau)\,\mathrm{sinc}[(2\tau)f]. \tag{2.70}$$

De las figuras es evidente que $x_2(t) = x_1(t/2)$, es decir que $x_2(t)$ es una versión *escalada en el tiempo* de $x_1(t)$, con $k = 1/2$. De acuerdo a la propiedad de escalado en el tiempo de la transformada de Fourier, resulta que

$$x_2(t) = x_1(t/2) \quad \Leftrightarrow \quad X_2(f) = \frac{1}{|k|} X_1\left(\frac{f}{k}\right) = 2X_1(2f) = 2(A\tau)\,\mathrm{sinc}[\tau(2f)],$$

que coincide con la expresión (2.70). En la Fig. 2.36(c) se representa la señal $x_3(t)$, que puede pensarse como un escalado por $(1/4)$ de $x_1(t)$ o un escalado por $(1/2)$ de $x_2(t)$, y su correspondiente par transformado $X_3(f)$

Debe notarse que a medida que se expande la escala temporal, no sólo se contrae la escala frecuencial sino que la amplitud de la transformada se incrementa de modo de mantener el área constante (recuerde que el área bajo la transformada es igual al valor de la función temporal en el origen $t = 0$). Esta es efecto muy conocido en la teoría de antenas y radar. □

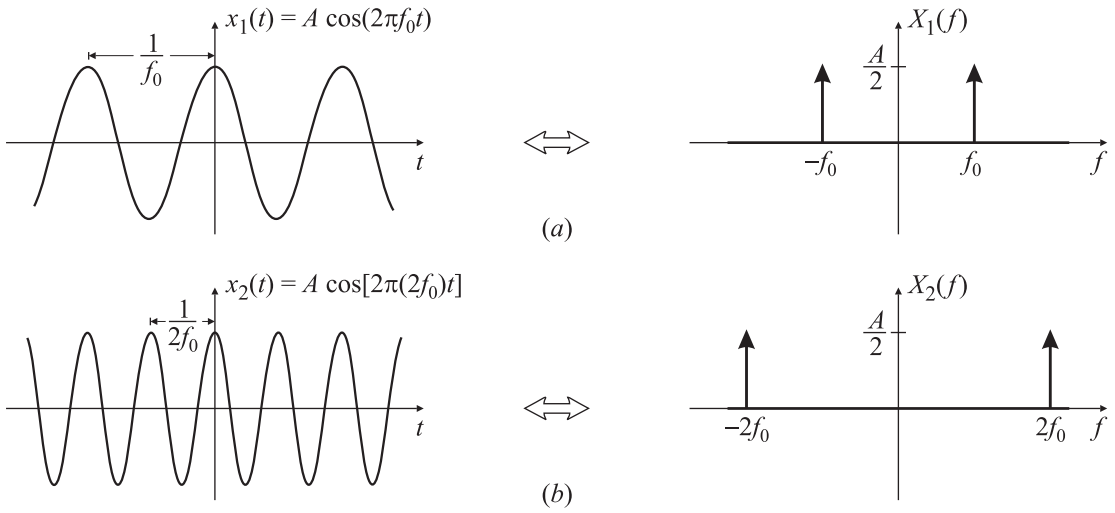


Fig. 2.37. Propiedad de escalado en tiempo: el caso de los impulsos.

Si en algunos de los pares transformados aparecen impulsos, la propiedad de escalado se aplica exactamente igual, pero prestando atención a la propiedad de escalado del impulso: $\delta(at) = \delta(t)/|a|$ (Sección 2.3.4, Propiedad 2).

EJEMPLO **2.22. Propiedad de escalado cuando intervienen impulsos**
En la Fig. 2.37(a) se representa la señal $x_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ y su transformada de Fourier $X_1(f) = (A/2)\delta(f+f_0) + (A/2)\delta(f-f_0)$. Si $x_2(t)$ es una versión escalada en tiempo de x_1, por ejemplo, $x_2(t) = x_1(2t) = A\cos[2\pi f_0(2t)]$, la señal resultante es un coseno de igual amplitud que $x_1(t)$ pero de frecuencia doble. Por lo tanto, su transformada es $X_2(f) = (A/2)\delta(f+2f_0) + (A/2)\delta(f-2f_0)$. La aplicación "ingenua" de la propiedad de escalado en tiempo podría sugerir que se afecta la amplitud de la transformada; pero en realidad esto no ocurre por la propiedad de escalado del impulso. En efecto, si $x_2(t) = x_1(2t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} X_2(f) &= \frac{1}{2}X_1\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{2}\delta\left(\frac{f}{2}+f_0\right) + \frac{A}{2}\delta\left(\frac{f}{2}-f_0\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{A}{2}\delta\left[\tfrac{1}{2}(f+2f_0)\right] + \frac{A}{2}\delta\left[\tfrac{1}{2}(f-2f_0)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{A}{2}2\delta(f+2f_0) + \frac{A}{2}2\delta(f-2f_0)\right\}, \text{ por la propiedad de escalado de } \delta(t) \\ &= \frac{A}{2}\delta(f+2f_0) + \frac{A}{2}\delta(f-2f_0), \end{aligned}$$

expresión que coincide con la derivada más arriba, y que se representa en la Fig. 2.37(b). □

2.5.3. Escalado en frecuencia

Si la transformada inversa de Fourier de $X(f)$ es $x(t)$, entonces la transformada inversa de $X(kf)$, donde k es una constante real, está dada por el par transformado

$$\frac{1}{|k|}x\left(\frac{t}{k}\right) \quad \Leftrightarrow \quad X(kf)$$

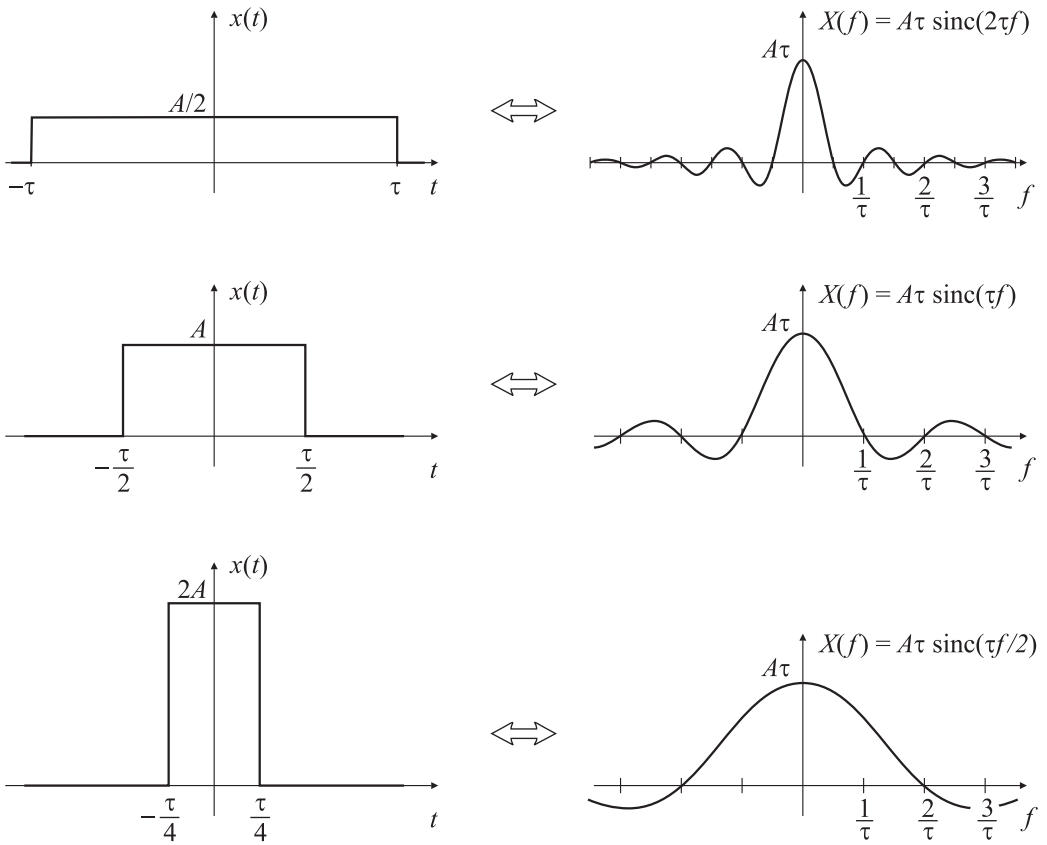


Fig. 2.38. Propiedad de escalado en frecuencia.

Esta relación se puede determinar sustituyendo $\phi = kf$ en la ecuación de síntesis

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(kt)\, e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)\, e^{j2\pi\phi t/k} \frac{d\phi}{k} = \frac{1}{|k|} x\left(\frac{t}{k}\right).$$

Nuevamente, para impulsos escalados en frecuencia, debe tenerse en cuenta que $\delta(af) = \delta(f)/|a|$.

EJEMPLO **2.23. Propiedad de escalado en frecuencia**
Análogamente al escalado en tiempo, la expansión de la escala de frecuencias resulta en una compresión de la escala de tiempos. Este efecto se aprecia en la Fig. 2.38. Note que a medida que el eje de frecuencia se expande, la amplitud de la función temporal se incrementa de modo de mantener constante el área cubierta por al función temporal: recuerde que este área es igual al valor de la transformada en el origen $f = 0$, que en este caso se mantiene constante e igual a $2AT_0$. Este resultado también puede obtenerse aplicando la propiedad de dualidad, que se verá más adelante, y la propiedad de escalado en tiempo. □

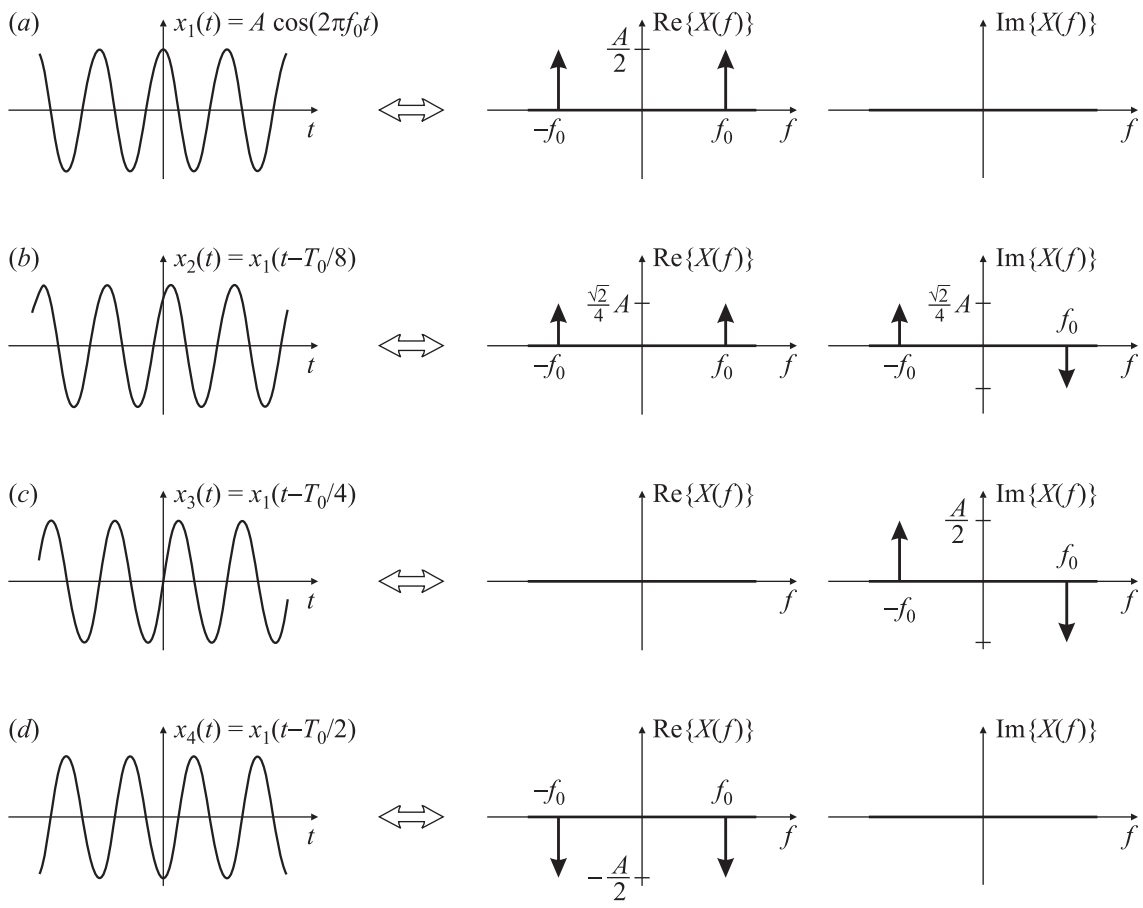


Fig. 2.39. Propiedad de desplazamiento temporal.

2.5.4. Desplazamiento temporal

Si $x(t)$ se desplaza temporalmente t_0 unidades de tiempo, sustituyendo $s = t - t_0$ la transformada de Fourier resulta

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi ft} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\, e^{-j2\pi f(s+t_0)} ds \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\, e^{-j2\pi fs} ds \\ &= e^{-j2\pi ft_0} X(f),\end{aligned}$$

y el par transformado de Fourier de una señal desplazada en el tiempo es

$$x(t-t_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(f)\, e^{-j2\pi ft_0}. \tag{2.71}$$

EJEMPLO **2.24. Propiedad de desplazamiento temporal**
El espectro de la señal $x_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ es $X_1(f) = (A/2)\delta(f+f_0) + (A/2)\delta(f-f_0)$, como muestra la Fig. 2.39(a). En la Fig. 2.39(b) se grafica $x_2(t)$ que es $x_1(t)$ desplazada $T_0/8$ unidades de tiempo. Es evidente que

$$\begin{aligned}x_2(t) &= x_1(t - T_0/8) = A\cos\left[2\pi f_0(t - T_0/8\right] \\ &= A\cos(2\pi f_0 t - \pi/4).\end{aligned}$$

El espectro de $x_2(t)$ es $X_2(f) = e^{-j2\pi f(T_0/8)}X_1(f)$. Operando se encuentra que

$$\begin{aligned} X_2(f) &= e^{-j2\pi f(T_0/8)}\left[(A/2)\delta(f+f_0) + (A/2)\delta(f-f_0)\right] \\ &= (A/2)e^{-j2\pi(-f_0)(T_0/8)}\delta(f+f_0) + (A/2)e^{-j2\pi(f_0)(T_0/8)}\delta(f-f_0) \\ &= (A/2)e^{j\pi/4}\delta(f+f_0) + (A/2)e^{-j\pi/4}\delta(f-f_0) \\ &= \left(A\tfrac{\sqrt{2}}{4} + jA\tfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\delta(f+f_0) + \left(A\tfrac{\sqrt{2}}{4} - jA\tfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\delta(f-f_0). \end{aligned}$$

De manera similar puede encontrarse que para $x_3(t) = x_1(t - T_0/4)$ es $X_3(f) = e^{-j2\pi f(T_0/4)}X_1(f)$, de donde

$$X_3(f) = j\tfrac{A}{2}\delta(f+f_0) - j\tfrac{A}{2}\delta(f-f_0),$$

como se muestra en la Fig. 2.39(c). Finalmente,

$$\begin{aligned} x_4(t) &= x_1(t - T_0/2) = A\cos\left[2\pi f_0(t - T_0/2\right] \\ &= A\cos(2\pi f_0 t - \pi) = -A\cos(2\pi f_0 t - \pi) = -x_1(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X_4(f) &= e^{-j2\pi f(T_0/2)}X_1(f) \\ &= e^{-j\pi f T_0}(A/2)\delta(f+f_0) + e^{-j\pi f T_0}(A/2)\delta(f-f_0) \\ &= -\tfrac{A}{2}\delta(f+f_0) - \tfrac{A}{2}\delta(f-f_0), \end{aligned}$$

como ilustra la Fig. 2.39(d).

Los casos presentados revelan que el corrimiento temporal resulta en un cambio de fase $\theta(f) = \arctan\left[\mathrm{Im}(f)/\mathrm{Re}(f)\right]$, sin alterar el módulo de la transformada de Fourier. □

2.5.5. Desplazamiento frecuencial (modulación)

Si $X(f)$ se desplaza en frecuencia f_0 Hz, su transformada inversa queda multiplicada por $e^{j2\pi f_0 t}$:

$$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad X(f - f_0). \tag{2.72}$$

Este par transformado puede obtenerse sustituyendo $s = f - f_0$ en la ecuación de síntesis

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} X(f-f_0)\, e^{j2\pi f t} df &= \int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, e^{j2\pi t(s+f_0)} ds \\ &= e^{j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, e^{-j2\pi t s} ds \\ &= e^{j2\pi f_0 t} x(t). \end{aligned}$$

EJEMPLO **2.25. Propiedad de modulación**
Para ilustrar el efecto del desplazamiento en frecuencia, supongamos que la función $x_1(t)$ es real, como muestra la Fig. 2.40(a), y que su espectro $X_1(f)$ se desplaza en frecuencia $\pm f_0$ unidades a izquierda y derecha del origen, respectivamente, atenuando su amplitud a la mitad [Fig. 2.40(b)]. Este nuevo espectro $X_2(f)$ está dado entonces por

$$X_2(f) = \frac{1}{2}X_1(f+f_0) + \frac{1}{2}X_1(f-f_0),$$

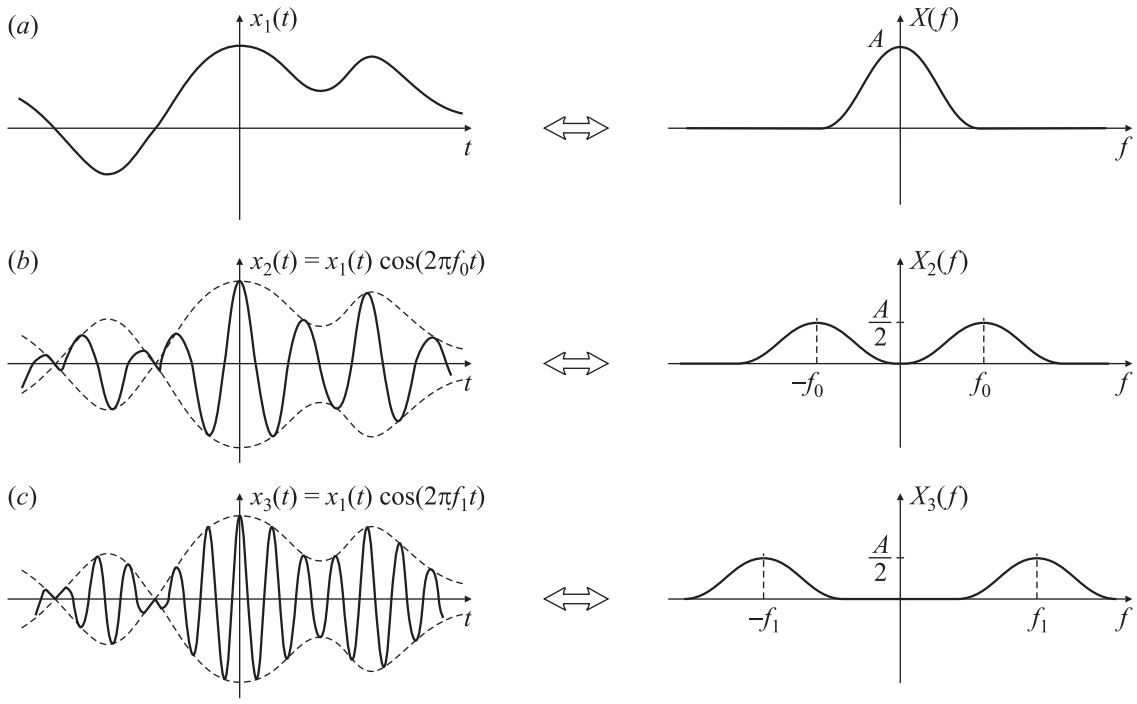


Fig. 2.40. Propiedad de desplazamiento en frecuencia (modulación).

de modo que la función temporal correspondiente es

$$x_2(t) = \frac{1}{2}x_1(t)\,e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}x_1(t)\,e^{j2\pi f_0 t} = x_1(t)\cos 2\pi f_0 t.$$

El desplazamiento frecuencial (en ambos sentidos) resulta en la multiplicación de la función temporal $x_1(t)$ por un coseno cuya frecuencia está determinada por el corrimiento f_0, como se representa en la Fig. 2.40(b). Cuanto mayor sea el desplazamiento frecuencial, mayor será la frecuencia de la *portadora*, como ilustra la Fig. 2.40(c). Este proceso, conocido como *modulación*, es fundamental para la transmisión de información sobre distintos medios; más adelante, en la Sección 2.6.5, se interpretará esta propiedad utilizando otras herramientas. □

2.5.6. Formulación alternativa de la ecuación de síntesis

La ecuación de síntesis

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,e^{j2\pi f t}df,$$

también puede escribirse como

$$x(t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\,e^{-j2\pi f t}df\right]^*,$$

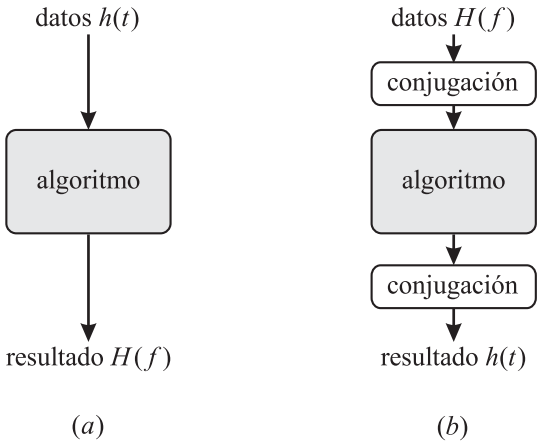


Fig. 2.41. (a) Cálculo de la transformada directa de Fourier. (b) Cálculo de la transformada inversa utilizando el mismo algoritmo que para el cálculo de la transformada directa.

donde $X^*(f)$ es el complejo conjugado de $X(f)$. La verificación de la propiedad es trivial:

$$\begin{aligned}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\, e^{-j2\pi ft} df\right]^* &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[X^*(f)\, e^{-j2\pi ft}\right]^* df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [X^*(f)]^* \left(e^{-j2\pi ft}\right)^* df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df \\ &= x(t).\end{aligned}$$

La importancia de la formulación alternativa es que ahora tanto la transformada de Fourier como la transformada inversa comparten el mismo término $e^{-j2\pi ft}$ (es decir, tienen el mismo núcleo o kernel). Esta similaridad es de considerable importancia en el desarrollo de programas que permitan calcular de manera rápida la transformada de Fourier. Observe que si se dispone de un algoritmo que calcule la transformada directa de Fourier, el mismo algoritmo puede utilizarse para calcular la transformada inversa: basta con ingresar como dato el conjugado de la transformada $Y^*(f)$, y conjugar el resultado entregado por el algoritmo para obtener la antitransformada $x(t)$, como se muestra en la Fig. 2.41.

2.5.7. Funciones pares

Si $x_e(t)$ es una función par del tiempo, es decir $x_e(t) = x_e(-t)$, entonces la transformada de Fourier de $x_e(t)$ es una función par y real:

$$x_e(t) \quad \Leftrightarrow \quad R_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft)\, dt.$$

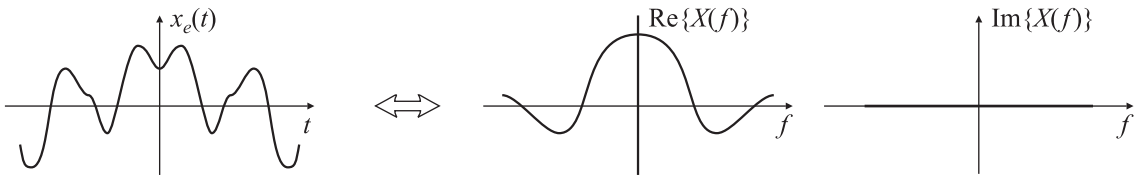


Fig. 2.42. Par transformado de Fourier de una función par.

El par transformado se obtiene de manera trivial:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft)\ dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \operatorname{sen}(2\pi ft)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft)\ dt = R_e(f). \end{aligned}$$

La parte imaginaria se anula ya que el integrando es una función impar. Como $\cos(2\pi ft)$ es una función par, $x_e(t)\cos(2\pi ft) = x_e(t)\cos[2\pi(-f)t]$ y entonces, $X_e(f) = X_e(-f)$: la transformada es par. De manera similar, si $X(f)$ es una función real y par de la frecuencia, la fórmula de síntesis permite obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_e(f)\ e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} R_e(f)\ e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_e(f) \cos(2\pi ft)\ df + j \int_{-\infty}^{\infty} R_e(f)\ \operatorname{sen}(2\pi ft)\ df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_e(f) \cos(2\pi ft)\ df = x_e(t). \end{aligned}$$

EJEMPLO **2.26. Funciones pares**
Como se muestra en la Fig. 2.42, la transformada de Fourier de una función par es una función real y par de la frecuencia; recíprocamente, la transformada inversa de Fourier de una función real y par de la frecuencia es una función par del tiempo. □

2.5.8. Funciones impares

Si $x_o(t) = -x_o(-t)$, entonces $x_o(t)$ es una función impar del tiempo, y su transformada de Fourier es una función impar e imaginaria:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\ e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \cos(2\pi ft)\ dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\ \operatorname{sen}(2\pi ft)\ dt \\ &= -j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\ \operatorname{sen}(2\pi ft)\ dt = jI_o(f). \end{aligned}$$

El integrando real es nulo ya que la multiplicación de una función par por una impar es una función impar. Como $\operatorname{sen}(2\pi ft)$ es una función impar, $x_o(t)\ \operatorname{sen}(2\pi ft) =$

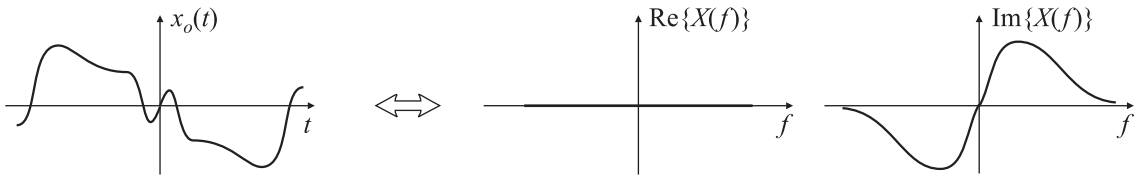


Fig. 2.43. Par transformado de Fourier de una función impar.

$-x_o(t)\,\mathrm{sen}\,[2\pi(-f)\,t]$ y entonces, $x_o(f) = -x_o(-f)$: la transformada es impar. Análogamente, si $X(f)$ es una función impar e imaginaria, la fórmula de síntesis permite obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df \\ &= j\int_{-\infty}^{\infty} I_o(f)\, e^{j2\pi ft} df \\ &= j\int_{-\infty}^{\infty} I_o(f)\cos(2\pi ft)\, df + j\int_{-\infty}^{\infty} jI_o(f)\,\mathrm{sen}\,(2\pi ft)\, df \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} I_o(f)\,\mathrm{sen}\,(2\pi ft)\, df = x_o(t), \end{aligned}$$

y la función $x_o(t)$ resultante es impar. El par transformado de Fourier está dado por

$$x_o(t) \quad \Leftrightarrow \quad jI_o(f) = -j\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\,\mathrm{sen}\,(2\pi ft)\, dt.$$

EJEMPLO **2.27. Funciones impares**
Un ejemplo de este par transformado se muestra en la Fig. 2.43. La función $x(t)$ es impar en t; por lo tanto, la transformada de Fourier es impar (en f) y imaginaria. Recíprocamente, si la transformada $X(f)$ es imaginaria e impar en f, la transformada inversa de Fourier es una función temporal impar en t. □

2.5.9. Descomposición de ondas

Una función arbitraria puede descomponerse de manera única como la suma de una función par y otra impar:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] + \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \\ &= x_e(t) + x_o(t). \end{aligned} \tag{2.73}$$

donde

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \tag{2.74}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]. \tag{2.75}$$

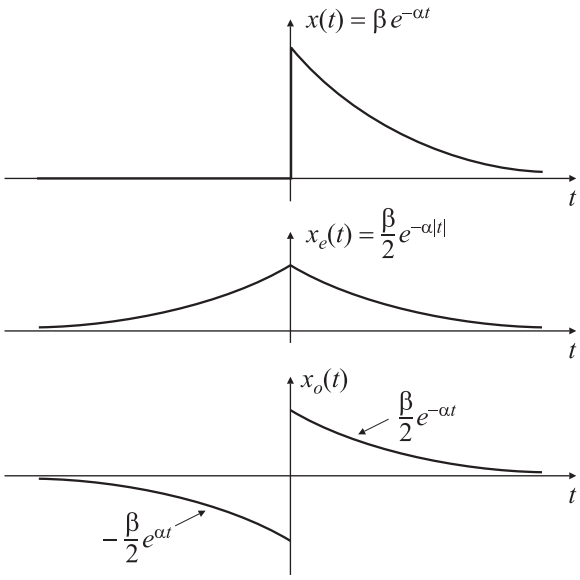


Fig. 2.44. Propiedad de descomposición de ondas.

Las ecuaciones (2.74) y (2.75) son las definiciones de funciones pares e impares, respectivamente. En consecuencia, en base a las propiedades anteriores, la transformada de Fourier de (2.73) es

$$X(f) = R(f) + jI(f) = X_e(f) + X_o(f),$$

donde $X_e(f) = R(f)$ y $X_o(f) = jI(f)$. Más adelante se verá que esta descomposición puede utilizarse para acelerar el cálculo de la transformada de Fourier.

EJEMPLO **2.28. Descomposición de ondas**
Para demostrar el concepto de la descomposición de formas de onda, consideremos la función exponencial

$$x(t) = \beta e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0,\ t \geq 0. \tag{2.76}$$

Procediendo como en (2.73), se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\beta}{2} e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{2} e^{-\alpha t} = \frac{\beta}{2}\left[\left(e^{-\alpha t}\right)_{t\geq 0} + \left(e^{\alpha t}\right)_{t\leq 0}\right] + \frac{\beta}{2}\left[\left(e^{-\alpha t}\right)_{t\geq 0} - \left(e^{\alpha t}\right)_{t\leq 0}\right] \\ &= \frac{\beta}{2} e^{-\alpha|t|} + \frac{\beta}{2}\left[\left(e^{-\alpha t}\right)_{t\geq 0} - \left(e^{\alpha t}\right)_{t\leq 0}\right] \\ &= x_e(t) + x_o(t), \end{aligned}$$

donde

$$x_e(t) = \frac{\beta}{2} e^{-\alpha|t|}, \qquad x_o(t) = \frac{\beta}{2}\left[\left(e^{-\alpha t}\right)_{t\geq 0} - \left(e^{\alpha t}\right)_{t\leq 0}\right].$$

La Fig. 2.44 muestra la descomposición en funciones pares e impares. El espectro de la función (2.76) ya fue calculado en el Ejemplo 2.5; la descomposición de ondas permite calcular sin gran esfuerzo el espectro $X_e(f)$ de $x_e(t)$ y $X_o(f)$ de $x_o(t)$. Como $x_e(t)$ es par, de acuerdo a la Propiedad 2.5.7 su espectro es real, y como $x_o(t)$ es impar su espectro es imaginario (Propiedad 2.5.8). A su vez,

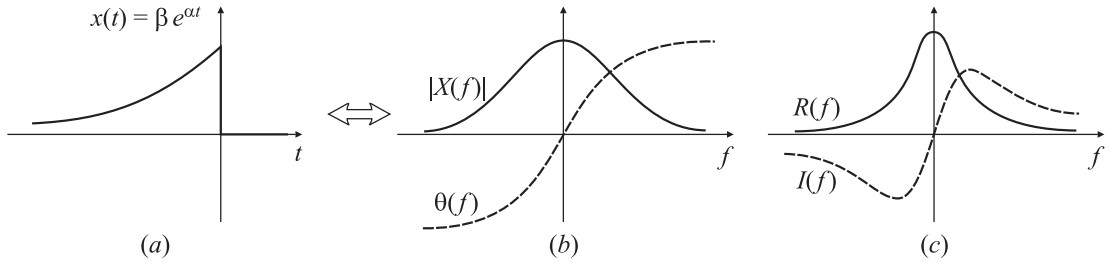


Fig. 2.45. (*a*) Pulso exponencial creciente $x(t) = \beta e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t < 0$. (*b*) Representación módulo/fase y (*c*) parte real/imaginaria de la transformada de Fourier (comparar con la Fig. 2.14).

$X(f) = X_e(f) + X_o(f)$. En consecuencia,

$$x_e(t) \quad \Leftrightarrow \quad X_e(f) = \mathrm{Re}[X(f)] = \frac{\beta\alpha}{a^2 + (2\pi f)^2},$$
$$x_o(t) \quad \Leftrightarrow \quad X_o(f) = j\,\mathrm{Im}[X(f)] = \frac{-j\beta 2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}.$$ □

EJEMPLO **2.29. Transformada de un pulso exponencial creciente**
La descomposición de ondas también puede utilizarse para calcular el espectro del pulso exponencial creciente

$$y(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t \le 0,\ \alpha > 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Haciendo referencia a las funciones $x_e(t)$ y $x_o(t)$ del Ejemplo previo, es evidente que $y(t) = 2x_e(t) - x(t)$, y en consecuencia, $Y(f) = 2X_e(f) - X(f)$. Como

$$X(f) = \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} - j\frac{2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2},$$
$$X_e(f) = \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2},$$

resulta

$$\begin{aligned} Y(f) &= 2X_e(f) - X(f) \\ &= \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} + j\frac{2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2} \\ &= X^*(f) \end{aligned}$$

de modo que el espectro del pulso exponencial creciente es el conjugado del espectro del Ejemplo 2.5, es decir que se invierte el signo de la fase (Fig. 2.45). Compare con el espectro de $X(f)$ que se muestra en la Fig. 2.14. □

2.5.10. Propiedades para funciones complejas

Para simplificar la presentación, hasta el momento sólo se han considerado funciones temporales que toman valores reales. La transformada de Fourier, la transformada inversa y sus propiedades son aplicables también para el caso en que $h(t)$ sea una función temporal que tome valores complejos. Si

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t),$$

donde $x_r(t)$ es la parte real de $x(t)$ y $x_i(t)$ es la parte imaginaria de $x(t)$, la transformada de Fourier resulta

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t) + jx_i(t)]\, e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t)\cos(2\pi ft) + x_i(t)\,\text{sen}(2\pi ft)]\, dt \\ &\quad -j\int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t)\,\text{sen}(2\pi ft) - x_i(t)\cos(2\pi ft)]\, dt \\ &= R(f) + jI(f). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t)\,\cos(2\pi ft) + x_i(t)\,\text{sen}(2\pi ft)]\, dt, \\ I(f) &= -\int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t)\,\text{sen}(2\pi ft) - x_i(t)\,\cos(2\pi ft)]\, dt. \end{aligned}$$

De manera análoga, la fórmula de síntesis para funciones complejas permite obtener

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [R(f)\,\cos(2\pi ft) - I(f)\,\text{sen}(2\pi ft)]\, df, \\ x_i(t) &= -\int_{-\infty}^{\infty} [R(f)\,\text{sen}(2\pi ft) + I(f)\,\cos(2\pi ft)]\, df. \end{aligned}$$

Si $x(t)$ es real, entonces $x(t) = x_r(t)$ [$x_i(t) \equiv 0$], y las partes real e imaginaria de las transformada de Fourier son

$$R_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_r(t)\,\cos(2\pi ft)\, dt, \tag{2.77}$$

$$I_o(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x_r(t)\,\text{sen}(2\pi ft)\, dt. \tag{2.78}$$

En este caso, $R_e(f)$ es una función par (de la frecuencia) ya que $R_e(f) = R_e(-f)$; análogamente, como $I_o(f) = -I_o(-f)$, la transformada $I_o(f)$ es impar.

Si $x(t)$ es imaginaria pura, $x(t) = jx_i(t)$ [$x_r(t) \equiv 0$], y entonces

$$R_o(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\,\text{sen}(2\pi ft)\, dt, \tag{2.79}$$

$$I_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\,\cos(2\pi ft)\, dt. \tag{2.80}$$

Ahora, $R_o(f)$ es una función impar de la frecuencia, e $I_e(f)$ es una función par. En la Tabla 2.4 se listan diferentes propiedades de simetría de funciones temporales complejas y las características de sus correspondientes transformadas de Fourier.

EJEMPLO **2.30. Determinación simultánea de la transformada de dos funciones reales**
Se pueden utilizar las relaciones (2.77)-(2.80) para determinar *simultáneamente* la transformada de Fourier de *dos* señales reales. Para ilustrar esto, consideremos dos funciones reales $x(t)$ y $y(t)$.

Tabla 2.4: Propiedades de la Transformada de Fourier para funciones complejas.

Dominio tiempo $x(t)$	Dominio frecuencia $X(f)$
real	Parte real: par
	Parte imaginaria: impar
imaginaria	Parte real: impar
	Parte imginaria: par
Parte real: par	real
Parte imaginaria: impar	
Parte real: impar	imaginaria
Parte imaginaria: par	
real y par	real y par
real e impar	imaginaria e impar
imaginaria y par	imaginaria y par
imaginaria e impar	real e impar
compleja y par	compleja y par
compleja e impar	compleja e impar

Sean ahora $h(t) = x(t)$ y $g(t) = jy(t)$; entonces $H(f) = X(f)$, y $G(f) = jY(f)$. Como $h(t)$ es real, de (2.77)-(2.78) se tiene que

$$h(t) = x(t) \quad \Leftrightarrow \quad H(f) = X(f) = R_e(f) + jI_o(f).$$

Análogamente, como $g(t)$ es imaginaria,

$$g(t) = jy(t) \quad \Leftrightarrow \quad G(f) = jY(f) = R_o(f) + jI_e(f).$$

Entonces,

$$x(t) + jy(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) + jY(f),$$

donde

$$X(f) = R_e(f) + jI_o(f), \qquad Y(f) = I_e(f) - jR_o(f). \tag{2.81}$$

De modo que si $z(t) = h(t) + g(t) = x(t) + jy(t)$, la transformada de Fourier de $z(t)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} Z(f) &= R(f) + jI(f) \\ &= \frac{1}{2}[R(f) + R(-f)] + \frac{1}{2}[R(f) - R(-f)] + j\frac{1}{2}[I(f) + I(-f)] + j\frac{1}{2}[I(f) - I(-f)], \end{aligned}$$

y de acuerdo con (2.81)

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2}[R(f) + R(-f)] + j\frac{1}{2}[I(f) - I(-f)], \\ Y(f) &= \frac{1}{2}[I(f) + I(-f)] - j\frac{1}{2}[R(f) - R(-f)]. \end{aligned}$$

Entonces es posible separar el espectro $Z(f)$ de la función compuesta en las transformadas de Fourier de cada una de las señales reales, $x(t)$ y $y(t)$, tal como se observa en la Fig. 2.46. Como veremos más adelante, esta idea puede explotarse para incrementar la velocidad de cálculo de la transformada discreta de Fourier. □

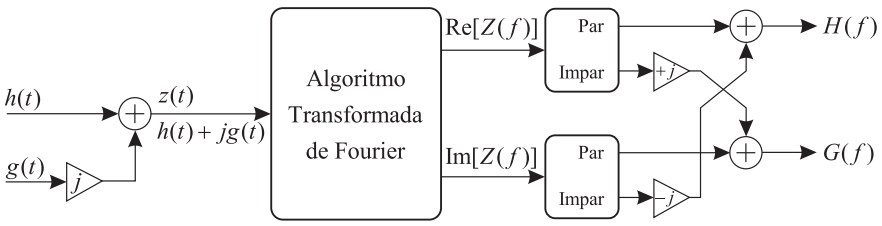


Fig. 2.46. Esquema para el cálculo simultáneo de la transformada de Fourier de dos señales reales.

2.5.11. Diferenciación e integración

Si $x(t)$ es una señal con transformada de Fourier $X(f)$, diferenciado ambos lados de la ecuación de síntesis se obtiene

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi f X(f) e^{j2\pi ft} df,$$

que establece el par transformado

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad j2\pi f X(f). \tag{2.82}$$

Esta es una propiedad particularmente importante porque reemplaza la operación de diferenciación en el dominio temporal por una multiplicación por $j2\pi f$ en el dominio frecuencial, lo que facilita el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo descriptos por ecuaciones diferenciales.

Ya que la diferenciación en tiempo corresponde a una multiplicación por $j2\pi f$ en el dominio frecuencial, uno puede esperar que la integración involucre la división por $j2\pi f$ en el dominio frecuencial. La relación precisa es

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f). \tag{2.83}$$

El impulso en la expresión de la transformada refleja el comportamiento de continua o valor promedio que puede resultar por la integración.

EJEMPLO **2.31. Transformada de un escalón unitario**
Aplicando la Propiedad 2.5.9 de descomposición de ondas, se calculará la transformada de Fourier del escalón unitario que se muestra en la Fig. 2.47, donde se ha graficado la descomposición par-impar de $u(t)$, que puede escribirse como

$$u(t) = u_e(t) + u_o(t) = \frac{1}{2} + \left[u(t) - \frac{1}{2} \right],$$

con $u_e(t) = 1/2$ y $u_o(t) = u(t) - 1/2$. Consideremos primero la parte impar $u_o(t)$. Como $u_o'(t) = u'(t) = \delta(t)$, de la propiedad de diferenciación se obtiene

$$\delta(t) = \frac{du_o(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = j2\pi f U_o(f),$$

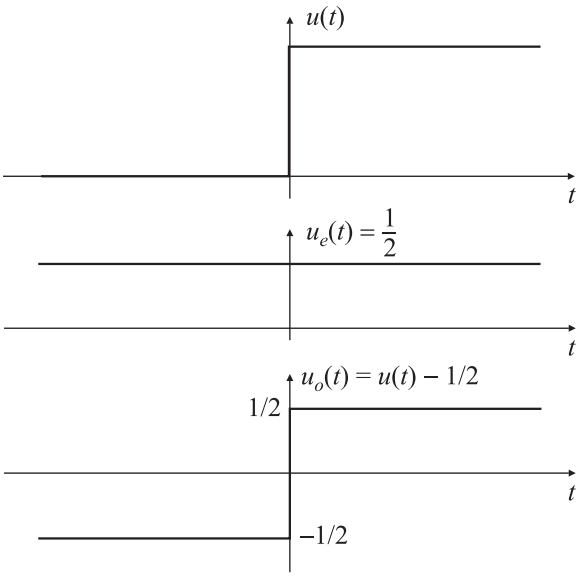


Fig. 2.47. Propiedades de integración y de derivación.

ya que la transformada de Fourier del impulso es 1. Entonces,

$$U_o(f) = \frac{1}{j2\pi f}. \tag{2.84}$$

Obsérvese que, de acuerdo a la Propiedad 2.5.8 sobre las funciones impares, al ser $u_o(t)$ impar y real su transformada de Fourier $U_o(f)$ debe ser imaginaria pura e impar, lo que es evidente de (2.84).

La parte par de $u(t)$, que se nota $u_e(t)$, es una señal constante de amplitud $1/2$, y por lo tanto su transformada de Fourier es un impulso en $f = 0$. Específicamente,

$$u_e(t) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad U_e(f) = \frac{1}{2}\delta(f), \tag{2.85}$$

y combinando las transformadas de la parte impar (2.84) y de la parte par (2.85) de $u(t)$, resulta el par transformado

$$u(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f). \tag{2.86}$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la propiedad de integración. Si $h(t) = \delta(t)$, la integral de $h(t)$ es $u(t)$, y como $H(f) = 1$, la propiedad de integración (2.83) permite obtener directamente (2.86). Observe que el término impulsivo en (2.86) se debe exclusivamente al valor de continua no nulo de $u(t)$.

Finalmente, notemos que se puede aplicar la propiedad de diferenciación para recuperar el valor de la transformada del impulso a partir de la transformada del escalón unitario. En efecto, diferenciando (2.86),

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad j2\pi f\left[\frac{1}{j2\pi f} + \delta(f)\right] = 1 + j2\pi f\,\delta(f) = 1$$

ya que $2\pi f\,\delta(f) = 0$. □

Transformadas de funciones polinomiales a tramos

Una aplicación especial de la propiedad de derivación es la obtención de transformadas de funciones polinomiales a tramos. Las derivadas de estas funciones contienen impulsos

en el punto donde se unen los distintos tramos. Como la transformada del impulso es conocida, puede ser más sencillo calcular la transformada de la función derivada que la de la función original, tal como muestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO **2.32. Transformada de un pulso triangular**
En la Fig. 2.48(a) se representa el pulso triangular definido como

$$p(t) = \begin{cases} \frac{2a}{T}(T/2 - |t|), & \text{si } |t| < T/2, \\ 0. & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El cálculo la transformada de $p(t)$ por definición es complicado:

$$\begin{aligned} P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{0} \frac{2a}{T}\left(\frac{T}{2} + t\right) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{T/2} \frac{2a}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{2a}{T}\int_{-T/2}^{0} \frac{T}{2} e^{-j2\pi ft} dt + \frac{2a}{T}\int_{-T/2}^{0} t e^{-j2\pi ft} dt + \frac{2a}{T}\int_{0}^{T/2} \frac{T}{2} e^{-j2\pi ft} dt - \frac{2a}{T}\int_{0}^{T/2} t e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{a}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft}\Big|_{-T/2}^{0} + \frac{2a}{T(2\pi f)^2}(1 + j2\pi f\, t) e^{-j2\pi ft}\Big|_{-T/2}^{0} + \\ &\quad \frac{a}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft}\Big|_{0}^{T/2} - \frac{2a}{T(2\pi f)^2}(1 + j2\pi f\, t) e^{-j2\pi ft}\Big|_{0}^{T/2} \\ &= \frac{a}{-j2\pi f}\left(1 - e^{j\pi Tf} + e^{-j\pi Tf} - 1\right) + \frac{2a}{T(2\pi f)^2}\left[1 - (1 - j\pi Tf) e^{j\pi Tf} - (1 + j\pi Tf) e^{-j\pi Tf} + 1\right] \\ &= \frac{a}{-j2\pi f}[-2j\,\mathrm{sen}(\pi Tf)] + \frac{2a}{T(2\pi f)^2}\left[2 - e^{j\pi Tf} - e^{-j\pi Tf} + j\pi Tf e^{j\pi Tf} - j\pi Tf e^{-j\pi Tf}\right] \\ &= \frac{a}{\pi f}\,\mathrm{sen}(\pi Tf) + \frac{2a}{T(2\pi f)^2}\left[2 - 2\cos(\pi Tf) + j\pi Tf\, 2j\,\mathrm{sen}(\pi Tf)\right] \\ &= \frac{a}{T(\pi f)^2}[1 - \cos(\pi Tf)]. \end{aligned}$$

Como $1 - \cos\theta = 1 - [\cos^2(\theta/2) - \mathrm{sen}^2(\theta/2)] = 2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)$, se tiene que

$$P(f) = a\frac{T}{4}\frac{2[\mathrm{sen}(\pi Tf/2)]^2}{(\pi Tf/2)^2} = \frac{aT}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(\tfrac{T}{2}f\right)\right]^2.$$

El cálculo es más sencillo si se aplica la propiedad de derivación. La derivada temporal de $p(t)$ es un par de pulsos rectangulares, como se muestra en la Fig. 2.48(a), es decir

$$p'(t) = r(t + T/4) - r(t - T/4), \quad \text{donde} \quad r(t) = \begin{cases} 2a/T, & |t| < T/4, \\ 0, & |t| > T/4. \end{cases}$$

Es conocido que $R(f) = (2a/T)(T/2)\,\mathrm{sinc}\,(Tf/2) = a\,\mathrm{sinc}\,(Tf/2)$, y por lo tanto, aplicando la propiedad de desplazamiento temporal,

$$\mathcal{F}\{p'(t)\} = e^{j2\pi fT/4}R(f) - e^{-j2\pi fT/4}R(f) = R(f)(e^{j2\pi fT/4} - e^{-j2\pi fT/4}) = 2j\,\mathrm{sen}(\pi Tf/2)R(f)$$

y como $\mathcal{F}\{p'(t)\} = j2\pi fP(f)$, se tiene que

$$j2\pi fP(f) = 2j\,\mathrm{sen}(\pi Tf/2)R(f)$$

de donde

$$P(f) = \frac{1}{\pi f}\,\mathrm{sen}(\pi Tf/2)R(f) = \frac{T}{2}\frac{\mathrm{sen}(\pi Tf/2)}{\pi f(T/2)}R(f) = \frac{aT}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(\tfrac{T}{2}f\right)\right]^2$$

El resultado coincide con el calculado por definición, pero se alcanza mucho más fácilmente. □

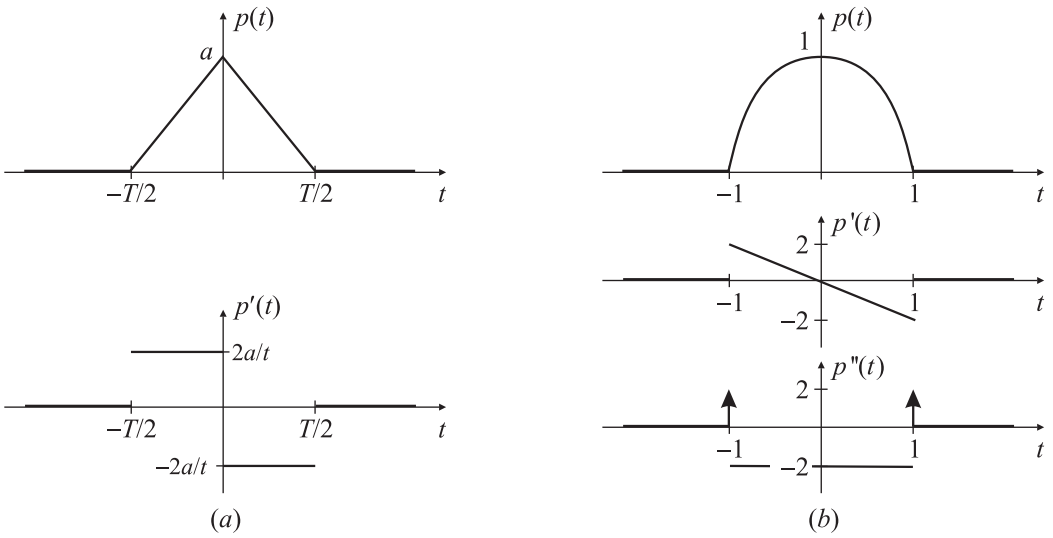


Fig. 2.48. El pulso triangular (a) y parabólico (b) y sus derivadas temporales.

EJEMPLO **2.33. Transformadas de un pulso parabólico**
Sea $p(t)$ un pulso parabólico, definido como

$$p(t) = (1-t^2)r(t), \quad \text{donde} \quad r(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. 2.48(b). Si $P(f)$ es la transformada de Fourier de $p(t)$, la propiedad de derivación asegura que

$$j2\pi f P(f) \quad \Leftrightarrow \quad p'(t) = -2tr(t) + (1-t^2)r'(t), \tag{2.87}$$

donde $r'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$, y por la propiedad de criba del impulso (Propiedad 3), $(1-t^2)r'(t) = 0$. Derivando $p'(t)$ resulta

$$\begin{aligned} (j2\pi f)^2 P(f) \quad \Leftrightarrow \quad p''(t) &= -2r(t) - 2tr'(t), \\ &= -2r(t) - 2t\left[\delta(t+1) - \delta(t-1)\right]. \end{aligned}$$

Nuevamente, por la propiedad de criba del impulso, $t\left[\delta(t+1) - \delta(t-1)\right] = t|_{t=-1}\,\delta(t+1) - t|_{t=1}\,\delta(t-1) = -\delta(t+1) - \delta(t-1)$, de modo que

$$(j2\pi f)^2 P(f) \quad \Leftrightarrow \quad p''(t) = -2r(t) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1).$$

Como

$$\begin{aligned} 2r(t) \quad &\Leftrightarrow \quad 4\,\mathrm{sinc}(2f), \\ 2\left[\delta(t+1) + \delta(t-1)\right] \quad &\Leftrightarrow \quad 4\cos(2\pi f), \end{aligned}$$

se tiene que

$$P(f) = \frac{4\cos(2\pi f) - 4\,\mathrm{sinc}(2f)}{(j2\pi f)^2} + k_1\delta(f) + k_2\delta'(f),$$

donde k_1 y k_2 son constantes de integración que aparecen pues se puede agregar una constante k_1 al pulso parabólico sin alterar su primera derivada, y k_2 tiene en cuenta este efecto para la derivada segunda. La integración del pulso $p(t)$ revela que no hay constantes aditivas o rampas lineales, de modo que $k_1 = k_2 = 0$ en este caso y por lo tanto,

$$P(f) = -\frac{\cos(2\pi f)}{\pi^2 f^2} + \frac{\mathrm{sen}(2\pi f)}{2\pi^3 f^3}. \qquad \square$$

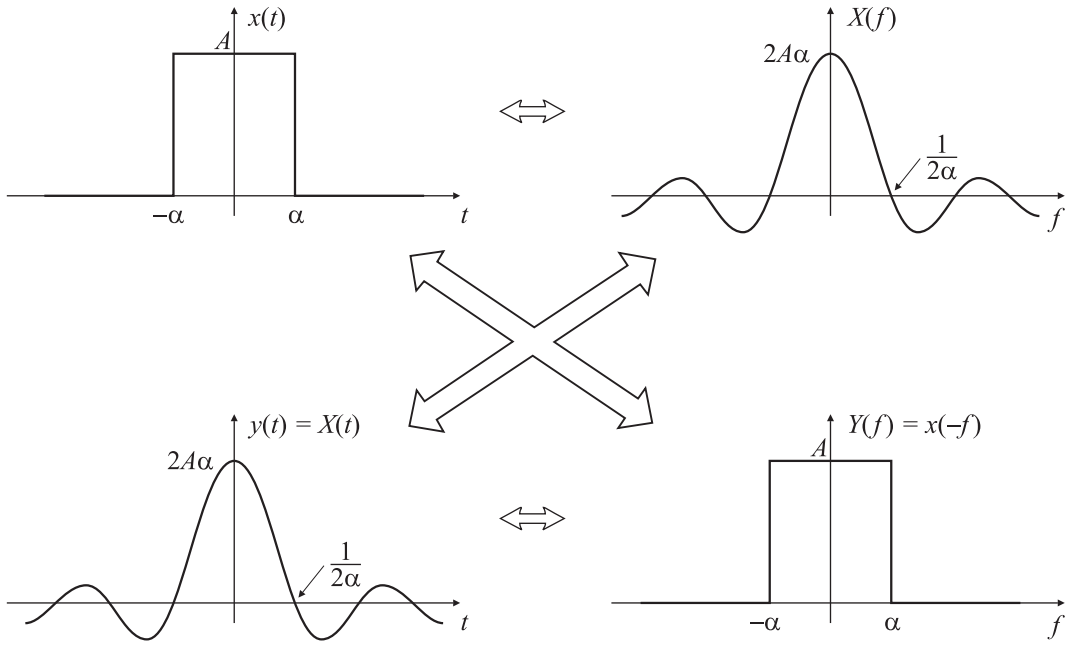


Fig. 2.49. Propiedad de dualidad.

2.5.12. Dualidad

Si la transformada de Fourier de $x(t)$ es $X(f)$, entonces

$$X(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(-f).$$

Este par transformado puede deducirse reescribiendo la ecuación de la transformada inversa para la variable $(-t)$

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f(-t)} df,$$

e intercambiando los parámetros t y f,

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-j2\pi ft} dt. \tag{2.88}$$

En palabras, si una función temporal tiene la "forma" $x(t)$, y su transformada de Fourier es $X(f)$, entonces una función *temporal* con la "forma" de $X(\cdot)$ tendrá como transformada una función con la "forma" de $x(\cdot)$ *en frecuencia*, reflejada sobre el eje de ordenadas.

EJEMPLO **2.34. Derivación de la transformada de un** $\mathrm{sinc}(\cdot)$ **aplicando la propiedad de dualidad**

Para ilustrar esta propiedad consideremos el par transformado de Fourier

$$x(t) = A,\ |t| < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = 2A\alpha\, \mathrm{sinc}(2\alpha f),$$

ilustrado previamente. Por la propiedad de dualidad,

$$y(t) = X(t) = 2A\alpha\, \mathrm{sinc}(2\alpha t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = x(-f) = A,\ |f| < \alpha, \tag{2.89}$$

tal como se ilustra en la Fig. 2.49. En este caso, como las funciones involucradas son simétricas en tiempo y en frecuencia, el cambio de signo de la ecuación (2.88) pasa inadvertido. □

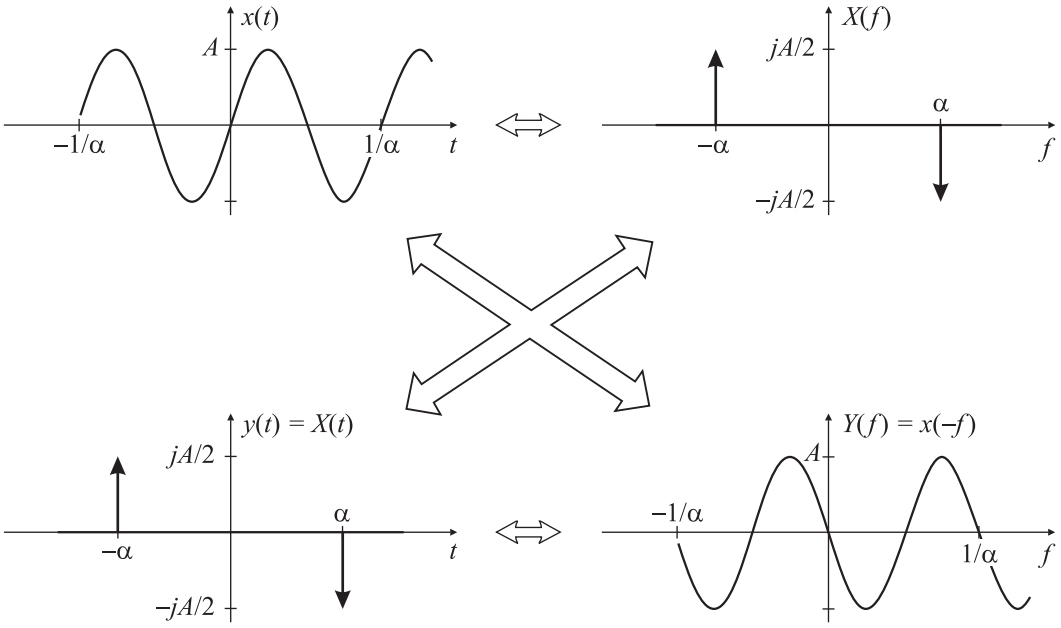


Fig. 2.50. Otro ejemplo de la propiedad de dualidad.

EJEMPLO **2.35. Demostración de la propiedad de dualidad para una señal senoidal**
A partir del Ejemplo 2.15 se derivó el par transformado

$$x(t) = A\sin(2\pi\alpha t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = j\frac{A}{2}\delta(f+\alpha) - j\frac{A}{2}\delta(f-\alpha).$$

Si se define la función temporal $y(t) = X(t)$, es decir, una señal temporal compleja formada por un par de impulsos en $t = \pm\alpha$,

$$y(t) = j\frac{A}{2}\delta(t+\alpha) - j\frac{A}{2}\delta(t-\alpha)$$

su transformada de Fourier $Y(f)$ es

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = j\frac{A}{2}e^{-j2\pi f(-\alpha)} - j\frac{A}{2}e^{-j2\pi f(+\alpha)} = j\frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f\alpha} - e^{-j2\pi f\alpha}\right) \\ &= j\frac{A}{2}\left[2j\,\mathrm{sen}(2\pi\alpha f)\right] = -A\,\mathrm{sen}(2\pi\alpha f) = x(-f). \end{aligned}$$

Esta relación dual se muestra en la Fig. 2.50. □

El empleo de esta propiedad permite evitar muchos desarrollos matemáticos complejos, como el del Ejemplo 2.11 (transformada de un sinc). También puede servir para sugerir o determinar otras propiedades de las transformadas de Fourier. Específicamente, si una función temporal tiene ciertas características que determinan una forma especial de su transformada de Fourier, entonces las mismas características asociadas a una función *frecuencial* tendrán características duales en el dominio *temporal*. Por ejemplo, veremos que una función temporal *periódica* tiene una trasformada de Fourier discreta, formada por un tren de impulsos equiespaciados, y pesados por una cierta función: tal el caso de las funciones periódicas sen $(2\pi f_0 t)$ y cos $(2\pi f_0 t)$ del Ejemplo 2.15, cuyas transformadas son

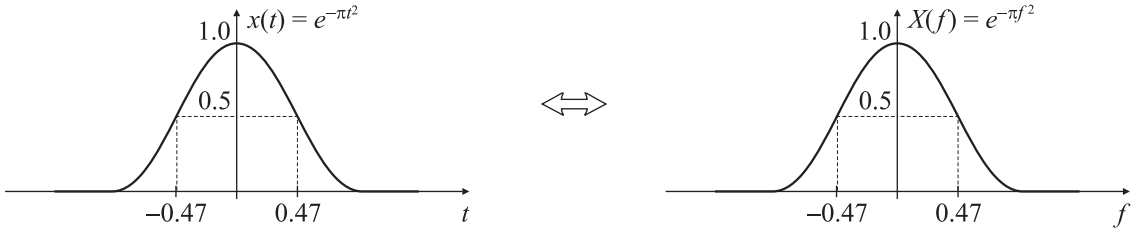


Fig. 2.51. Pulso gaussiano y su transformada de Fourier.

impulsos. Debido a la dualidad, una función temporal formada por impulsos equiespaciados y modulados por una cierta función, tendrá una transformada de Fourier que es *periódica* en frecuencia. Un anticipo de estas relaciones se vislumbra en la transformada del tren de impulsos desarrollada en el Ejemplo 2.19.

De manera similar, las propiedades enunciadas hasta ahora también implican propiedades duales. Por ejemplo, hemos visto que la diferenciación en el dominio tiempo se relaciona con la multiplicación por $j2\pi f$ en el dominio frecuencial. De la discusión precedente, se puede sospechar que la multiplicación por $j2\pi t$ en el dominio temporal se corresponde con una derivación en el dominio frecuencial. Para determinar la forma precisa de esta propiedad dual, aplicamos la definición. Diferenciando la ecuación de análisis respecto a f, se tiene

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dX(f)}{df} = -\int_{-\infty}^{\infty} j2\pi t x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt,$$

de modo que hemos establecido el par transformado

$$-j2\pi t\, x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dX(f)}{df}. \tag{2.90}$$

Análogamente, se pueden derivar las propiedades de la antitransformada de la integral en frecuencia

$$-\frac{1}{j2\pi t} x(t) + x(0)\,\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{f} X(\eta)\, d\eta \tag{2.91}$$

y la de corrimiento frecuencial

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f - f_0). \tag{2.92}$$

Compare estos resultados con sus duales: (2.90) con (2.82), (2.91) con (2.83), y (2.92) con (2.71) y (2.72), y note las diferencias de signos en cada caso. En particular, para la propiedad de integración, recuerde que el impulso $\delta(t)$ es una función par (Sección 2.3.4, Propiedad 1).

EJEMPLO **2.36. El pulso gaussiano**
Como ejemplo de la aplicación de la propiedad de diferenciación en tiempo, y de su dual, la diferenciación en frecuencia, determinaremos una función temporal $x(t)$ cuya transformada de Fourier $X(f)$ tiene la misma expresión matemática (con el obvio cambio de variables t por f). En otras palabras, usando una variable auxiliar σ para evitar confusión, $x(\sigma) = X(\sigma)$.

Si $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ indica el par transformado de Fourier, en base a la propiedad de derivación en frecuencia (2.90) se puede escribir

$$-2\pi t\, x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{j}\frac{d}{df}X(f)\,. \tag{2.93}$$

Por otra parte, por la propiedad de derivación temporal

$$\frac{d}{dt}x(t) \quad \Leftrightarrow \quad j2\pi f X(f)\,. \tag{2.94}$$

Si se impone que la señal temporal $x(t)$ satisfaga la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d}{dt}x(t) = -2\pi t\, x(t)\,, \tag{2.95}$$

es decir, que los miembros izquierdos de (2.93) y (2.94) sean iguales, es evidente que los miembros derechos también lo serán; en particular, $\frac{1}{j}\frac{d}{df}X(f) = j2\pi f X(f)$ o, teniendo en cuenta que $j^2 = -1$,

$$\frac{d}{df}X(f) = -2\pi f X(f)\,. \tag{2.96}$$

En definitiva, si la señal temporal $x(t)$ satisface la ecuación diferencial de primer orden (2.95), su transformada de Fourier $X(f)$ satisface la ecuación diferencial de primer orden (2.96). Como las dos ecuaciones diferenciales tienen exactamente la misma expresión matemática, ambas tendrán idéntica solución. Notando

$$\frac{d}{d\sigma}g(\sigma) = -2\pi\sigma g(\sigma)\,, \tag{2.97}$$

es evidente que

$$x(t) = g(\sigma)|_{\sigma=t}\,, \qquad X(f) = g(\sigma)|_{\sigma=f}\,.$$

Resolviendo (2.97), se tiene que

$$g(\sigma) = e^{-\pi\sigma^2}, \tag{2.98}$$

que se muestra en la Fig. 2.51. El pulso definido por (2.98) se denomina *pulso gaussiano*, debido a la similitud de la función con la función densidad de probabilidad de Gauss. En síntesis, la transformada de Fourier del pulso gaussiano es el mismo pulso, estableciendo el par transformado[8]

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \Leftrightarrow X(f) = e^{-\pi f^2}. \qquad \square$$

Si bien muchas de las propiedades de la *transformada* de Fourier pueden extenderse sin mayores inconvenientes a la *serie* de Fourier, esto no ocurre con la propiedad de dualidad, debido a la distinta naturaleza de las variables tiempo-frecuencia en este caso. Mientras que para la transformada tanto la variable temporal ("t") como la variable frecuencial ("f") son *reales*, para la serie de Fourier la variable temporal es real, mientras que la variable frecuencial ("k", el número de armónico) es un número entero. Por ejemplo, si bien se puede establecer una propiedad de derivación temporal para la serie de Fourier, análoga a la de la transformada,

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) \quad \Leftrightarrow \quad j\frac{2\pi}{T_0}kc_k,$$

no tiene sentido la propiedad dual de "derivación" en frecuencia, ya que "no se puede" calcular dc_k/dk porque k es una variable entera.

[8] Si las transformadas se expresan en función de la frecuencia angular Ω, la función temporal que tiene la misma expresión matemática que su transformada puede ser diferente, como se estudia en el Ejercicio 24.

2.5.13. Relación de Parseval

Si $h(t)$ y $H(f)$ son un par transformado de Fourier, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Esta relación puede demostrarse fácilmente a partir de la definición de la transformada de Fourier (2.32). Específicamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\, e^{-j2\pi ft} df \right] dt.$$

Intercambiando el orden de integración,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \right]}_{X(f)} df.$$

Pero el término entre corchetes es la transformada de Fourier $X(f)$ de $x(t)$; entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \tag{2.99}$$

El término de la izquierda de la ecuación (2.99) es la energía total de la señal $x(t)$ [ecuación (2.48)]. La relación de Parseval dice que la energía total puede ser determinada ya sea calculando la energía por unidad de tiempo ($|x(t)|^2$), e integrando en el tiempo, o bien calculando la energía por unidad de frecuencia ($|X(f)|^2$) e integrando sobre la frecuencia. Por tal motivo, $|X(f)|^2$ suele denominarse como el *espectro de densidad de energía* de la señal $x(t)$.

La energía de una señal periódica es infinita, y en consecuencia la ecuación (2.99) no es apropiada para esta clase de señales. Sin embargo, para señales periódicas se puede establecer una relación análoga. A partir de la expresión de la serie de Fourier (2.19), repetida aquí por comodidad,

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

se tiene que

$$\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t) = \left(\sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} \right) \left(\sum_\ell c_\ell^* e^{-j\frac{2\pi}{T_0}\ell t} \right) = \sum_k \sum_\ell c_k c_\ell^* e^{j\frac{2\pi}{T_0}(k-\ell)t}.$$

Integrando sobre un período se tiene

$$\int_{T_0} \tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t)\, dt = \int_{T_0} \sum_k \sum_\ell c_k c_\ell^* e^{j\frac{2\pi}{T_0}(k-\ell)t} = \sum_k \sum_\ell c_k c_\ell^* \int_{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}(k-\ell)t} dt.$$

Como

$$\int_{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}(k-\ell)t} dt = \begin{cases} T_0, & \text{si } \ell = k, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

Tabla 2.5: Propiedades de la transformada de Fourier.

Dominio tiempo $x(t)$		Dominio frecuencia $X(f)$	
linealidad	$a\,x(t) + b\,y(t)$	$a\,X(f) + b\,Y(f)$	linealidad
dualidad	$X(t)$	$x(-f)$	dualidad
escalado en tiempo	$x(k\,t)$	$\frac{1}{k}X(f/k)$	escalado inverso
escalado inverso	$\frac{1}{k}x(k\,t)$	$X(k\,f)$	escalado en frecuencia
desplazamiento temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}X(f)$	desfasaje
modulación	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$	desplazamiento frecuencial
función par	$x_e(t)$	$X_e(f) = R_e(f)$	función real
función impar	$x_o(t)$	$X_o(f) = jI_o(f)$	función imaginaria
función real	$x(t) = x_r(t)$	$X(f) = R_e(f)$	parte real: par
		$+jI_o(f)$	parte imaginaria: impar
función imaginaria	$x(t) = jx_i(t)$	$X(f) = R_o(f)$	parte real: impar
		$+jI_e(f)$	parte imaginaria: par

según la nota a pie de página 74, resulta que

$$c_k c_\ell^* \int_{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}(k-\ell)t} dt = c_k c_k^* T_0 = |c_k|^2 T_0,$$

y por lo tanto,

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

donde los c_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$, y T_0 es el período. En otras palabras, para el caso de señales periódicas la relación de Parseval vincula la potencia promedio en un período de la función temporal con la energía de los coeficientes de la serie de Fourier. La cantidad $|c_k|^2$ se puede interpretar como la energía por período contribuida por el k-ésimo armónico. Tal como se mencionó en la Sección 2.3.4, las señales periódicas no tienen energía finita, pero si *potencia promedio* finita [ecuación (2.49)].

2.5.14. Resumen de propiedades

En la Tabla 2.5 se reunen las propiedades básicas de la transformada de Fourier. En todos los casos, $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$.

Hasta el momento hemos visto algunas de las principales propiedades de la transformada de Fourier. La siguiente propiedad, el teorema de convolución, es clave para el estudio de los sistemas lineales, y por ello será analizada en detalle, discutiendo primero la derivación e importancia de la integral de convolución, y estudiando luego su transformada.

2.6. La integral de convolución

La convolución entre dos funciones es un concepto físico importante en muchas ramas de la ciencia. Sin embargo, como sucede con muchas relaciones matemáticas importantes, no es sencillo comprender sus alcances e implicaciones. Para el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, la integral de convolución permite determinar la respuesta del sistema ante *cualquier* entrada, a partir del conocimiento de la respuesta del sistema ante una *única* entrada particular, el impulso. Si la respuesta del sistema ante un impulso (la "respuesta impulsiva" del sistema) se nota como $h(t)$, la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo (SLIT) excitado con una entrada cualquiera $x(t)$ está dada por la expresión

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\; d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\; d\tau, \tag{2.100}$$

y se dice que la función $y(t)$ es la convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$, que se nota $x(t) * h(t)$.

2.6.1. Derivación de la integral de convolución

En esta sección se muestra que un sistema lineal e invariante en el tiempo queda completamente caracterizado por su respuesta impulsiva. En otras palabras, el conocimiento de la respuesta del sistema a un impulso de amplitud unitaria permite determinar su salida para una entrada arbitraria aplicando la integral de convolución (2.100).

Una señal continua arbitraria $x(t)$ se puede aproximar con precisión arbitraria por una versión "escalonada" $\hat{x}(t)$, como la que se muestra en la Fig. 2.52(a). Aunque los escalones podrían tener distinto ancho, lo habitual es elegir el mismo valor Δ para todos. La señal escalonada $\hat{x}(t)$ se puede expresar como una combinación lineal de pulsos temporales de ancho Δ escalados y desplazados, como ilustran las Figs. 2.52(b)-(e). Si se define el pulso $\delta_\Delta(t)$ como

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que tiene área unitaria, la expresión $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ representa un pulso desplazado en el tiempo

$$\delta_\Delta(t - k\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & k\Delta < t < (k+1)\Delta, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, la aproximación escalonada $\hat{x}(t)$ de la señal continua $x(t)$ se puede escribir

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t - k\Delta)\, \Delta. \tag{2.101}$$

Observando la Fig. 2.52 se nota que sólo un término de la sumatoria (2.101) es no nulo para cada valor de t. A medida que el intervalo Δ tiende a cero, la aproximación $\hat{x}(t)$ es cada vez más fiel, y en el límite, cuando $\Delta \to 0$, es igual a $x(t)$,

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t - k\Delta)\, \Delta. \tag{2.102}$$

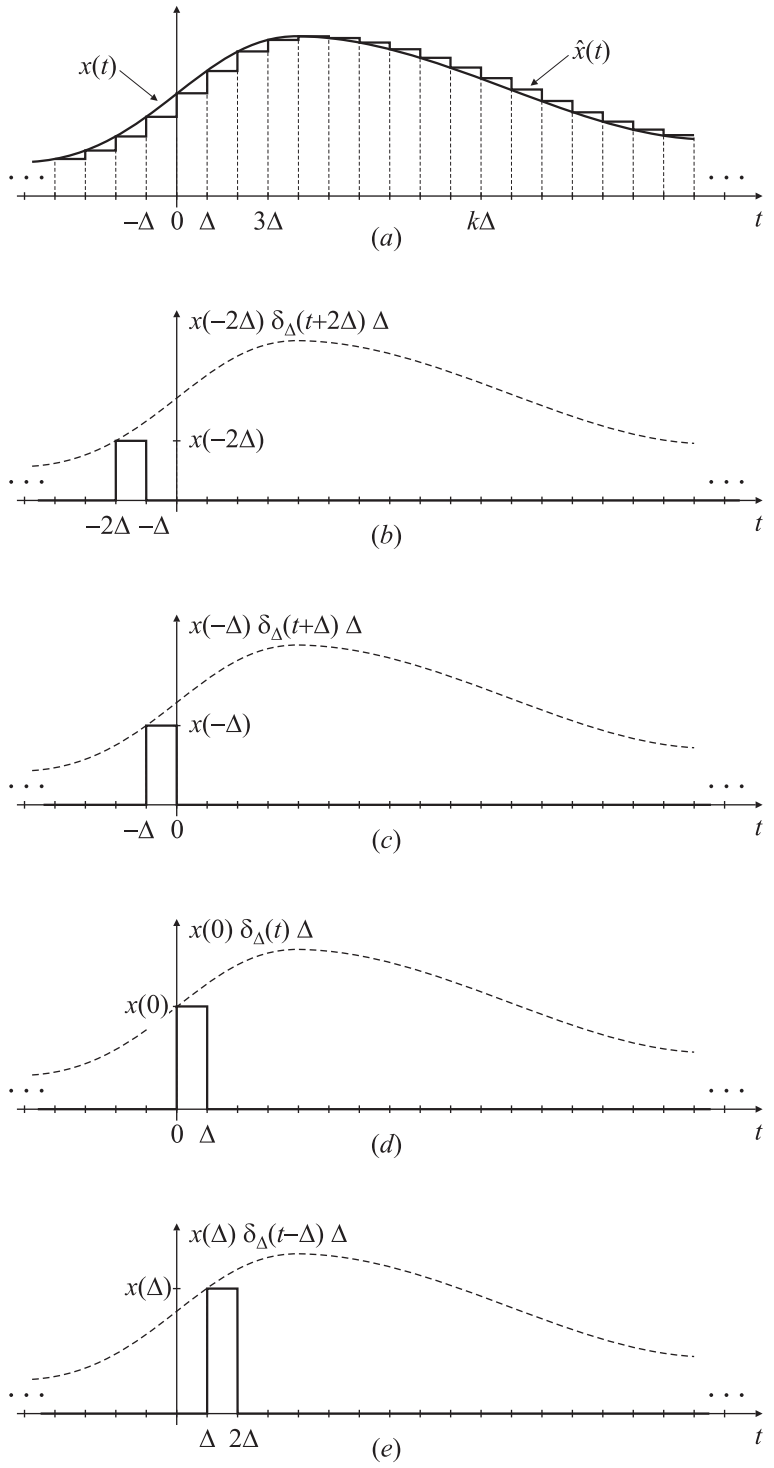


Fig. 2.52. Aproximación escalonada a una señal continua.

Si Δ se hace cada vez más pequeño, la sumatoria de la ecuación (2.102) tiende a una integral (la conocida aproximación de Riemann): para $\Delta \to 0$, se tiene que $\Delta \to d\tau$,

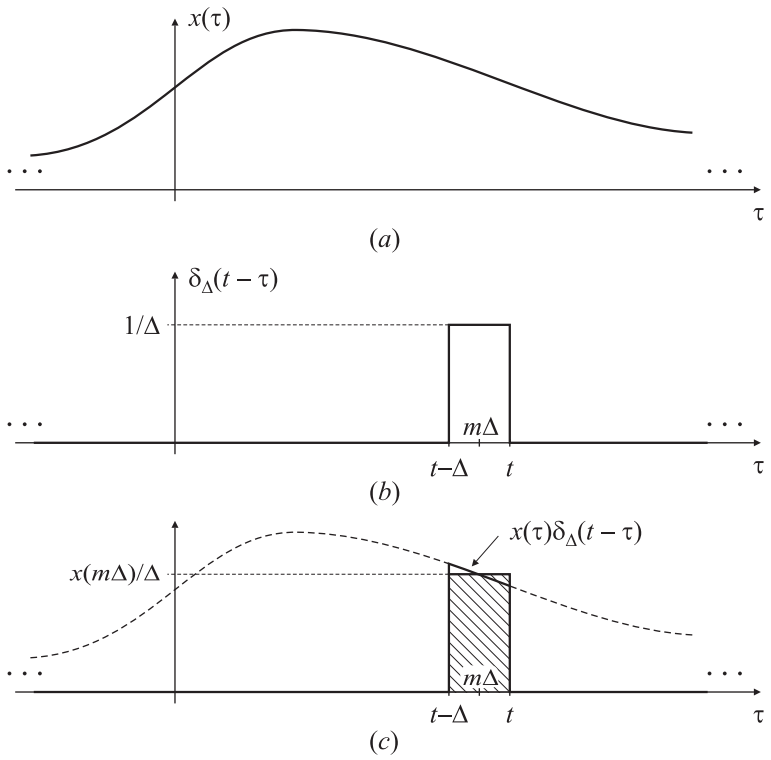


Fig. 2.53. Interpretación gráfica de la ecuación (2.102).

$k\Delta \to \tau$, y $\delta_\Delta(t - k\Delta) \to \delta(t - \tau)$. Entonces (2.102) se puede expresar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t - \tau)\,d\tau. \tag{2.103}$$

La expresión (2.103) no es otra cosa que la Propiedad 3 del impulso (Sección 2.3.4). El pasaje al límite de la expresión (2.102) a la ecuación (2.103) se puede interpretar con la ayuda de la Fig. 2.53, donde se han graficado las funciones $x(\tau)$, $\delta_\Delta(t - \tau)$ y su producto. En esta representación, t es un valor determinado [el instante de tiempo donde se quiere calcular $x(t)$] y $\tau = k\Delta$ es la variable. El área bajo la curva $x(\tau)\,\delta_\Delta(t - \tau)$ se puede aproximar por el área sombreada del rectángulo de la Fig. 2.53(c), que es $x(m\Delta)\,\Delta$, donde $t - \Delta < m\Delta < t$; para este valor de t, el término con $k = m$ es el único término no nulo en la sumatoria de la ecuación (2.102). En consecuencia en el límite, cuando $\Delta \to 0$, $x(t)$ iguala el área bajo al curva $\Delta x(\tau)\,\delta_\Delta(t - \tau)$.

Esta representación escalonada permite estudiar la respuesta o salida $y(t)$ de un sistema lineal ante una entrada arbitraria $x(t)$. En la Fig. 2.54(a) se ha representado la señal $x(t)$ y su aproximación escalonada $\hat{x}(t)$, mientras que en la Fig. 2.54(b)-(d) se ilustran las respuestas del sistema ante tres de los pulsos escalados que forman $\hat{x}(t)$. Como la respuesta es *diferente* según sea el instante donde se aplique el pulso, el sistema *no* es invariante en el tiempo. Sin embargo, como el sistema es lineal, la salida $\hat{y}(t)$ correspondiente a la entrada $\hat{x}(t)$ es la suma de todas estas respuestas [Fig. 2.54(e)]. Para obtener la respuesta $y(t)$ ante la entrada $x(t)$ basta tomar el límite de $\hat{y}(t)$ para $\Delta \to 0$, de manera análoga a la indicada por la ecuación (2.102) para $\hat{x}(t)$, y como ilustra la Fig. 2.54(f). Como el pulso $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ corresponde al pulso de área unitaria desplazado, cuando $\Delta \to 0$ la respuesta $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ tiende a la respuesta impulsiva del sistema ante un impulso unitario aplicado en

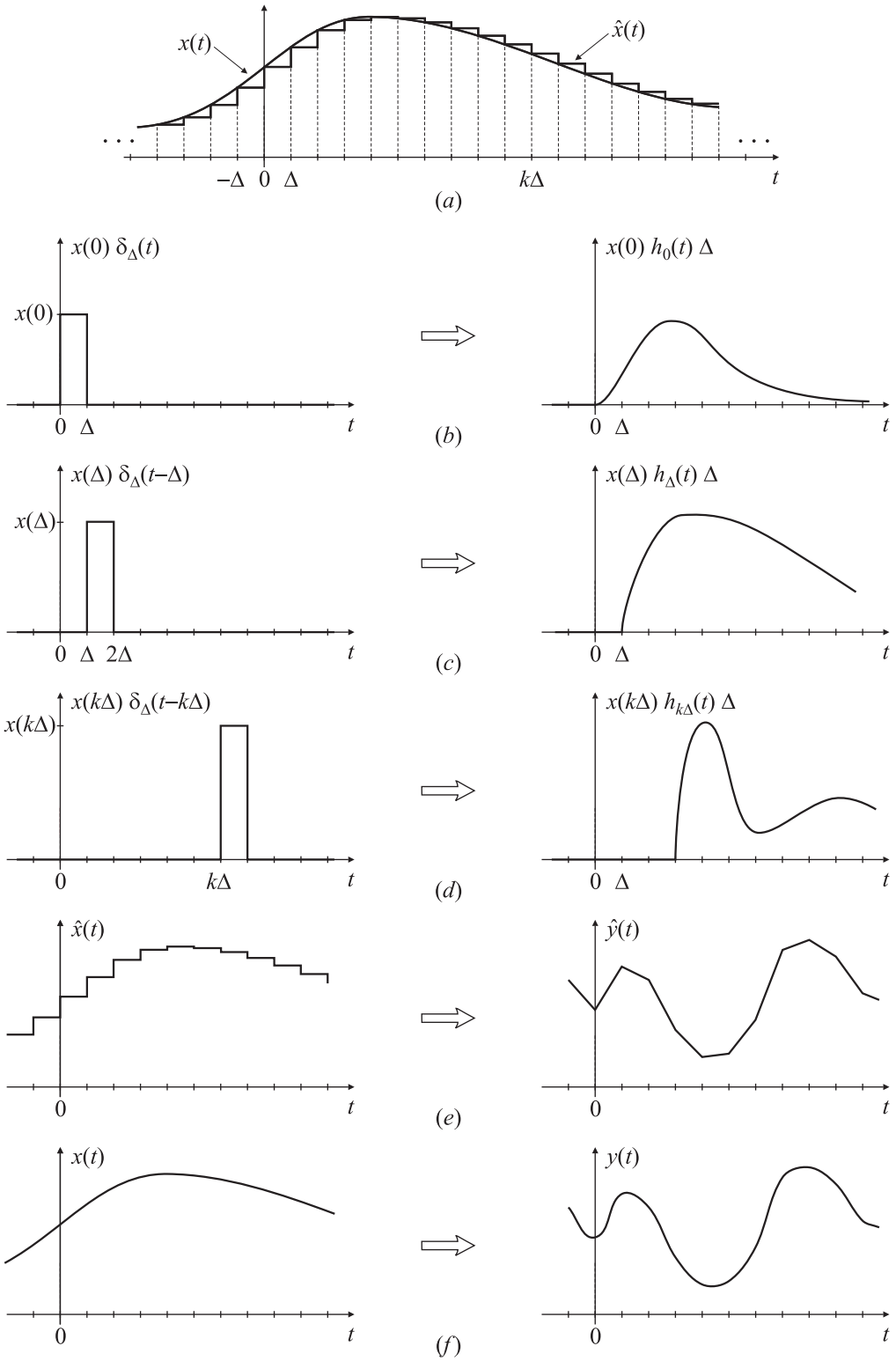


Fig. 2.54. Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal continuo *variante* en el tiempo [ecuación (2.102)].

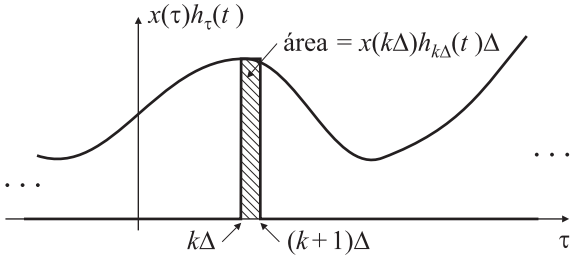


Fig. 2.55. Interpretación gráfica de las ecuaciones (2.104) y (2.105).

$t = k\Delta$. Notando como $h_\tau(t)$ la respuesta del sistema ante un impulso unitario $\delta(t-\tau)$ aplicado en el instante $t = \tau$, resulta

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, h_{k\Delta}(t)\, \Delta. \tag{2.104}$$

Cuando $\Delta \to 0$ la suma en el miembro derecho tiende a la integral, como se representa en la Fig. 2.55. Entonces, siguiendo un procedimiento similar al que permite pasar de (2.102) a (2.103), se encuentra que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_\tau(t)\, d\tau. \tag{2.105}$$

La interpretación de la ecuación (2.105) es análoga a la de la ecuación (2.102). Como muestra la ecuación (2.103), cualquier entrada $x(t)$ puede pensarse como una suma de impulsos escalados y desplazados, donde el "peso" del impulso $\delta(t-\tau)$ es precisamente $x(\tau)\, d\tau$. Con esta interpretación, la ecuación (2.105) representa la superposición de las respuestas a cada uno de estos impulsos, y, por linealidad, el "peso" de la respuesta $h_\tau(t)$ al impulso desplazado $\delta(t-\tau)$ también es $x(\tau)\, d\tau$.

La ecuación (2.105) representa la forma general de la respuesta de un sistema lineal de tiempo continuo. Si además de ser lineal el sistema es *invariante en el tiempo*, entonces la respuesta del sistema en un tiempo $t = t_1$ ante un impulso $\delta(t-\tau)$ aplicado en $t = \tau$ [Fig. 2.56(a)] es la misma que la respuesta del sistema en un tiempo $t = t_1 + T$ ante un impulso $\delta(t-\tau-T)$ aplicado en $t = \tau + T$ [Fig. 2.56(b)], es decir

$$h_{\tau+T}(t) = h_\tau(t-T).$$

Por conveniencia notacional se suele elegir $\tau = 0$, de modo que $h_T(t) = h_0(t-T)$, y se define la *respuesta impulsiva del sistema* $h(t)$ como

$$h(t) = h_\tau(t)|_{\tau=0} = h_0(t),$$

es decir, la respuesta del sistema ante un impulso aplicado en $t = 0$. En este caso, la ecuación (2.105) se convierte en

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau. \tag{2.106}$$

Esta integral se conoce como *integral de convolución* o *integral de superposición*, y es la representación de un sistema continuo en el tiempo *lineal* e *invariante en el tiempo* en función de su respuesta impulsiva $h(t)$.

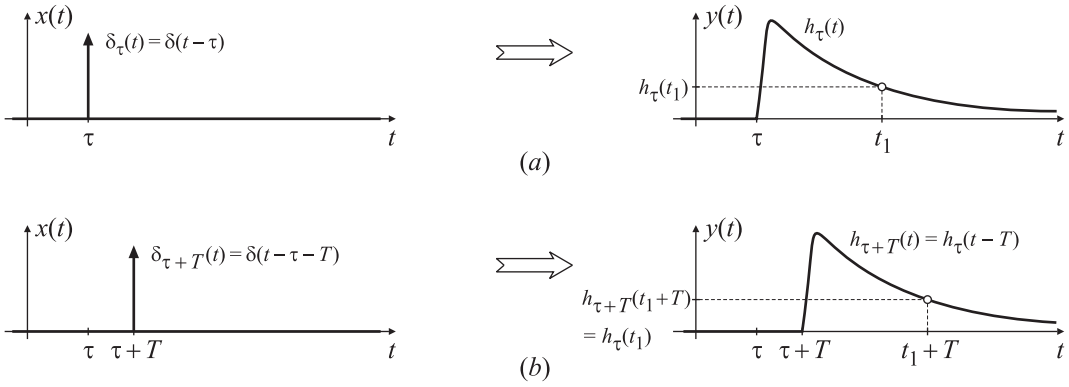


Fig. 2.56. Respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Es interesante resaltar las diferencias entre las ecuaciones (2.105) y (2.106), que se ilustran en la Fig. 2.54(b)-(d) y en la Fig. 2.57(b)-(d) , respectivamente. Para el sistema variante en el tiempo (Fig. 2.54) es necesario conocer la respuesta $h_\tau(t)$ del sistema ante un impulso aplicado en $t = \tau$, *para todos los posibles valores de* τ; en otras palabras, $h_\tau\,(t)$ representa una *familia* de respuestas impulsivas. En cambio, para los sistemas invariantes en el tiempo (Fig. 2.57) basta con conocer una única respuesta impulsiva. Por comodidad, se suele elegir la respuesta del sistema ante un impulso aplicado en $t = 0$.Evaluación gráfica de la integral de convolución

No es sencillo visualizar la operación matemática descripta por la ecuación (2.106); sin embargo, un análisis gráfico permite comprender el significado de la convolución. Sean $x\,(t)$ y $h\,(t)$ dos funciones temporales, por ejemplo los pulsos que se muestran en la Fig. 2.58(a) y (b), respectivamente. Para evaluar (2.106) son necesarias las funciones $x\,(\tau)$ y $h\,(t-\tau)$. Las funciones $x\,(\tau)$ y $h\,(\tau)$ son las funciones $x\,(t)$ y $h\,(t)$, respectivamente, donde la variable t se ha reemplazado por la variable τ. La función $h\,(-\tau)$ es el reflejo de $h\,(\tau)$ respecto al eje de las ordenadas, como se muestra en la Fig. 2.59(b) y $h\,(t-\tau)$ es la función $h\,(-\tau)$ desplazada en una cantidad t, como se representa en la Fig. 2.59(c). Para evaluar la integral (2.106) es necesario multiplicar e integrar las funciones $x\,(\tau)$ [Fig. 2.59(a)] y $h\,(t-\tau)$ [Fig. 2.59(c)] para cada valor de t desde $-\infty$ hasta ∞. Como se muestra en la Fig. 2.60(a), este producto es cero cuando el parámetro $t = -t_1$. El producto sigue siendo nulo hasta que el parámetro t toma el valor $t = 0$. En $t = t_2$ el producto de $x\,(\tau)$ y $h\,(t_1-\tau)$ es la zona sombreada que se muestra en la Fig. 2.60(c); el área de esta zona es el valor de la integral. A medida que t se incrementa a t_0 y posteriormente a t_3, la Fig. 2.60(d) y (e) muestran las funciones que deben multiplicarse. Para $t = t_4$ el producto nuevamente se anula como se muestra en la Fig. 2.60(f), y sigue siendo nulo para cualquier valor de t tal que $t > t_4$ [Fig. 2.60(g)]. Resumiendo, si se deja que t varíe continuamente desde $-\infty$ hasta ∞ la convolución de $x\,(t)$ y $h\,(t)$ es la función triangular que se muestra en la Fig. 2.60(h).

El procedimiento descrito es una técnica de análisis gráfico conveniente para evaluar o interpretar integrales de convolución. Los pasos a seguir son:

1. **Reflexión**. Se refleja $h\,(t)$ respecto del eje de ordenadas.

2. **Desplazamiento**. Se desplaza $h\,(-\tau)$ en una cantidad t donde se desea evaluar la convolución.

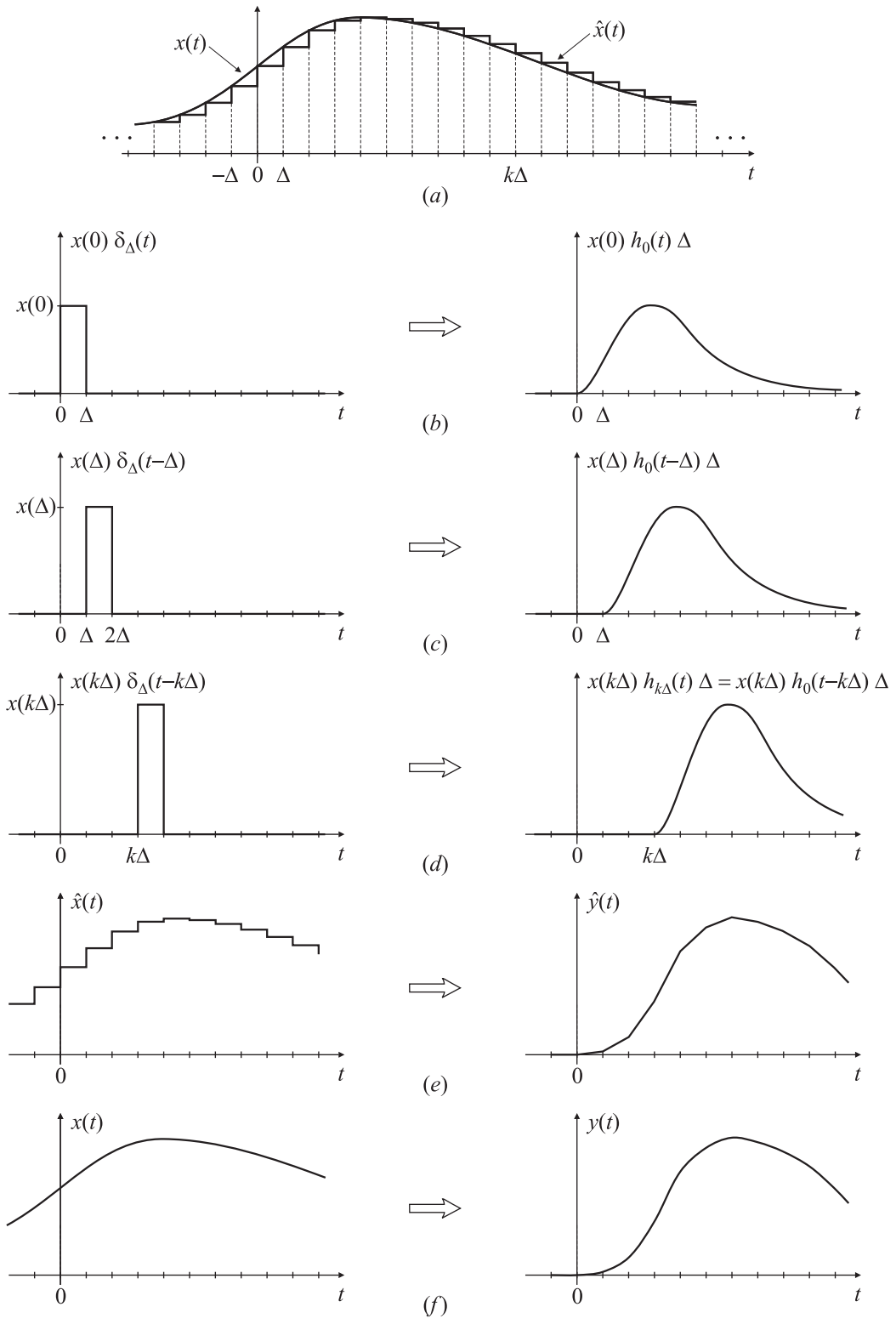


Fig. 2.57. Interpretación de la respuesta de un sistema lineal continuo *invariante* en el tiempo [ecuación (2.106)].



Fig. 2.58. Formas de onda a convolucionar.

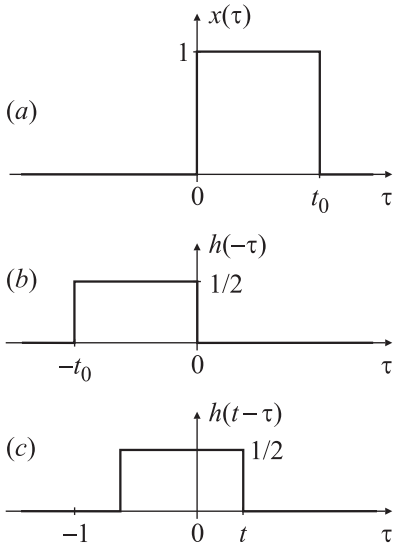


Fig. 2.59. Descripción gráfica de la operación de reflexión.

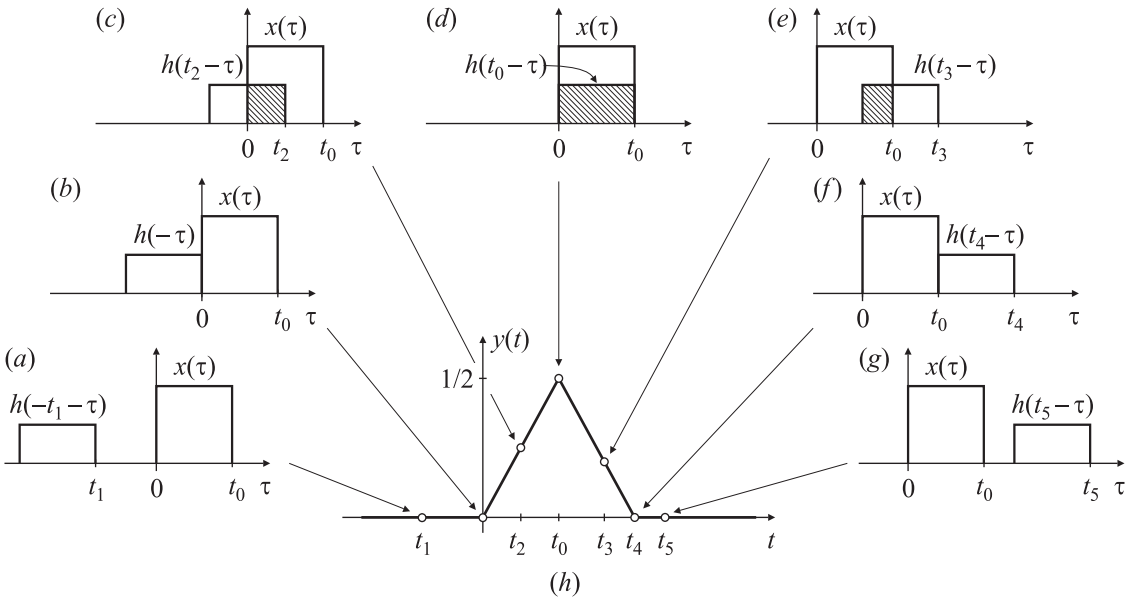


Fig. 2.60. Ejemplo gráfico de la convolución.

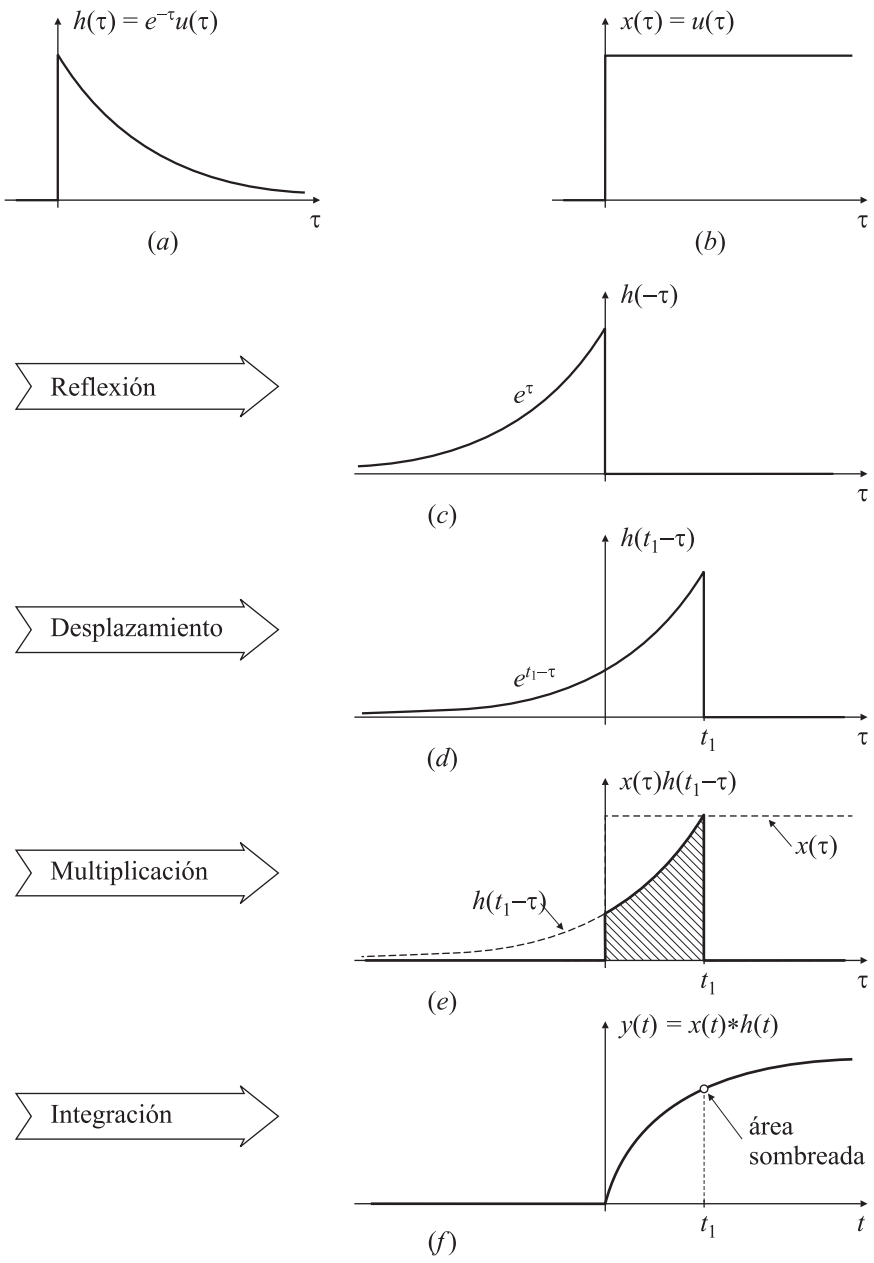


Fig. 2.61. Procedimiento de cálculo de la convolución.

3. **Multiplicación**. Se multiplica la función desplazada $h\,(t-\tau)$ por $x\,(\tau)$.

4. **Integración**. El área bajo el producto de $h\,(t-\tau)$ y $x\,(\tau)$ es el valor de la convolución en el tiempo t.

EJEMPLO **2.37. Cálculo gráfico de la integral de convolución**
Las reglas para la evaluación gráfica de la integral de convolución se ejemplifican con el cálculo de $y(t) = x\,(t) * h\,(t)$ para las funciones $h(t) = e^{-t}u(t)$ y $x(t) = u(t)$, que se representan en la Fig. 2.61(a) y (b), respectivamente. Primero se refleja $h\,(\tau)$ para obtener $h\,(-\tau)$, como se ve en la Fig. 2.61(c). Luego se desplaza $h\,(-\tau)$ en una cantidad $t = t_1$ que es el instante donde se

quiere calcular la convolución [Fig. 2.61(d)]. Después se multiplica $h\,(t-\tau)$ por $x\,(\tau)$ [Fig. 2.61(e)], y finalmente se integra para obtener el resultado de la convolución para el tiempo t_1[Fig. 2.61(f)]. El resultado ilustrado en la Fig. 2.61(f) se puede determinar directamente de la ecuación (2.100),

$$y\,(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(\tau)\; h\,(t_1-\tau)\; d\tau$$

Los extremos de integración se ajustan teniendo en cuenta los rangos donde alguna de las funciones es nula: como $x(\tau)$ es cero para $\tau < 0$, no tiene sentido integrar desde $-\infty$. Por otra parte como $h(t)$ es cero para $t < 0$, $h(t_1-\tau)$ es cero para $t_1-\tau < 0$, o bien para todo $\tau > t_1$; por lo tanto sólo es necesario integrar hasta t_1. Entonces,

$$\begin{aligned} y\,(t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,(\tau)\; h\,(t_1-\tau)\; d\tau = \int_0^{t_1} (1)\; e^{-(t_1-\tau)}\, d\tau \\ &= e_1^{-t}\left(e^{\tau}|_0^{t_1}\right) = e^{-t_1}\left(e^{t_1}-1\right) \\ &= 1-e^{-t_1}. \end{aligned}$$

□

En el Ejemplo 2.37 los extremos de la integral de convolución (originariamente de $-\infty$ a ∞) cambian de 0 a t. En general, los valores de los extremos cambian de acuerdo a cómo sean las funciones del integrando. Para el ejemplo, el menor valor de la variable[9] τ para el cual la función $h\,(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}$ es nula es $\tau = -\infty$; para la función $x\,(\tau)$ es $\tau = 0$.

Al integrar se debe elegir el *mayor* de estos dos valores como el *menor* de los extremos de integración. Para hallar el extremo superior se observa que $h\,(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}$ es nula para cualquier $\tau > t$, y que $x\,(\tau)$ es nula para $\tau > \infty$. Por lo tanto el extremo superior de integración es el menor de estos valores.

Una regla general para determinar los extremos de integración es la siguiente:

Si $x\,(t)$ es una función que se anula fuera del intervalo $[L_1, U_1]$, y $h(t)$ una función que se anula fuera del intervalo $[L_2, U_2]$, los límites de integración de la integral de convolución (2.100) son máx (L_1, L_2) y mín (U_1, U_2), respectivamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,(\tau)\, h\,(t-\tau)\, d\tau = \int_{\text{máx}(L_1,L_2)}^{\text{mín}(U_1,U_2)} x\,(\tau)\, h\,(t-\tau)\, d\tau.$$

Los valores de τ para los cuales se anula $x\,(\tau)$ son fijos; sin embargo, los valores de τ donde la "función deslizante" $h\,(t-\tau)$ es distinta de cero son función del parámetro t. Por ello es posible tener diferentes límites de integración para distintos rangos de t. Un gráfico como el de la Fig. 2.61 es útil para determinar correctamente los límites de integración; el cálculo de la integral se puede dividir en a lo sumo 5 etapas, según las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$:

1. no se solapen, como ocurre con las señales graficadas en la Fig. 2.60(a) o (b) ;
2. se solapen parcialmente por izquierda, según se muestra en la Fig. 2.60(c) ;
3. se solapen totalmente, representado en la Fig. 2.60(d) ;
4. se solapen parcialmente por derecha, como se ilustra en la Fig. 2.60(e) ;

[9] En este análisis, la variable es τ, y t es un *parámetro* que queda fijo: la integral se calcula "punto a punto" para cada valor de t.

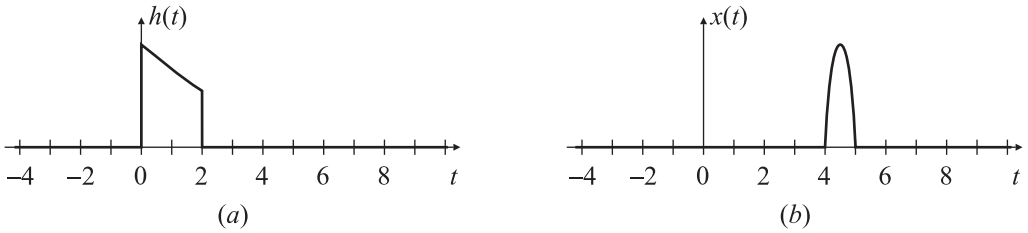


Fig. 2.62. Señales a convolucionar en el Ejemplo 2.38.

5. no se solapen, como se muestra en la Fig. 2.60(f) o (g).

Dependiendo de la naturaleza de las funciones a convolucionar, algunas de estas etapas pueden estar ausentes, como ocurre con las señales del Ejemplo 2.37, donde faltan las etapas 3 (solapamiento total), 4 (solapamiento parcial por derecha) y 5 (sin solapamiento), como se observa en la Fig. 2.61. Los detalles del cálculo se estudian en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO **2.38. Las cinco etapas en el cálculo de la convolución**
Se desea calcular la salida $y(t)$ de un sistema con respuesta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

cuando se lo excita con una entrada

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi t, & 4 \le t \le 5, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Las señales $h(t)$ y $x(t)$ se representan en la Fig. 2.62(a) y (b), respectivamente. La salida $y(t)$ se calcula convolucionando $h(t)$ y $x(t)$ siguiendo los pasos indicados más arriba: reflexión de una de las señales; desplazamiento de la misma hasta el instante donde desea calcularse la convolución, multiplicación de las dos señales, e integración del producto. La sucesión de estas tres operaciones para distintos valores del parámetro t se ilustra en la Fig. 2.63.

Etapa 1 (*sin solapamiento*: $-\infty < t < 4$). La reflexión y el desplazamiento de la señal hasta el instante $t_1 = 1$ se muestra en la Fig. 2.63(a). Es evidente que $h(t_1 - \tau)$ y $x(\tau)$ son distintas de cero en rangos diferentes; por lo tanto su producto es nulo, y también el área (integral). Esta situación continúa hasta que $t = t_2 = 4$, como se representa en la Fig. 2.63(b). Por lo tanto,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int 0\,d\tau = 0, \qquad \text{para } -\infty < t < t_2 = 4.$$

Etapa 2 (*solapamiento parcial por izquierda*: $4 \le t < 5$). Para $t > t_2$ las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ comparten un intervalo donde son no nulas, como se muestra en la Fig. 2.63(c) para $t = t_3$. En este caso, el producto de las funciones es nulo para $t < t_2 = 4$ y para $t > t_3$, siempre que t_3 sea menor que 5, cuando ocurre un solapamiento total entre $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$. Por lo tanto, en esta etapa se tiene que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_4^t \operatorname{sen} \pi\tau\, e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{4-t} - \frac{1}{1+\pi^2}(\pi \cos \pi t - \operatorname{sen} \pi t), \qquad \text{para } t_2 = 4 < t < 5. \end{aligned}$$

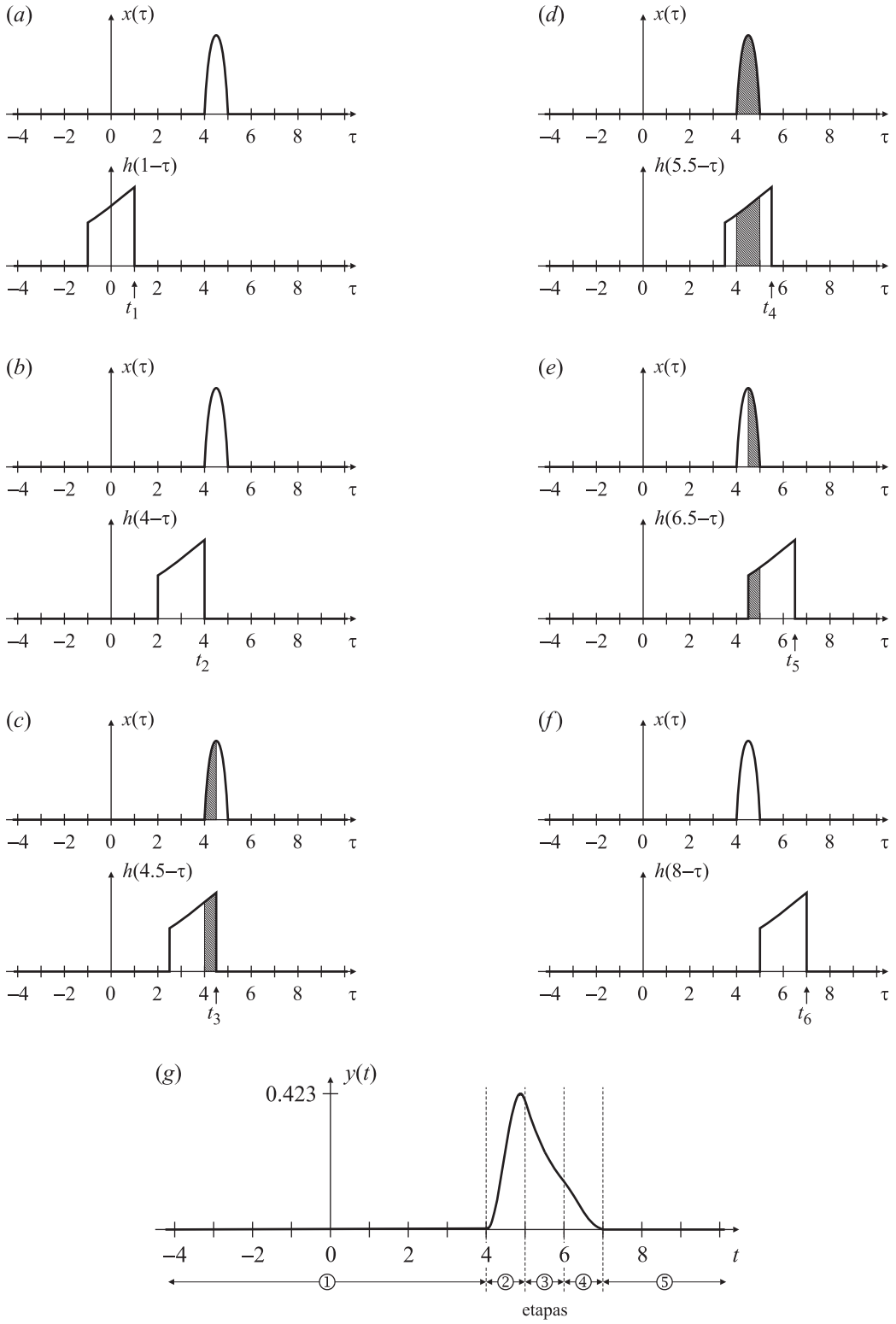


Fig. 2.63. Detalle de las 5 etapas en el cálculo de la convolución: sin solapamiento (a)-(b); solapamiento parcial por izquierda (c); solapamiento total (d); solapamiento parcial por derecha (e); sin solapamiento (f). Resultado de la convolución (g).

Etapa 3 (*solapamiento total*: $5 < t < 6$). En este caso las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ se solapan totalmente, como se representa en la Fig. 2.63(d) para $t = t_4 = 5{,}5$. En este caso los extremos de integración quedan fijos y determinados por una de las funciones [$x(\tau)$ en este ejemplo]. Resulta entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{4}^{5} \operatorname{sen}\pi\tau\, e^{-(t-\tau)}d\tau \\ &= \frac{(1+e)\pi}{1+\pi^2}e^{4-t}, \qquad \text{para } 5 < t < 6. \end{aligned}$$

Etapa 4 (*solapamiento parcial por derecha*: $6 \leq t < 7$). En este intervalo de tiempo las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ nuevamente vuelven a solaparse parcialmente, pero sólo por derecha, como se muestra en la Fig. 2.63(e) . En esta etapa el producto de las funciones es siempre cero para $t > 5$, lo que fija el extremo superior de integración. El límite inferior depende de la posición de la "función deslizante" $h(t-\tau)$, y en este ejemplo es $t-2$. Por lo tanto, en este intervalo,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{t-2}^{5} \operatorname{sen}\pi\tau\, e^{-(t-\tau)}d\tau \\ &= \frac{\pi}{1+\pi^2}e^{t-5} + \frac{e^2}{1+\pi^2}(\pi\cos\pi t + \operatorname{sen}\pi t), \qquad \text{para } t_2 = 6 < t < 7. \end{aligned}$$

Etapa 5 (*sin solapamiento*: $7 \leq t$): Finalmente, para $t > 7$, las dos señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ no comparten ningún intervalo donde ambas sean no nulas, por lo que el producto (y el área) son nulos, como se representa en la Fig. 2.63(f).

Resumiendo los resultados, se tiene que

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} 0, & t < 4, \\ \frac{\pi}{1+\pi^2}e^{4-t} - \frac{1}{1+\pi^2}(\pi\cos\pi t - \operatorname{sen}\pi t), & 4 \leq t < 5, \\ \frac{(1+e)\pi}{1+\pi^2}e^{4-t}, & 5 \leq t < 6, \\ \frac{\pi}{1+\pi^2}e^{7-t} + \frac{e^{-2}}{1+\pi^2}(\pi\cos\pi t - \operatorname{sen}\pi t), & 6 \leq t < 7, \\ 0, & 7 \leq t, \end{cases}$$

cuya representación temporal se representa en la Fig. 2.63(g). □

2.6.2. Forma alternativa de la integral de convolución

La interpretación gráfica descripta anteriormente no es sino una de las posibles interpretaciones de la convolución. La ecuación (2.100) también puede escribirse como

$$y\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h\,(\sigma)\; x\,(t-\sigma)\; d\sigma, \tag{2.107}$$

que resulta de efectuar el cambio de variables $t - \tau \mapsto \sigma$. Si bien $d\sigma = -dt$, el signo de la integral no cambia porque también cambian los extremos de integración. De modo que para el cálculo de la convolución tanto $x\,(\tau)$ como $h\,(\tau)$ pueden ser reflejadas y desplazadas, y la elección entre una u otra forma depende de cuál de las dos se pueda calcular con mayor facilidad.

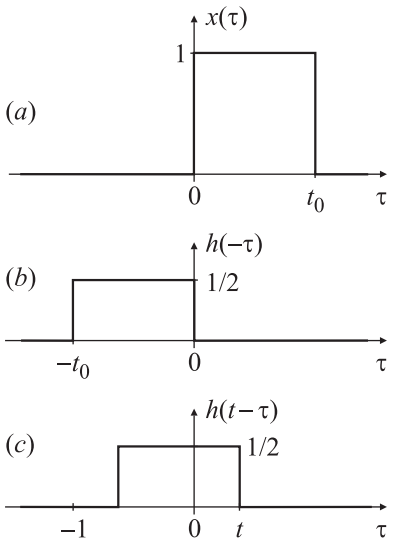


Fig. 2.64. Ejemplo gráfico del cálculo de la convolución por dos métodos alternativos.

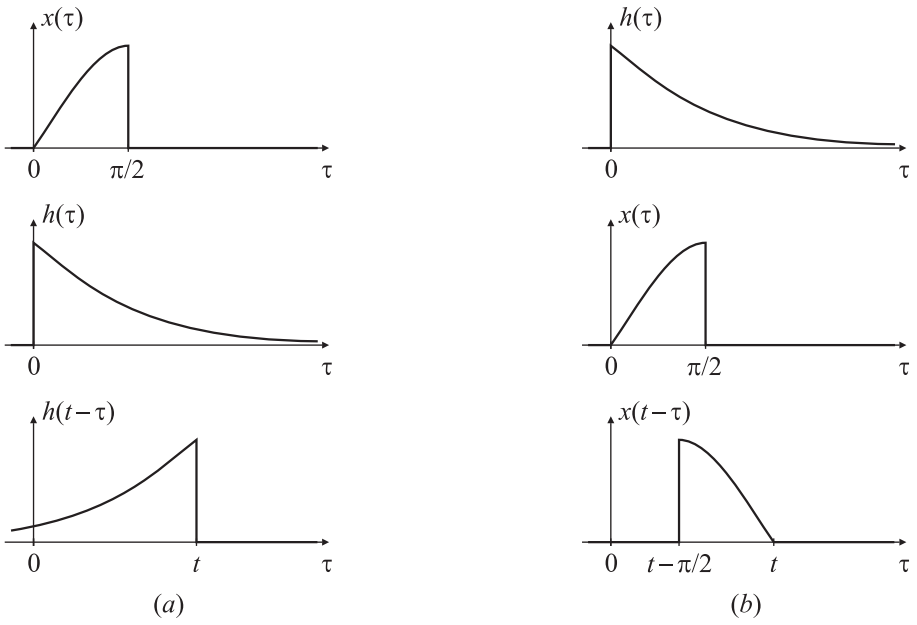


Fig. 2.65. Comparación del cálculo de la convolución del Ejemplo 2.39 utilizando la expresión (2.100) (a) o la ecuación (2.107) (b).

En la Fig. 2.64 se muestra gráficamente que las dos formas (2.100) y (2.107) de calcular la integral de convolución son equivalentes. La serie de gráficos a la izquierda de la Fig. 2.64 muestran la evaluación de (2.100), mientras que las curvas de la derecha ilustran el cálculo de (2.107). Los pasos definidos anteriormente: Reflexión, Desplazamiento, Multiplicación e Integración se ilustran en la Fig. 2.64(b), (c), (d) y (e), respectivamente. Como se indica en la Fig. 2.64(e), la convolución de $x(\tau)$ y $h(\tau)$ es la misma, independientemente de qué función se elija para reflejar y desplazar.

EJEMPLO **2.39. Comparación de los métodos para el cálculo de la convolución**
Sean

$$h(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \qquad x(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0\leq t\leq \pi/2,\\ 0, & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Para las señales de este ejemplo, la convolución puede calcularse en 3 etapas: 1 (sin solapamiento), 2 (solapamiento parcial por izquierda), y 3 (solapamiento total). Como $h(t)$ es de longitud infinita, nunca ocurren las etapas 4 (solapamiento parcial por derecha) y 5 (sin solapamiento). Usando (2.100), $y(t)=x(t)*h(t)$ está dada por

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=\begin{cases} 0, & \text{(etapa 1): } t\leq 0,\\ \int_0^t \operatorname{sen}\tau\, e^{-(t-\tau)}d\tau, & \text{(etapa 2): } 0\leq t<\pi/2,\\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\tau\, e^{-(t-\tau)}d\tau, & \text{(etapa 3): } \pi/2\leq t,\end{cases} \tag{2.108}$$

Los límites de la integral se determinan aplicando la regla enunciada en la Sección 2.6.1, y con la ayuda de la Fig. 2.65(a). Los valores extremos del argumento de la función $x(\tau)$ para los cuales es distinta de cero son 0 y $\pi/2$, respectivamente. Para la función $h(t-\tau)=e^{-(t-\tau)}$ el menor valor del argumento para el cual la función se anula es $\tau=-\infty$, y el mayor valor del argumento es $\tau=t$. Para definir los extremos de integración se toma el mayor valor entre los extremos inferiores;en cualquier caso, este límite es 0. El extremo superior de integración es el menor de los extremos superiores, y por lo tanto es una función de t. Para $0\leq t\leq \pi/2$, el mínimo es t; para $t\geq \pi/2$, el extremo de integración es $\pi/2$. Evaluando (2.108) se encuentra que

$$y(t)=\begin{cases} 0, & t\leq 0,\\ \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} t-\cos t+e^{-t}\right), & 0\leq t<\pi/2,\\ \frac{1}{2}e^{-t}\left(1+e^{\pi/2}\right), & \pi/2\leq t.\end{cases} \tag{2.109}$$

De manera análoga, de (2.107),

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau=\begin{cases} 0, & \text{(etapa 1): } t\leq 0,\\ \int_0^t e^{-\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau, & \text{(etapa 2): } 0\leq t<\pi/2,\\ \int_{t-\pi/2}^t e^{-\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau, & \text{(etapa 3): } \pi/2\leq t.\end{cases} \tag{2.110}$$

Aunque la ecuación (2.110) que describe la señal de salida $y(t)$ es diferente de (2.108), su evaluación da el mismo resultado (2.109). □

2.6.3. Convolución con impulsos

La integral de convolución más sencilla de evaluar es aquella en la cual alguna de las funciones intervinientes es un impulso. La convolución entre una función $x(t)$ y un impulso $\delta(t-t_0)$ representados en las Figs. 2.66(a) y (b), respectivamente, se puede calcular aplicando, por ejemplo, la ecuación (2.100),

$$x(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,\delta(\tau-t_0)\,d\tau=x(t-t_0).$$

El paso del segundo al tercer miembro se explica por la Propiedad 3 del impulso, repetida aquí por comodidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-\theta)\,x(\tau)\,d\tau=x(\theta).$$

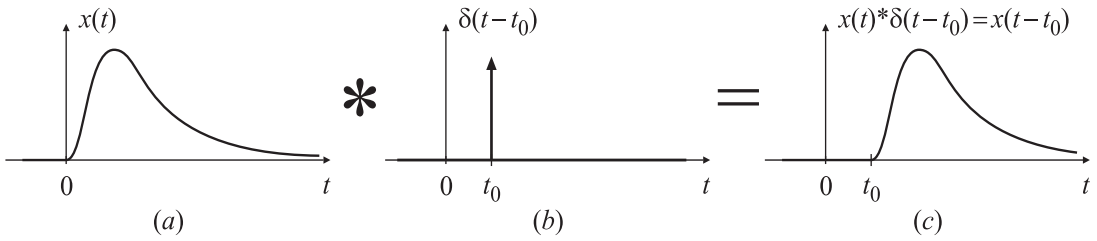


Fig. 2.66. Convolución de una función $x(t)$ con un impulso $\delta(t-t_0)$.

Si, en cambio, se aplica la expresión (2.107), se tiene que

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta[(t-\tau)-t_0]\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = x(t-t_0).$$

En definitiva, cualquiera de las dos expresiones muestra que la convolución de la función $x(t)$ con una función impulso resulta en desplazar $x(t)$, llevando el origen del eje de las abscisas al lugar donde está localizado el impulso, como se muestra en la Figs. 2.66(c). Como se estudiará más adelante, esta propiedad simplifica mucho el análisis de problemas más complicados.

EJEMPLO **2.40. Convolución con un par de impulsos**
Sea $h(t)$ la función formada por un par de impulsos que se muestra en la Fig. 2.67(a), y $x(t)$ la función pulso que se observa en la Fig. 2.67(b). Para estas funciones, la ecuación (2.100) toma la forma particular

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)]\; x(t-\tau)\; d\tau,$$

y aplicando la Propiedad 3 del impulso se encuentra que

$$y(t) = x(t-T) + x(t+T),$$

cuya gráfica se representa en la Fig. 2.67(c). □

EJEMPLO **2.41. Convolución con un tren de impulsos**
El pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

de la Fig. 2.67(d) se convoluciona con el tren de impulsos

$$p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$$

que se grafica en la Fig. 2.67(e). El resultado de la convolución es

$$y(t) = x(t) * p(t) = x(t) * \sum_n \delta(t-nT_0) = \sum_n x(t-nT_0).$$

Esta expresión, que se representa en la Fig. 2.67(f), muestra que al convolucionar el pulso rectangular con el tren de impulsos, el primero queda replicado donde se localizan cada uno de los impulsos. □

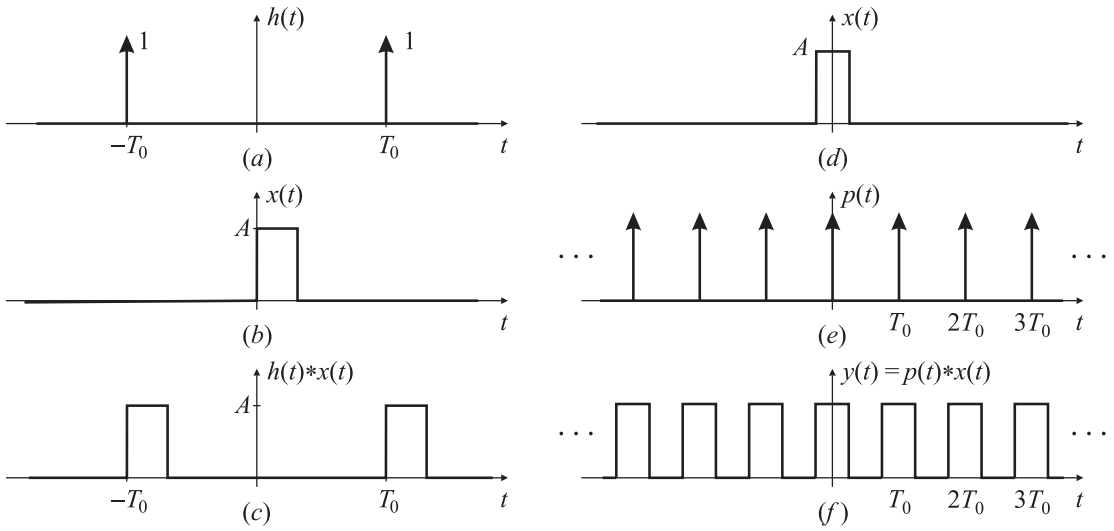


Fig. 2.67. Convolución de un pulso con dos impulsos (a)-(c) y con un tren de impulsos (d)-(f).

El ejemplo anterior muestra una manera posible de obtener una función periódica a partir de una señal aperiódica. Si se observa con atención, la señal $y(t)$ del Ejemplo 2.41 es en realidad una señal periódica. Utilizando la notación de las primeras Secciones, se tiene que

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t).$$

Esta observación es de gran utilidad para facilitar el cálculo de algunas series de Fourier.

2.6.4. Teorema de convolución temporal

Posiblemente, una de las herramientas más poderosas en el análisis científico es la relación entre la convolución de dos señales y su transformada de Fourier. Esta propiedad, conocida como *teorema de convolución*, permite calcular la convolución matemáticamente (o visualmente) en el dominio tiempo multiplicando las transformadas en el dominio frecuencia. Esto es, si $h(t)$ tiene transformada de Fourier $H(f)$ y $x(t)$ tiene transformada $X(f)$, entonces la convolución $x(t) * h(t)$ tiene transformada $X(f) H(f)$. El par transformado correspondiente es

$$h(t) * x(t) \quad \Leftrightarrow \quad H(f) X(f)$$

Para establecer este resultado, se transforman ambos lados de la ecuación (2.100),

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt. \tag{2.111}$$

Suponiendo que el orden de integración puede intercambiarse[10], se tiene que

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt \right] d\tau. \tag{2.112}$$

[10] El intercambio del orden de integración no es inmediato porque las integrales son impropias; para que el resultado sea correcto, las funciones $x(\cdot)$ y $h(\cdot)$ deben cumplir con una serie de requisitos (continuidad uniforme, etc.) que en general son satisfechos por las señales usuales en la teoría de sistemas.

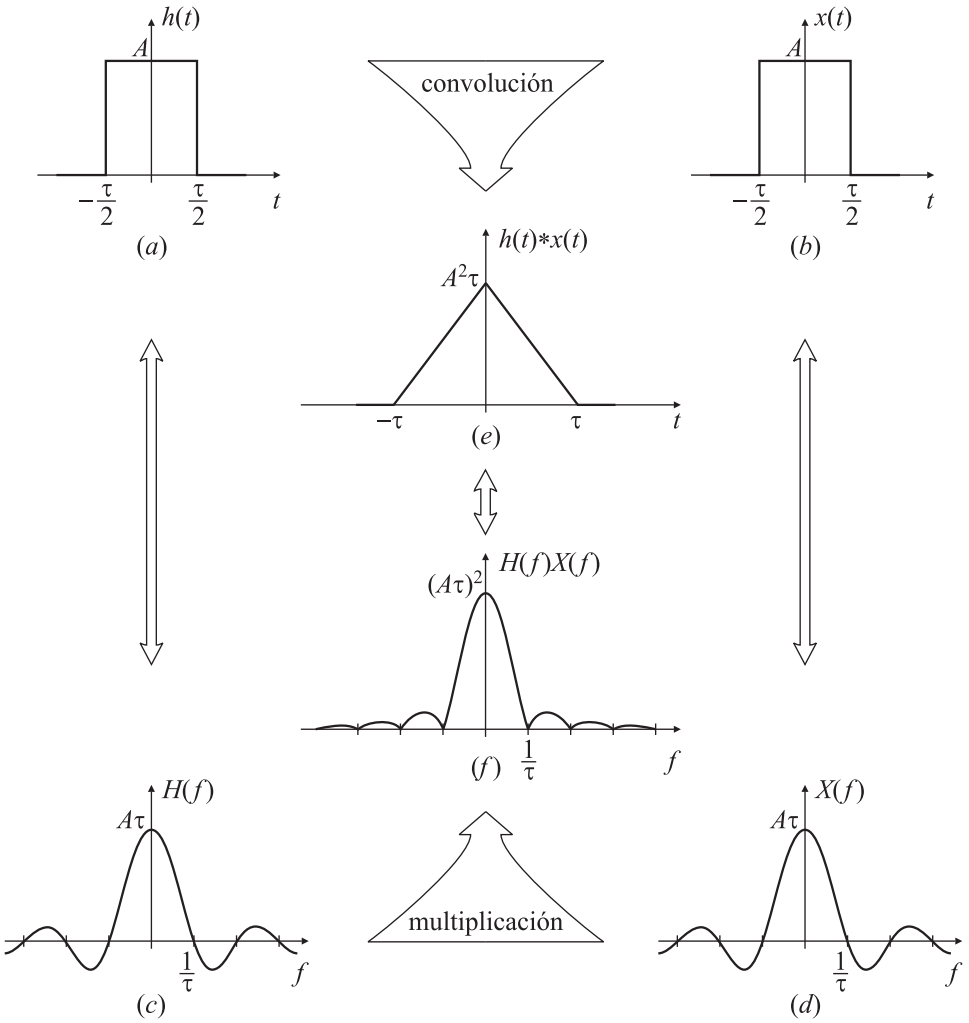


Fig. 2.68. Ejemplo gráfico del teorema de convolución.

Sustituyendo $\sigma = t - \tau$, el término entre corchetes se puede escribir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\, e^{-j2\pi f(\sigma+t)} d\sigma = e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\, e^{-j2\pi f(\sigma)} d\sigma = e^{-j2\pi f\tau} H(f).$$

Entonces, la ecuación (2.112) resulta

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} H(f)\, d\tau = H(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau = H(f)\, X(f).$$

La recíproca se puede probar de manera similar.

EJEMPLO **2.42. Transformada de un pulso triangular**
Para ilustrar esta propiedad se estudia la convolución de los dos pulsos, ilustrados en las Fig. 2.68(a) y (b). La convolución de dos pulsos es una función triangular, como se observa en la Fig. 2.68(e). La transformada de Fourier del pulso es la función $\mathrm{sinc}(f)$ que se muestra en la Fig. 2.68(c) y (d). El teorema de convolución establece que la convolución en el dominio temporal se corresponde con la

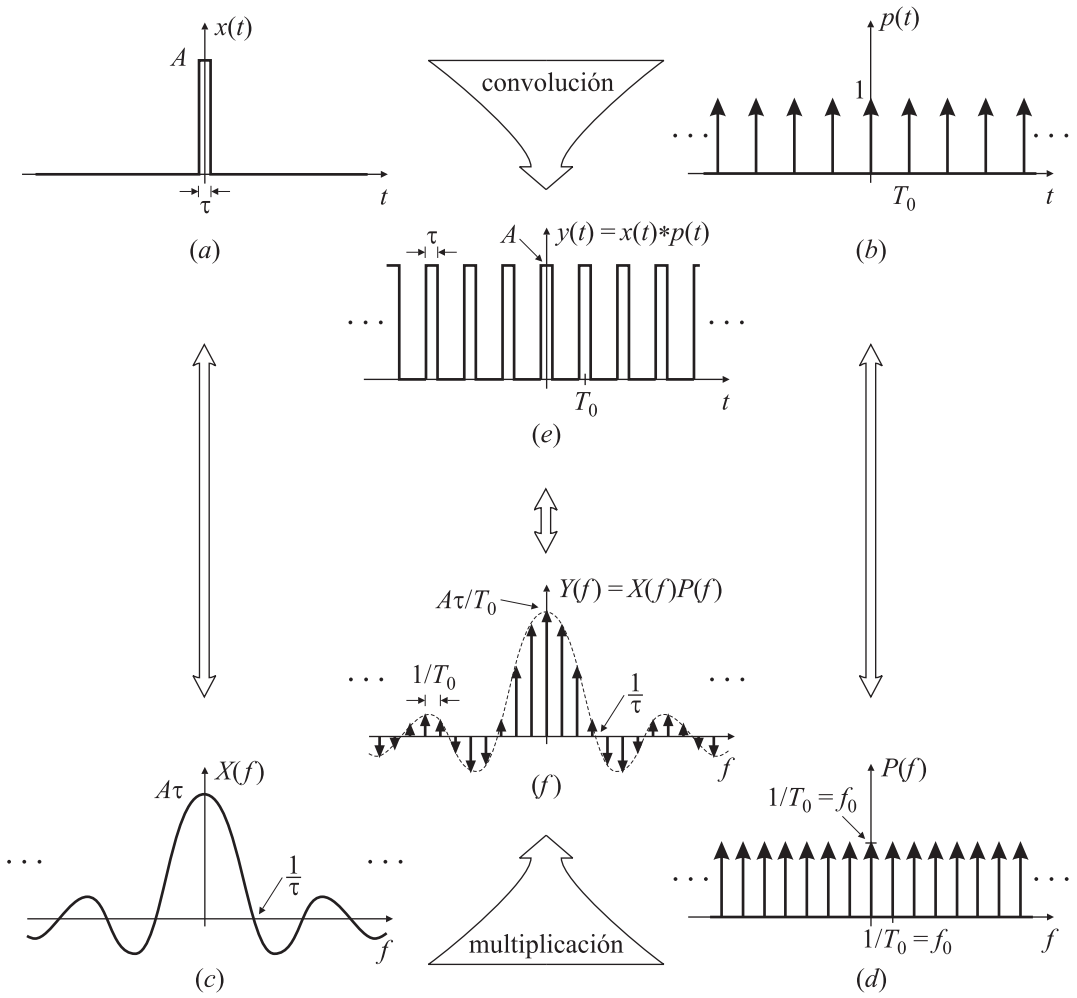


Fig. 2.69. Ejemplo de aplicación del teorema de convolución temporal.

multiplicación en el dominio frecuencial; de este modo, la forma de onda triangular de la Fig. 2.68(e) y la función $\text{sinc}^2(f)$ de la Fig. 2.68(f) son pares transformados de Fourier. Los detalles del cálculo se estudian en el Ejercicio 17. □

Uno de los aportes más significativos de la teoría de distribuciones es que el producto de una función continua y un impulso está bien definido (Sección 2.3.4, Propiedad 3). Por lo tanto, si $x(t)$ es una función continua en $t = t_0$, entonces,

$$x(t)\ \delta(t - t_0) = x(t_0)\ \delta(t - t_0).$$

Es decir, que el resultado del producto de una función continua con un impulso es un impulso de área igual al valor de la función continua evaluada donde ocurre el impulso. Este resultado, junto con el teorema de convolución, ayuda a obtener muchos pares transformados de Fourier: el cambio de una convolución en el dominio temporal por un producto en el dominio frecuencial permite resolver problemas arduos de manera casi trivial.

EJEMPLO **2.43. Transformada de un tren de pulsos**
En la Fig. 2.69(a) se muestra un pulso rectangular $x(t)$ de ancho τ y altura A y en la Fig. 2.69(b) un tren infinito de impulsos $p(t)$. La convolución de estas dos funciones es el tren infinito de pulsos que se muestra en la Fig. 2.69(e). Para obtener la transformada de Fourier de esta secuencia infinita de pulsos, se aplica el teorema de convolución temporal. La transformada de Fourier del pulso $x\,(t)$ es $X(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$ que se muestra en la Fig. 2.69(c) y la transformada del tren de impulsos $p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$ es $P(f) = T_0^{-1} \sum_k \delta(f - k/T_0)$, que se representa en la Fig. 2.69(d). La señal que resulta de convolucionar $x(t)$ con $p(t)$ es la señal (periódica)

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t) = x(t) * \sum_n \delta(t - nT_0) = \sum_n x(t - nT_0),$$

como se estudió en el Ejemplo 2.41. La transformada de esta función se puede obtener aplicando el teorema de convolución temporal, que establece que la transformada de $\tilde{x}(t)$ es el producto de las transformadas de $x(t)$ y de $p(t)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \mathcal{F}\{x(t) * p(t)\} = X(f)P(f) \\ &= A\tau \frac{1}{T_0} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \\ &= A\frac{\tau}{T_0} \sum_k \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0}k\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right). \end{aligned}$$

Esta transformada se muestra en la Fig. 2.69(f). Resulta entonces que la transformada de Fourier de un tren de pulsos es una sucesión de funciones impulso, cuya amplitud está pesada o modulada por una función $A\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$. □

Los Ejemplos 2.41 y 2.43 muestran una propiedad fundamental de los espectros de señales periódicas. Como la señal periódica $\tilde{x}(t)$ se puede pensar como la convolución de un tren de impulsos $p(t)$ y una señal aperiódica $x(t)$ formada por un período de $\tilde{x}(t)$, el teorema de la convolución en tiempo establece que la trasformada $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$ de $\tilde{x}(t)$ es el producto de las transformadas de $x(t)$ y de $p(t)$. En particular, como el espectro de $p(t)$ también es un tren de impulsos (en frecuencia), el espectro de la señal periódica estará formado por impulsos, modulados en amplitud por la transformada de la señal aperiódica $x(t)$, como se sintetiza en el cuadro siguiente. El producto de las funciones en el dominio frecuencia debe interpretarse en el sentido de la teoría de distribuciones; en caso contrario carece de sentido.

$$\begin{array}{l|l} \tilde{x}\,(t) = x(t) * p(t) & \\ \quad = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \quad \text{con} \quad x\,(t) = \begin{cases} \tilde{x}\,(t)\,, & t_0 \le t \le t_0 + T_0, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} & p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0) \\ \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow & \qquad\qquad\qquad \Updownarrow \\ \qquad\qquad X(f) & P(f) = \dfrac{1}{T_0} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}\,(t)\} = X(f)P(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) \\ &= f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)\ \delta(f - kf_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{aligned}$$

Esto es otro punto de vista de los resultados presentados en la Sección 2.4.1.

Respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Una de las propiedades más útiles de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLIT) es que cuando son excitados con entradas exponenciales complejas de la forma $e^{j2\pi f_0 t}$ su salida también es una exponencial compleja, sólo que con amplitud y fase distintas a las de la señal de entrada. Como las formas de onda de entrada y salida son las mismas, se dice que las exponenciales complejas son *autofunciones* para los sistemas lineales.

Sea $\mathcal{S}$ un sistema lineal e invariante en el tiempo caracterizado por su respuesta impulsiva $h(t)$. Si la señal de entrada es una exponencial compleja $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, la salida está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, Ae^{j2\pi f_0 (t-\tau)}\, d\tau = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau \right)}_{H(f)|_{f=f_0}} Ae^{j2\pi f_0 t} \\ &= H(f)|_{f=f_0}\, Ae^{j2\pi f_0 t} = H(f)|_{f=f_0}\, x(t), \end{aligned} \tag{2.113}$$

La última expresión muestra que la salida del sistema es la entrada escalada por el número complejo $H(f)|_{f=f_0}$. En estos casos, la transformada de Fourier $H(f)$ de la respuesta impulsiva $h(t)$ se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema $\mathcal{S}$.

El mismo resultado puede obtenerse aplicando el teorema de convolución en tiempo. Si $H(f)$ es la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva $h(t)$, la transformada de la entrada $x(t) = Ae^{j\pi f_0 t}$ es $X(f) = A\delta(f - f_0)$. Por lo tanto,

$$Y(f) = H(f)X(f) = H(f)A\delta(f - f_0) = H(f)|_{f=f_0}\, A\delta(f - f_0).$$

Como $H(f)|_{f=f_0}$ es un número complejo, la antitransformada de $Y(f)$ es inmediata:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = H(f)|_{f=f_0}\, \mathcal{F}^{-1}\{A\delta(f - f_0)\} \\ &= H(f)|_{f=f_0}\, Ae^{j2\pi f_0 t} \\ &= H(f)|_{f=f_0}\, x(t). \end{aligned}$$

Esta característica facilita enormemente el cálculo de la respuesta del sistema cuando se excita con este tipo de señales, pues lo único que debe calcularse es el número complejo $H(f)|_{f=f_0}$.

La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo ante una excitación de tipo senoidal es consecuencia directa de estos resultados. Si la entrada $x(t)$ está dada por

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = A\tfrac{1}{2}\left(e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}\right) = \tfrac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + \tfrac{1}{2}Ae^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t},$$

la propiedad de linealidad, junto con el resultado (2.113) indica que

$$y(t) = H(f)|_{f=f_0}\, \tfrac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + H(f)|_{f=(-f_0)}\, \tfrac{1}{2}Ae^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t}. \tag{2.114}$$

Esta expresión puede simplificarse todavía más notando que, si la respuesta impulsiva $h(t)$ es real,

$$H(f)|_{f=(-f_0)} = H^*(f)|_{f=f_0},$$

como resulta evidente de aplicar la definición:

$$\begin{aligned} H^*(f_0) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi f_0 t}\,dt\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t)(e^{-j2\pi f_0 t})^*\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j2\pi f_0 t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi(-f_0)t}\,dt = H(-f_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión (2.114) puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(t) &= H(f)|_{f=f_0}\,\tfrac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + H^*(f)|_{f=f_0}\,\tfrac{1}{2}Ae^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= H(f)|_{f=f_0}\,\tfrac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + \left(H(f)|_{f=f_0}\,\tfrac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\right)^* \\ &= \mathrm{Re}\left\{H(f)|_{f=f_0}\,Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Notando

$$H(f)|_{f=f_0} = |H(f_0)|e^{j\arg[H(f_0)]}$$

donde

$$|H(f_0)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{H(f_0)\}^2 + \mathrm{Im}\{H(f_0)\}^2}, \qquad \arg[H(f_0)] = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}\{H(f_0)\}}{\mathrm{Re}\{H(f_0)\}}\right],$$

la ecuación (2.115) resulta

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{Re}\left\{|H(f_0)|e^{j\arg[H(f_0)]}Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\right\} \\ &= |H(f_0)|A\cos\left(2\pi f_0 t + \phi + \arg[H(f_0)]\right). \end{aligned}$$

Esta expresión pone de manifiesto el efecto del sistema en la respuesta:

$$y(t) = \underbrace{|H(f_0)|}_{\substack{\uparrow \\ \text{cambio en la magnitud}}} A\cos(2\pi f_0 t + \phi + \underbrace{\arg[H(f_0)]}_{\substack{\uparrow \\ \text{cambio en la fase}}})$$

La salida del sistema es la misma entrada escalada en magnitud por el módulo de la respuesta en frecuencia $|H(f_0)|$, y desfasada por el argumento de la respuesta en frecuencia, ambos evaluados a la frecuencia f_0 de la excitación.

A veces resulta más conveniente expresar el desfasaje introducido por el sistema como un *retardo* de tiempo, lo que puede lograrse escribiendo

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(f_0)|A\cos\left(2\pi f_0 t + \phi + \arg[H(f_0)]\right) \\ &= |H(f_0)|A\cos\left[2\pi f_0\left(t + \arg[H(f_0)]/(2\pi f_0)\right) + \phi\right] \\ &= H(f_0)|A\cos\left[2\pi f_0\left(t - \Delta T\right) + \phi\right], \end{aligned}$$

donde

$$\Delta T = -\frac{\arg[H(f_0)]}{2\pi f_0}$$

es el retardo de tiempo que sufre la señal al atravesar el sistema.

EJEMPLO **2.44. Respuesta de un SLIT excitados por una entrada senoidal**
Sea $\mathcal{S}$ un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h(t) = \beta e^{-\alpha t}u(t)$ y $\alpha > 0$, excitado con una entrada $x(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \gamma)$. En el Ejemplo 2.5 (página 87) se obtuvo que

$$H(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f} = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j\frac{2\pi f\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2},$$

y también

$$|H(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}, \qquad \arg[H(f)] = -\arctan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right).$$

La salida $y(t)$ del sistema ante la entrada $x(t)$ es entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(f_0)|A\,\mathrm{sen}\,(2\pi f_0 t + \gamma + \arg[H(f_0)]) \\ &= \frac{\beta A}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f_0)^2}}\,\mathrm{sen}\left[2\pi f_0 t + \gamma - \arctan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right], \end{aligned}$$

pues $\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \gamma) = \cos(2\pi f_0 t + \gamma - \pi/2)$.

En particular, el SLIT caracterizado por $h(t)$ es un filtro pasabajos de primer orden tipo Butterworth, con frecuencia de corte en $f_c = \alpha/(2\pi)$ Hz y ganancia unitaria en la banda de paso si $\beta = \alpha$. Si la frecuencia de corte del filtro es $f_c = \alpha/(2\pi) = 100\,\mathrm{Hz}$, y la entrada $x(t)$ es

$$x(t) = 10\,\mathrm{sen}(2\pi 170t),$$

es decir, tiene frecuencia $f_0 = 170\,\mathrm{Hz}$, amplitud $A = 10$ y fase $\phi = 0$, el módulo y la fase de $H(f)$ evaluados a la frecuencia de la señal de entrada están dados por

$$\begin{aligned} |H(f_0)| &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}} = \frac{2\pi 100}{\sqrt{(2\pi 100)^2 + (2\pi 170)^2}} = \frac{10}{\sqrt{389}} \approx 0{,}5, \\ \arg[H(f_0)] &= -\arctan\left(\frac{2\pi f_0}{\alpha}\right) = -\arctan\left(\frac{2\pi 170}{2\pi 100}\right) = -1{,}04\,\mathrm{rad}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la salida $y(t)$ puede escribirse como

$$y(t) \approx 0{,}5 \times 10 \times \mathrm{sen}(2\pi 170t - 1{,}04).$$

El retardo de tiempo entre la entrada y la salida es

$$\Delta T = -\frac{\arg[H(f_0)]}{2\pi f_0} = \frac{1{,}04}{2\pi 170} \approx 0{,}97\,\mathrm{ms},$$

de manera que la salida también puede expresarse como

$$y(t) \approx 0{,}5 \times 10 \times \mathrm{sen}[2\pi 170(t - 0{,}97 \times 10^{-3})]. \tag{2.116}$$

La Fig. 2.70 muestra la entrada y la salida del sistema en función del tiempo obtenidas por simulación numérica. Se comprueba que coincide con la expresión (2.116). □

2.6.5. Teorema de convolución frecuencial

De manera equivalente, una convolución de funciones en el dominio de la frecuencia se corresponde con una multiplicación de las antitransformadas en el dominio temporal. La

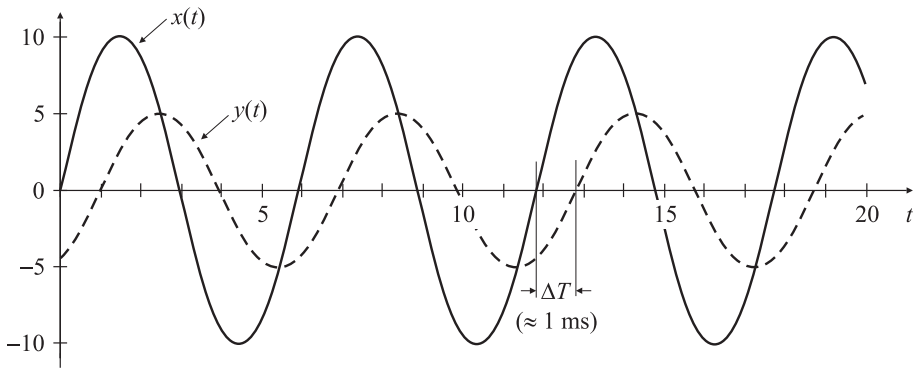


Fig. 2.70. Señales de entrada $x(t)$ y de salida $y(t)$ del sistema con respuesta impulsiva $h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$.

transformada de Fourier del producto $x(t)\,h(t)$ es equivalente a la convolución $X(f) * H(f)$. El par transformado de Fourier es

$$x(t)\,h(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) * H(f).$$

La derivación de este par transformado es similar a la del teorema de convolución temporal; también puede obtenerse en base al teorema de convolución temporal y la propiedad de dualidad[11].

EJEMPLO **2.45. Transformada de una ráfaga o "burst"**
En la Fig. 2.71(e) se representa la señal $y(t)$ formada por 7 períodos ($\tau = 7$ en la figura) de una señal cosenoidal de frecuencia $f_0 = 1/T_0$ y amplitud A:

$$y(t) = \begin{cases} A\cos 2\pi f_0 t, & |t| < 3{,}5T_0 = 3{,}5/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El cálculo directo de esta transformada es

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-3{,}5T_0}^{3{,}5T_0} A\cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-3{,}5T_0}^{3{,}5T_0} A\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi ft)\, dt \\ &= \frac{A}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}[2\pi(f-f_0)t]}{(f-f_0)}\bigg|_{-3{,}5T_0}^{3{,}5T_0} + \frac{A}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}[2\pi(f+f_0)t]}{(f+f_0)}\bigg|_{-3{,}5T_0}^{3{,}5T_0} \\ &= \frac{A}{4\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}[2\pi(f-f_0)3{,}5T_0]}{(f-f_0)} - \frac{\operatorname{sen}[2\pi(f-f_0)(-3{,}5T_0)]}{(f-f_0)}\right] \\ &\qquad + \frac{A}{4\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}[2\pi(f+f_0)3{,}5T_0]}{(f+f_0)} - \frac{\operatorname{sen}[2\pi(f+f_0)(-3{,}5T_0)]}{(f+f_0)}\right] \\ &= \frac{A}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)} \end{aligned} \tag{2.117}$$

[11] En caso de utilizarse las transformadas que dependen de la variable frecuencia angular ω, la forma correcta del par transformado es $x(t)\,h(t) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega)\, H(\Omega)$.

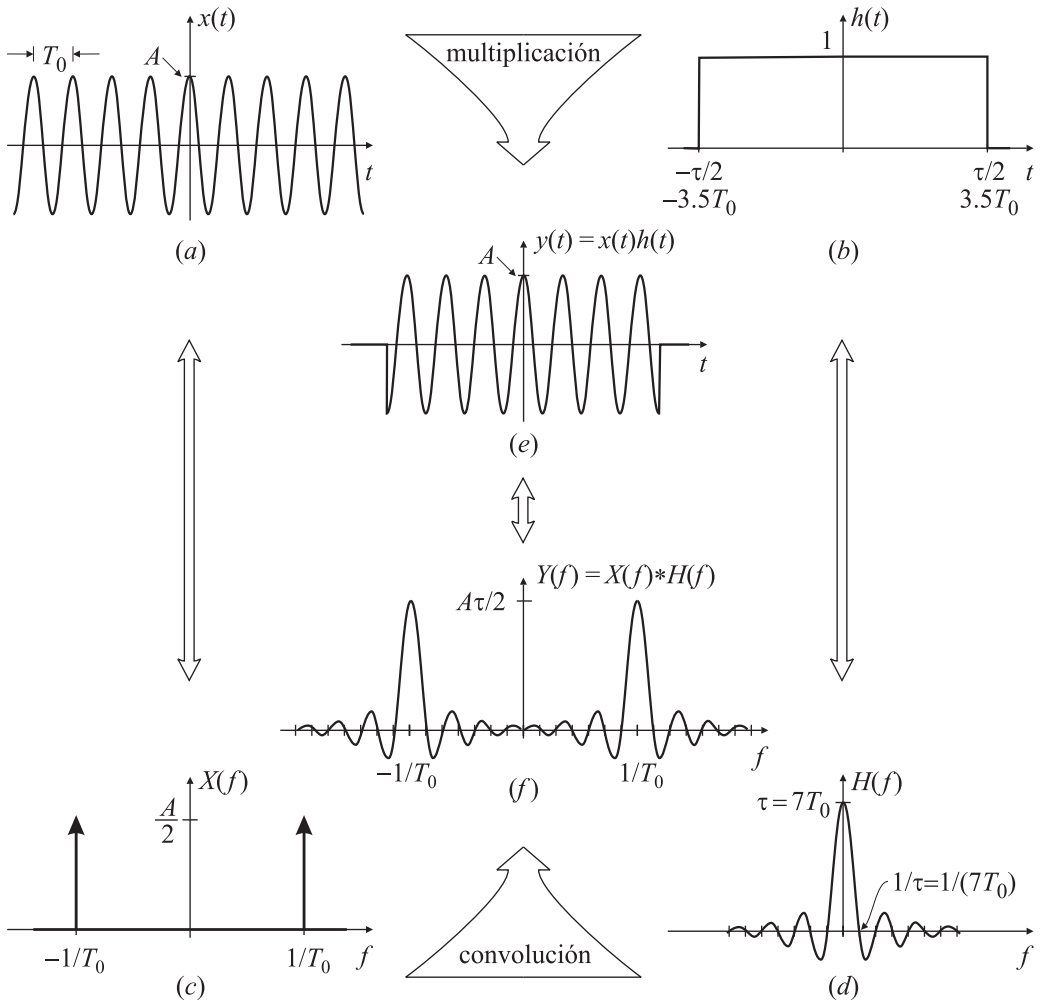


Fig. 2.71. Ejemplo gráfico del teorema de convolución en frecuencia.

La última expresión se puede simplificar un poco más

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{A}{2\pi}\left[\frac{\text{sen}[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{\text{sen}[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)}\right] \\ &= \frac{A}{2\pi}\left[\frac{\text{sen}(7\pi T_0 f - 7\pi T_0 f_0)}{(f-f_0)} + \frac{\text{sen}(7\pi T_0 f + 7\pi T_0 f_0)}{(f+f_0)}\right] \\ &= \frac{A}{2\pi}\frac{\text{sen}(7\pi T_0 f - 7\pi)}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi}\frac{\text{sen}(7\pi T_0 f + 7\pi)}{(f+f_0)} = -\frac{A}{\pi}\frac{\text{sen}(7\pi T_0 f)}{(f-f_0)} - \frac{A}{\pi}\frac{\text{sen}(7\pi T_0 f)}{(f+f_0)} \end{aligned}$$

de donde resulta

$$Y(f) = \frac{A}{\pi}\frac{\text{sen}(7\pi T_0 f)}{f^2 - f_0^2}. \tag{2.118}$$

Por otra parte la ecuación (2.117) también puede escribirse como

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{A}{2\pi}\frac{\text{sen}[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi}\frac{\text{sen}[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)} \\ &= \frac{A}{2\pi}(7\pi T_0)\frac{\text{sen}[7\pi(f-f_0)T_0]}{7\pi T_0(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi}(7\pi T_0)\frac{\text{sen}[7\pi(f+f_0)T_0]}{7\pi T_0(f+f_0)} \\ &= \frac{7AT_0}{2}\,\text{sinc}[(f-f_0)7T_0] + \frac{7AT_0}{2}\,\text{sinc}[(f+f_0)7T_0]. \end{aligned} \tag{2.119}$$

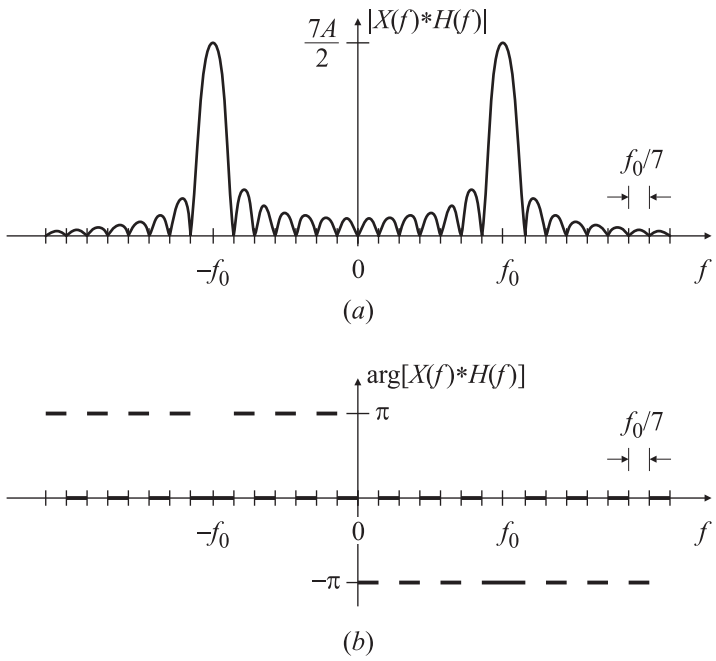


Fig. 2.72. Transformada de Fourier en módulo (a) y fase (b) de la ráfaga del Ejemplo 2.45.

Tanto (2.118) como (2.119) representan la misma transformada. Sin embargo, esto es difícil de apreciar a primera vista, y tampoco es sencillo estar absolutamente convencido de la validez de cualquiera de las dos expresiones. En casos como éste el teorema de convolución frecuencial presta una ayuda valiosa. Como se muestra en la Fig. 2.71(e), la señal $y(t)$ puede pensarse como el producto de una señal $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, representada en la Fig. 2.71(a), con la señal tipo pulso $h(t)$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 3{,}5T_0 = 3{,}5/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se grafica en la Fig. 2.71(b). Es evidente que

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f+f_0) + \frac{A}{2}\delta(f-f_0), \quad \text{y} \quad H(f) = 7T_0\,\mathrm{sinc}(7T_0 f).$$

como muestran las Figs. 2.71(c) y (d), respectivamente. Como $y(t) = x(t) \times h(t)$, el teorema de convolución en frecuencia asegura que

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) * H(f) = \left[\frac{A}{2}\delta(f+f_0) + \frac{A}{2}\delta(f-f_0)\right] * 7T_0\,\mathrm{sinc}(7T_0 f) \\ &= \frac{7AT_0}{2}\,\mathrm{sinc}[(f-f_0)7T_0] + \frac{7AT_0}{2}\,\mathrm{sinc}[(f+f_0)7T_0]. \end{aligned}$$

Esta última expresión coincide con (2.119). La Fig. 2.71(f) muestra la forma aproximada de este espectro, pues hay que tener en cuenta las sumas de las "colas" de los $\mathrm{sinc}(\,\cdot\,)$. De todos modos, es muy aproximado al espectro real que se reproduce en la Fig. 2.72. □

El ejemplo anterior muestra que la ventaja aplicar el teorema de convolución frecuencial es que no sólo permite calcular la transformada con menor cantidad de pasos (y menor oportunidad para el error) sino que también facilita la interpretación de los resultados y obtener una comprensión más acabada del problema.

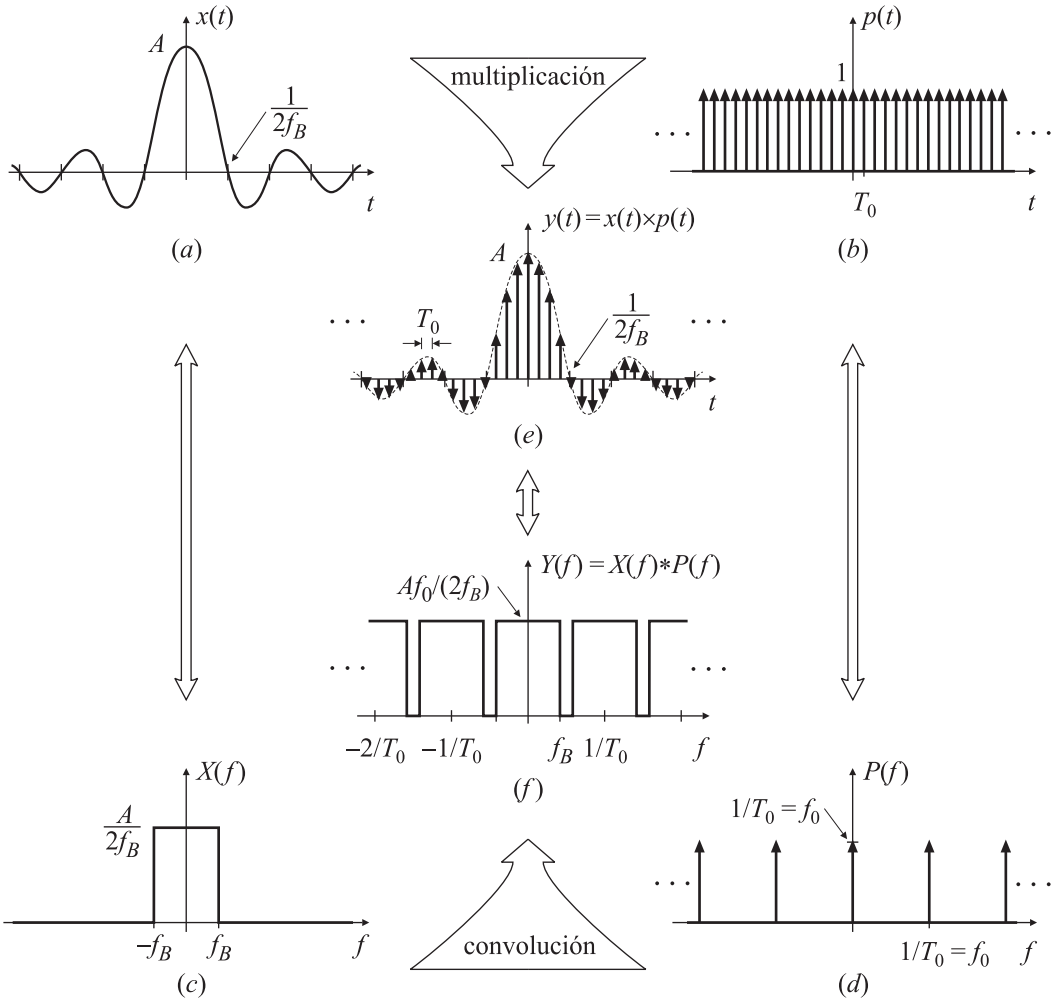


Fig. 2.73. Aplicación del teorema de convolución en frecuencia para calcular el espectro de un tren de impulsos modulado por un sinc(·).

EJEMPLO **2.46. Espectro de un tren de impulsos modulado**
La Fig. 2.73(a) muestra una señal $x(t)$ que modula un tren de impulsos $p(t)$, representada en la Fig. 2.73(b) . En este caso,

$$x(t) = A\,\mathrm{sinc}(2f_B t), \qquad \text{y} \qquad p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0),$$

cuyas transformadas son

$$X(f) = \begin{cases} A/(2f_B), & |f| < f_B, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad P(f) = f_0 \sum_k \delta(f - kf_0),$$

representadas en la Fig. 2.73(c) y (d) , respectivamente, con $f_0 = 1/T_0$. El tren de impulsos modulado por $x(t)$ es

$$y(t) = x(t)p(t) = A\,\mathrm{sinc}(2f_B t) \sum_n \delta(t - nT_0) = A \sum_n \mathrm{sinc}(2f_B T_0 n)\,\delta(t - nT_0). \qquad (2.120)$$

que se representa en la Fig. 2.73(e). La transformada de Fourier de $y(t)$ puede calcularse transformando (2.120),

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n A\,\mathrm{sinc}(2f_B T_0 n)\,\delta(t-nT_0)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \sum_n A\,\mathrm{sinc}(2f_B T_0 n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_0)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \sum_n A\,\mathrm{sinc}(2f_B T_0 n)\, e^{-j2\pi f n T_0} = \sum_n A\,\mathrm{sinc}\left(2f_B \frac{n}{f_0}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{f_0} f}. \end{aligned} \tag{2.121}$$

La ecuación (2.121) es la serie de Fourier de una onda cuadrada en la variable f, de período f_0, ancho de pulso $2f_B$ y amplitud $Af_0/(2f_B)$. Aunque no resulta evidente, se puede comprobar este resultado comparándolo con el del Ejemplo 2.4 (página 78), donde se calculaba la serie de Fourier de una onda cuadrada de período T_0, ancho de pulso τ y amplitud A en la variable t; basta cambiar $t \mapsto f$, $T_0 \mapsto f_0$, $\tau \mapsto 2f_B$.
De manera análoga al Ejemplo 2.45, la aplicación del teorema de convolución (en este caso en frecuencia) permite obtener el resultado de manera más sencilla y facilita su interpretación. De acuerdo al teorema,

$$y(t) = x(t) \times p(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y(f) = X(f) * P(f),$$

de manera que

$$Y(f) = X(f) * f_0 \sum_k \delta(f - kf_0) = \sum_k f_0\, X(f - kf_0). \tag{2.122}$$

Esta última expresión muestra que el espectro $Y(f)$ está formado por réplicas del espectro de $X(f)$ repetidas cada kf_0, y cuya amplitud queda afectada por un factor f_0, tal como se muestra en la Fig. 2.73(f). Las expresiones (2.121) y (2.122) son equivalentes, pero esta última resulta mucho más fácil de comprender. □

El teorema de convolución en frecuencia permite explicar de manera sencilla que el espectro de señales discretas en tiempo es periódico en frecuencia. Una señal discreta en tiempo $y(t)$ puede pensarse como el producto de una señal continua $x(t)$ con un tren de impulsos $p(t)$. El espectro de la señal será la convolución de los espectros, $Y(f) = X(f) * P(f)$. Como el espectro del tren de impulsos $p(t)$ es otro tren de impulsos $P(f)$, la convolución $X(f) * P(f)$ está formada por réplicas de $X(f)$ ubicadas en múltiplos de la frecuencia fundamental del tren de impulsos, como muestra el Ejemplo 2.46.

2.6.6. Los teoremas de convolución y la propiedad de dualidad

En particular, los Ejemplos 2.43 y 2.46 revelan una visión peculiar de la propiedad de dualidad. Mientras que el Ejemplo 2.43 muestra que el espectro de una señal periódica es discreto (como se estudió, por otra parte en la Sección 2.4.1), el Ejemplo 2.46 descubre la situación dual: el espectro de una señal discreta es periódico. Estos resultados se condensan en la Fig. 2.46. En cualquiera de los casos, el teorema de convolución (en tiempo o en frecuencia), y el hecho que la transformada de un tren de impulsos en un dominio también es un tren de impulsos en el dominio transformado permiten explicar estos resultados. La discretización en un domino se puede conseguir *multiplicando* por un tren de impulsos; en el dominio transformado esto equivale a *convolucionar* con otro tren de impulsos: la convolución con un tren de impulsos es una manera de expresar una señal periódica.

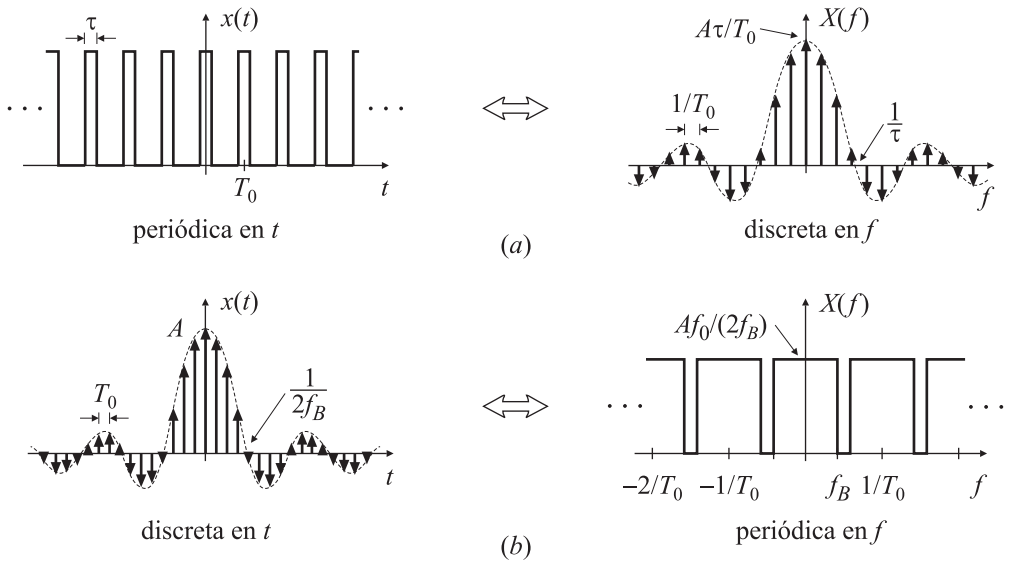


Fig. 2.74. Dualidad tiempo frecuencia: señales periódicas en tiempo tienen un espectro discreto (a); señales discretas en tiempo tienen un espectro periódico (b).

Las relaciones matemáticas para señales periódicas en tiempo son

$$y(t) = x(t) * p(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f)\ \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)\ \delta(f - kf_0),$$

mientras que para señales discretas en tiempo se tiene que

$$y(t) = x(t) \times p(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_0).$$

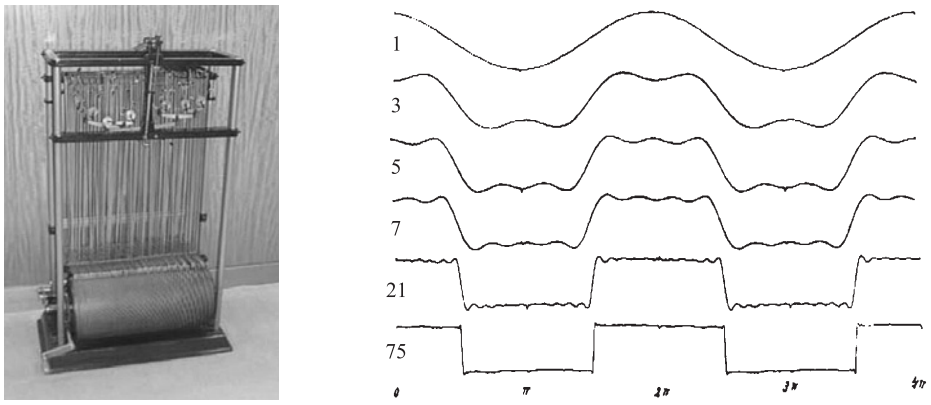
2.7. Efecto Gibbs

En 1889, el físico Albert Michelson y su colega S. Stratton construyeron un sintetizador armónico: un dispositivo que reconstruía una señal periódica $\tilde{x}_N(t)$ de período T_0 en base a la especificación de hasta 80 de sus componentes armónicas. En la Fig. 2.75(a) se observa una réplica del sintetizador armónico y una muestra de las señales generadas con distintos coeficientes en la Fig. 2.75(b) .El sintetizador implementa mecánicamente la ecuación

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}. \tag{2.123}$$

Algunos detalles constructivos se exploran en el Ejercicio 6.

Michelson probó su dispositivo calculando los coeficientes de Fourier de distintas señales periódicas $\tilde{x}(t)$ y comparando la señal reconstruida $\tilde{x}_N(t)$ con la original: en líneas generales $\tilde{x}_N(t)$ resultaba muy similar a $\tilde{x}(t)$. Sin embargo, cuando utilizó como señal de prueba una onda cuadrada la aproximación no fue tan buena. Según Lanczos (1966), Michelson no podía comprender las causas del problema, y pensaba que su aparato podría estar funcionando incorrectamente. Confió sus dudas al matemático Josiah Gibbs,



(a) (b)

Fig. 2.75. Sintetizador armónico de Michelson y Stratton. (a) Dispositivo mecánico. (b) Formas de ondas generadas por el aparato.

quien investigó el fenómeno y publicó sus resultados en 1899. Este comportamiento ya había sido observado y explicado por el matemático inglés Henry Wilbraham 50 años antes, en la corrección de un trabajo de Fourier que trataba sobre la convergencia de las series. Este resultado pasó desapercibido, posiblemente porque fue publicado en una pequeña revista no muy difundida, y recién fue redescubierto por Carslaw en 1925.

En cambio, según Gottlieb y Shu (1997), Michelson y Stratton (1898) publicaron un trabajo en *Nature* donde describían la construcción y el funcionamiento del analizador armónico, junto con algunos gráficos cuyo propósito era demostrar que la máquina calculaba correctamente los coeficientes de la serie de Fourier. Una de las curvas era una onda cuadrada que exhibía las oscilaciones de Gibbs, pero los autores no comentaban nada al respecto en ese trabajo. Sin embargo, parece que Michelson había notado algo particular, pues al poco tiempo (6 de Octubre de 1898) envía una carta a la revista donde comenta la dificultad de construir la función $f(x) = x$ a partir de sus coeficientes de Fourier. En particular, arguía que la expresión (2.123) evaluada en $t = T_0(1/2 + k/N)$, donde k es pequeño, converge a distintos límites para diferentes valores de k. También observó que el mismo fenómeno ocurría para la derivada de la función (una onda cuadrada).

El matemático A. E. H. Love atacó a Michelson en la siguiente edición de *Nature* (13 de Octubre de 1898). Comenzó sugiriendo que Michelson (y todos los físicos preocupados por la convergencia no uniforme) debía leer el texto de Hobson Trigonometría.. Aclaraba correctamente que "el proceso utilizado [por Michelson] es inválido." Es interesante destacar que Love remarcaba las falencias en el argumento matemático de Michelson, pero no se preocupó por entender la dificultad que éste había observado. Parece que Love no conocía el analizador armónico, ni que el problema era el de sintetizar una función a partir de sus coeficientes de Fourier.

El próximo capítulo en la historia ocurre el 29 de Diciembre de 1898, cuando en *Nature* se publican tres cartas. La primera fue remitida por Michelson, con fecha 1 de Diciembre, remarcando que desde su punto de vista la convergencia debía ser uniforme en *cualquier* entorno de la discontinuidad.

Gibbs era el autor de la carta siguiente, fechada el 29 de Noviembre, en donde explicaba las dudas de Michelson, destacando que Love las había ignorado, y describía las os-

[*Nature*, vol. LIX, p. 606, April 27, 1899.]

I should like to correct a careless error which I made (*Nature*, December 29, 1898) in describing the limiting form of the family of curves represented by the equation

$$y = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \ldots \pm \frac{1}{n}\sin nx\right) \qquad (1)$$

as a zigzag line consisting of alternate inclined and vertical portions. The inclined portions were correctly given, but the vertical portions, which are bisected by the axis of X, extend beyond the points where they meet the inclined portions, their total lengths being expressed by four times the definite integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\, du.$$

If we call this combination of inclined and vertical lines C, and the graph of equation (1) C_n, and if any finite distance d be specified, and we take for n any number greater than $100/d^2$, the distance of every point in C_n from C is less than d, and the distance of every point in C from C_n is also less than d. We may therefore call C the limit (or limiting form) of the sequence of curves of which C_n is the general designation.

But this limiting form of the graphs of the functions expressed by the sum (1) is different from the graph of the function expressed by the limit of that sum. In the latter the vertical portions are wanting, except their middle points.

I think this distinction important, for (with exception of what relates to my unfortunate blunder described above) whatever differences of opinion have been expressed on this subject seem due, for the most part, to the fact that some writers have had in mind the *limit of the graphs*, and others the *graph of the limit* of the sum. A misunderstanding on this point is a natural consequence of the usage which allows us to omit the word *limit* in certain connections, as when we speak of the sum of an infinite series. In terms thus abbreviated, either of the things which I have sought to distinguish may be called the graph of the sum of the infinite series.

J. WILLARD GIBBS.

New Haven, April 12 [1899].

Fig. 2.76. La carta de Gibbs en *Nature*, 27 de Abril de 1899.

cilaciones. Sin embargo, su nota parece implicar que la amplitud de estas oscilaciones *decrecían* con N.

Esta nota estaba seguida por una carta de Love, exponiendo la noción de convergencia no uniforme y admitiendo que no había comprendido los problemas indicados por Michelson en su primera carta.

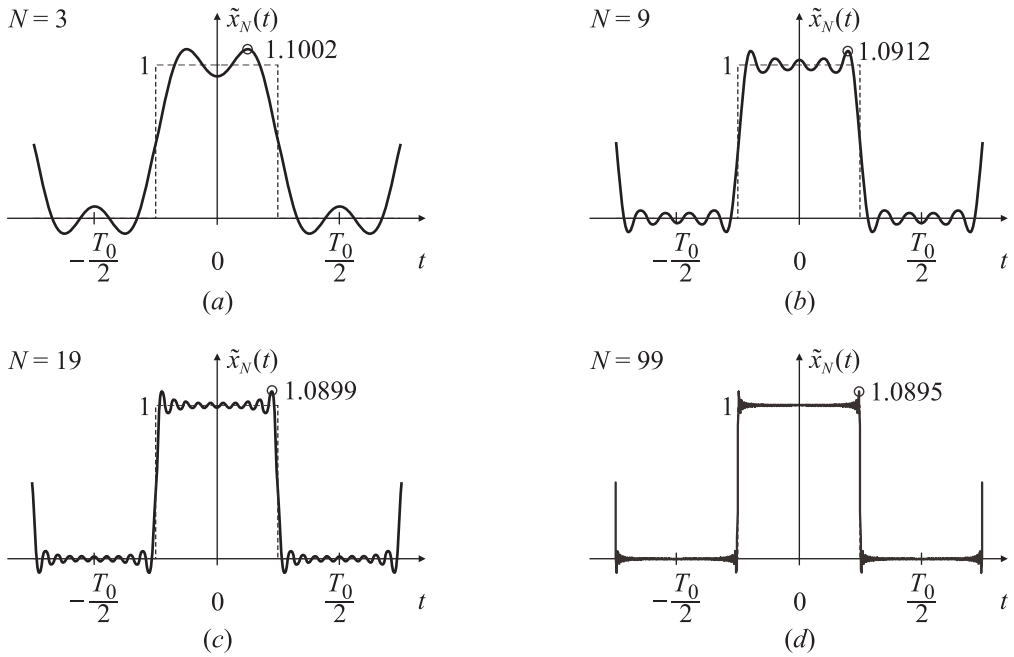


Fig. 2.77. Aproximación de una onda cuadrada por los N primeros términos de la serie de Fourier. (a) $N = 3$; (b) $N = 9$; (c) $N = 19$; (d) $N = 99$ términos.

Recién el 27 de Abril de 1899 Gibbs publica el resultado correcto (Fig. 2.76), pidiendo disculpas, "I should like to correct a careless error", y mostrando que las oscilaciones no decaen, sino que el sobrepico tiende a un número constante.

Las últimas comunicaciones aparecieron nuevamente en *Nature*. En Mayo de 1899 Michelson comunicaba una carta de Poincaré y en Junio de 1899 Love básicamente repetía sus puntos de vista. Nuevamente, no parecía notar que el comportamiento de las sumas finitas era crucial para reconstruir una función a partir de su serie de Fourier.

El nombre "fenómeno de Gibbs" fue utilizado por vez primera por Bôcher en 1906, en un artículo donde extendía el resultado de Gibbs. El matemático húngaro Fejér hizo el primer intento para resolver el fenómeno de Gibbs. En 1900 descubrió que las medias de Cesàro de las sumas parciales convergen uniformemente. Este método equivale a filtrar la señal con un filtro de primer orden. Desde entonces ha ocurrido una explosión de técnicas de filtrado motivada por el análisis de señales. Algunas de estas alternativas serán exploradas más adelante en este curso, al tratar el análisis frecuencial de señales y el diseño de filtros FIR.

El efecto observado por Michelson se detalla en la Fig. 2.77. La señal $\tilde{x}(t)$ es una onda cuadrada simétrica, de amplitud unitaria y período T_0, con ciclo de trabajo del 50 %; la figura muestra la onda cuadrada original (en línea de trazos) superpuesta con la señal $\tilde{x}_N(t)$ formada por la serie de Fourier truncada a N armónicos, para distintos valores de N. Como la onda cuadrada satisface las condiciones de Dirichlet (Sección A.6), el Teorema 1 (página 228) asegura que el límite para $N \to \infty$ de $\tilde{x}_N(t)$ en el punto de discontinuidad es el valor medio del salto, como se observa para los distintos casos representados en la Fig. 2.77. Para cualquier otro valor de t, $t = t_1$, este Teorema garantiza que $\lim_{N\to\infty} \tilde{x}_N(t_1) = \tilde{x}(t_1)$.

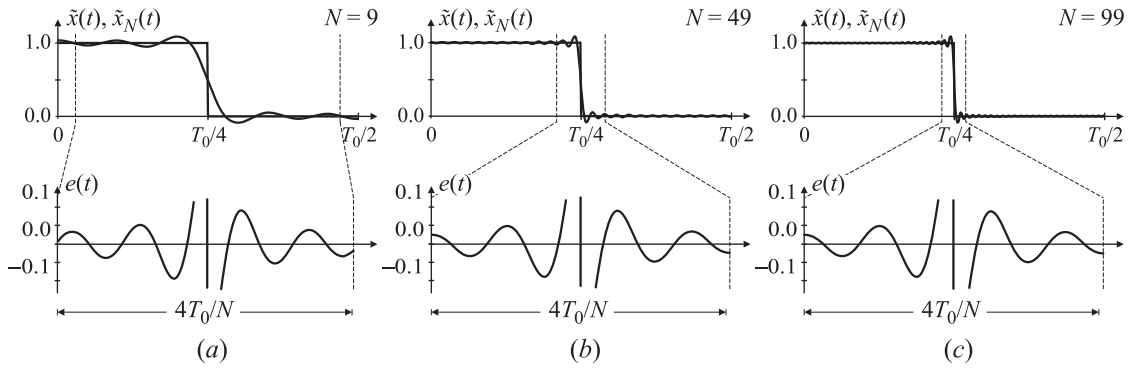


Fig. 2.78. Detalle del error de aproximación entre $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{x}_N(t)$ para distintos valores de N.

Michelson observó que la señal $\tilde{x}_N(t)$ formada por N armónicas de la serie de Fourier exhibe oscilaciones en cercanías de la discontinuidad , y que el valor pico de esas oscilaciones se mantiene constante independientemente del valor de N. Este efecto se muestra en la Fig. 2.78, donde se representa la señal periódica $\tilde{x}(t)$, su aproximación de N términos $\tilde{x}_N(t)$, y la diferencia entre ambas, $e(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)$. Esta última señal se grafica en un entorno de la discontinuidad en $T_0/4$, para t el intervalo $(T_0/4 \pm 2T_0/N)$. Estas figuras permiten apreciar que el comportamiento del error en este intervalo es el mismo (a excepción del cambio de escala) para cualquier N. Además, a medida que crece N la ubicación de sobrepico se acerca al punto donde la función es discontinua.

Gibbs demostró formalmente que para una discontinuidad de altura unitaria, las sumas parciales exhiben un valor máximo de aproximadamente 1.09 (un sobrepico del 9 % de la altura del salto), no importa cuán grande sea N. Se debe interpretar este resultado con cuidado: para cada valor *fijo* de $t = t_1$, las sumas parciales convergen (cuando $N \to \infty$) al valor correcto, y en la discontinuidad convergerán a la mitad de la suma de los valores de la señal a cada lado de la discontinuidad. No obstante, cuanto más cercano a la discontinuidad se elija t_1, tanto mayor deberá ser N para mantener el error $|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)|$ por debajo de una cota determinada: en otras palabras, la convergencia de la serie a la función *no es uniforme*. Este comportamiento peculiar de las sumas parciales, de presentar oscilaciones cuyo valor pico es constante para cualquier valor finito de N, y que se concentran cerca de la discontinuidad cuando N crece, se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

Interpretación del efecto Gibbs aplicando el teorema de convolución temporal

El efecto Gibbs puede interpretarse aplicando el teorema de convolución temporal, como se muestra en la Fig. 2.79: limitar la sumatoria de la serie a $\pm N$ términos es equivalente a anular las componentes de frecuencia que exceden un determinado valor N/T_0, o, en otras palabras, a *filtrar* la señal con un filtro pasabajos ideal $H(f)$ con frecuencia de corte $f_N > N/T_0$. (Esta idea se explora en el Ejercicio 35). Desde el punto de vista frecuencial, se está multiplicando el espectro $X(f)$ de la señal $\tilde{x}(t)$ por la función transferencia $H(f)$ del filtro, como se representa en la Fig. 2.79. Por comodidad, se supone que la frecuencia de corte f_N yace en medio de las líneas espectrales de $X(f)$, eligiendo, por ejemplo, $f_N = (N + 1/2)/T_0$.

La multiplicación de $X(f)$ por $H(f)$ en el dominio frecuencial, es equivalente a la con-

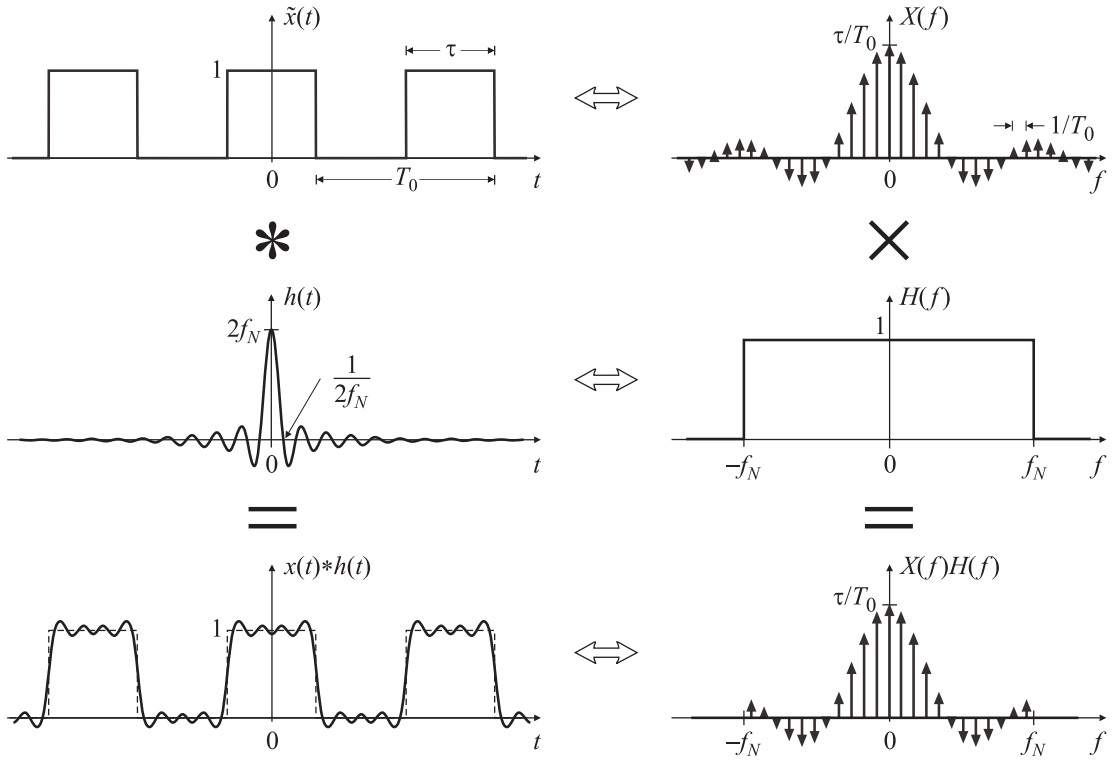


Fig. 2.79. Interpretación del efecto Gibbs según el teorema de convolución temporal.

volución en el dominio tiempo de $\tilde{x}(t)$ y $h(t)$, la transformada inversa de $H(f)$. Si $\tilde{x}(t)$ es una onda cuadrada de período T_0 y ciclo de trabajo τ/T_0, su espectro es

$$X(f) = \sum_k \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0}k\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right),$$

como se analizó en el Ejemplo 2.16. De manera similar, si $H(f)$ es la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos ideal, con frecuencia de corte en $f = f_N$,

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_N, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

se ha calculado en el Ejemplo 2.11 que la antitransformada de $H(f)$ es

$$h(t) = 2f_N \operatorname{sinc}(2f_N t).$$

De acuerdo al teorema de convolución temporal, la suma finita de N términos de la serie [multiplicación de $X(f)$ por $H(f)$] es equivalente a la convolución de $\tilde{x}(t)$ y $h(t)$; esto es:

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t} = \tilde{x}(t) * h(t).$$

Esta interpretación se ilustra en la Fig. 2.80 para distintos valores de t. En aquellos lugares donde $\tilde{x}(t)$ [Fig. 2.80(a)] varía lentamente, esta función y su aproximación de N términos,

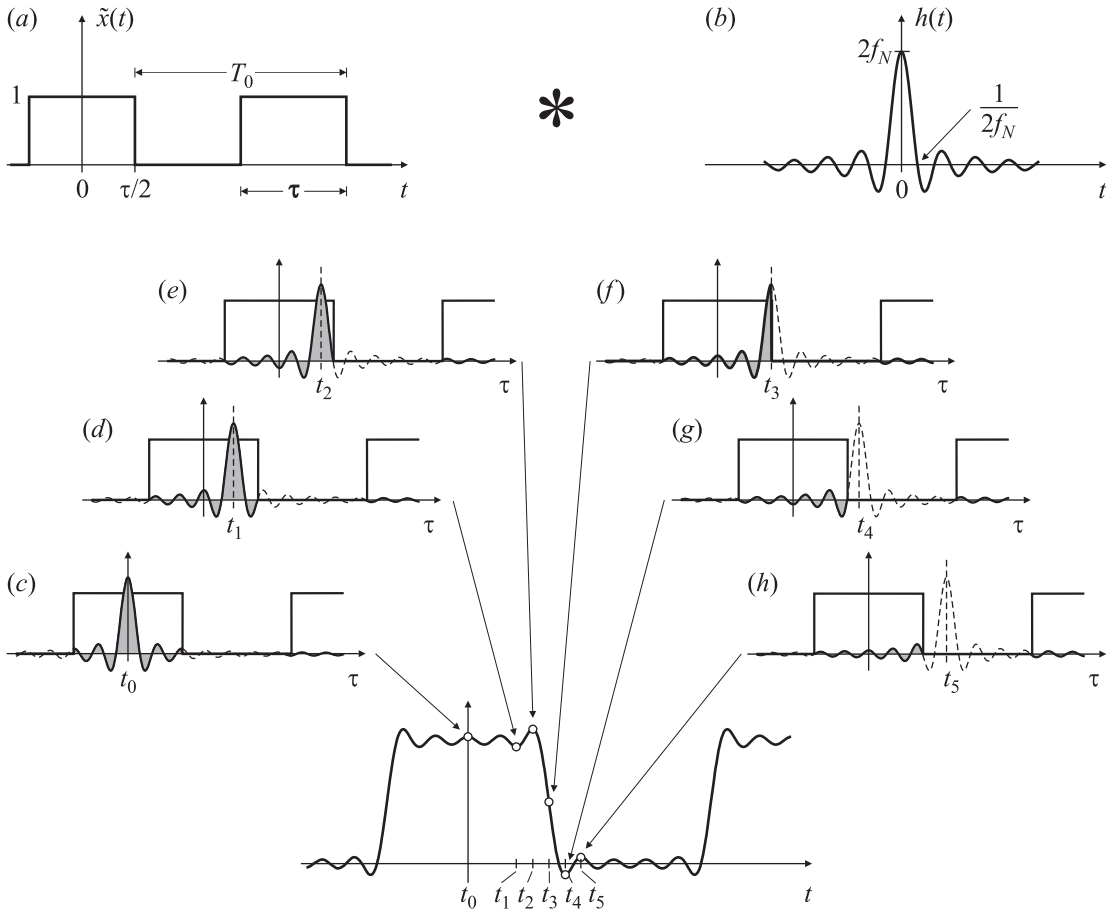


Fig. 2.80. Cálculo de la señal $\tilde{x}_N(t)$ por convolución entre $\tilde{x}(t)$ y $h(t)$.

$\tilde{x}_N(t)$, son muy similares, porque $h(t)$ [Fig. 2.80(b)] tiene área unitaria [12] como se observa en la Fig. 2.80(c) para $t = t_0$. En cambio, cuando $\tilde{x}(t)$ varía abruptamente, una parte importante de la respuesta de $h(t)$ no contribuye área a la integral de convolución. El caso extremo ocurre cuando se calcula $\tilde{x}_N(t)$ en $t = t_3 = \tau/2$, como muestra la Fig. 2.80(f), en el cual casi la mitad del área bajo $h(t)$ queda fuera del cálculo de la convolución; por este motivo el valor de la aproximación en este punto es aproximadamente la mitad del salto. Para valores de t próximos a la discontinuidad los lóbulos laterales de $h(t)$ restan o suman área, como en las Fig. 2.80(d) y (e) para $t = t_1$ y $t = t_2$, o en las Fig. 2.80(g) y (h), para $t = t_4$ y $t = t_5$, respectivamente. Aumentar el número de términos N que componen la función aproximada $\tilde{x}_N(t)$ es equivalente a multiplicar el espectro de $\tilde{x}(t)$ por un filtro pasabajos $H(f)$ de ancho de banda mayor; por lo tanto, su respuesta impulsiva $h(t)$ tendrá oscilaciones de más alta frecuencia, aunque su área sigue siendo unitaria. De aquí que el análisis efectuado más arriba sigue siendo válido; la única diferencia es que las oscilaciones más rápidas de la respuesta $h(t)$ causarán ondulaciones más rápidas de $\tilde{x}_N(t)$.

Para calcular analíticamente el comportamiento en cercanías de los puntos de discontinuidad de $\tilde{x}(t)$, se observa que en proximidades de $t = \tau/2$ se puede aproximar $\tilde{x}(t)$

[12] Se estudia en el Ejercicio 12 que $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = H(0)$.

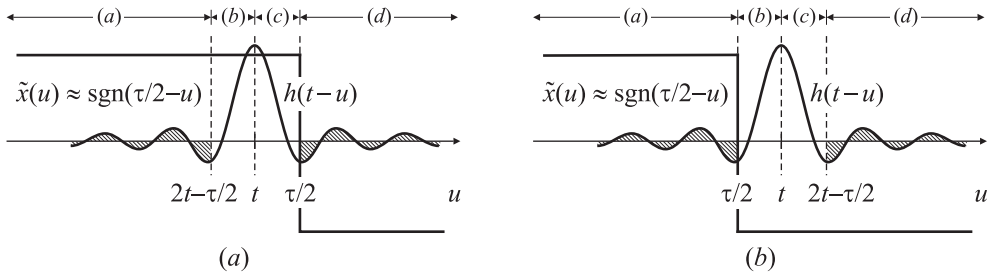


Fig. 2.81. Intervalos de integración de $\text{sgn}(\tau/2-u)\,\text{sinc}[2f_N(t-u)]$ para $t<\tau/2$ (a) y $t>\tau/2$ (b).

por la función $\text{sgn}(t)$: $\tilde{x}(t) \approx (1/2) + (1/2)\,\text{sgn}\,(\tau/2-t)$,de modo que

$$\begin{aligned} x_N(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, h(t-u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{sgn}\,(\tau/2-u)\right]\, 2f_N\,\text{sinc}[2f_N(t-u)]\, du \\ &= f_N \left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[2f_N(t-u)]\, du + \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}\,(\tau/2-u)\,\text{sinc}[2f_N(t-u)]\, du\right]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

La segunda integral se puede separar en cuatro intervalos, como se muestra en la Fig. 2.81,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}\,(\tau/2-u)\,\text{sinc}[2f_N(t-u)]\, du \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{2t-\tau/2}(\,\cdot\,)\, du + \int_{2t-\tau/2}^{t}(\,\cdot\,)\, du + \int_{t}^{\tau/2}(\,\cdot\,)\, du + \int_{\tau/2}^{\infty}(\,\cdot\,)\, du, & \text{si } t < \tau/2, \\ \int_{-\infty}^{\tau/2}(\,\cdot\,)\, du + \int_{\tau/2}^{t}(\,\cdot\,)\, du + \int_{t}^{2t-\tau/2}(\,\cdot\,)\, du + \int_{2t-\tau/2}^{\infty}(\,\cdot\,)\, du, & \text{si } t > \tau/2. \end{cases} \end{aligned}$$

En cada caso, las primeras y últimas integrales [evaluadas sobre los intervalos (a) y (d)] tienen signo contrario y se cancelan. Por simetría, la evaluación de la integral sobre el intervalo (b) es idéntica a la evaluación sobre el intervalo (c). Para $t < \tau/2$ o $t > \tau/2$ los argumentos de las integrales sobre los intervalos (b) y (c) tienen signo contrario, pero también cambian los extremos de integración, de modo que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}\,(\tau/2-u)\,\text{sinc}[2f_N(t-u)]\, du &= 2\int_{t}^{\tau/2} \text{sinc}[2f_N(t-u)]\, du = -\frac{1}{\pi f_N}\int_{0}^{2\pi f_H(t-\frac{\tau}{2})} \frac{\text{sen}\,(v)}{v}\, dv \\ &= -\frac{1}{\pi f_N}\,\text{Si}\,[2\pi f_N\,(t-\tau/2)]\,, \end{aligned} \quad (2.125)$$

donde $\text{Si}(x)$ es la función seno integral, definida como $\text{Si}(x) = \pi \int_0^x \text{sinc}(\sigma)\, d\sigma$, y que se encuentra tabulada. Teniendo en cuenta que $f_N \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2f_N u)\, du = 1/2$ y (2.125), la expresión (2.124) se puede escribir como

$$\tilde{x}_N(t) = \tilde{x}(t) * h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\text{Si}\left[2\pi f_N\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right].$$

Para calcular el valor del sobrepico de $\tilde{x}_N(t)$ se deben determinar los puntos donde se anula su derivada; es decir, en dónde se anula $d\,\text{Si}(x)/dx$. Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(u)\, du\right) = f(x)$, resulta

$$\frac{d\tilde{x}_N(t)}{dt} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{d}{dt}\,\text{Si}\,[2\pi f_N(t-\tau/2)] = \frac{\text{sen}\,[2\pi f_N(t-\tau/2)]}{2\pi f_N(t-\tau/2)} = 0.$$

En definitiva, los extremos relativos ocurren para aquellos valores de t que anulan el seno

$$2\pi f_N \left(t - \frac{\tau}{2}\right) = k\,\pi, \qquad k = \pm 1,\, \pm 2,\, ...$$

y por lo tanto, los extremos de $\tilde{x}_N(t)$ se encuentran en $t_k = k/(2f_N) + \tau/2$, donde $\tilde{x}_N(t_k) = (1/2) + \mathrm{Si}(k\pi)$. Es sencillo verificar que el máximo se encuentra para $k = -1$, y el mínimo en $k = 1$:

$$\tilde{x}_N(t)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}(-\pi) = +1{,}08949, \quad \text{en } t = \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2f_N}, \tag{2.126}$$

$$\tilde{x}_N(t)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}(+\pi) = -0{,}08949, \quad \text{en } t = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2f_N}. \tag{2.127}$$

Estas expresiones muestran que tanto el máximo como el mínimo de la señal reconstruida $\tilde{x}_N(t)$ representan una variación del 9 % del valor máximo de $\tilde{x}(t)$, y que estos valores no dependen de la frecuencia de corte f_N del filtro pasabajo $H(f)$, es decir, son independientes de la cantidad de armónicos que utilicen para la reconstrucción. Por otra parte, la ubicación de esos extremos *si* dependen de f_N, y son más próximos a la discontinuidad en $t = \tau/2$ cuanto mayor sea N, como se observa en la Fig.2.77. Además, estos extremos relativos ocurren exactamente cuando el lóbulo principal de $h(t)$, de ancho $1/f_N$, queda incluido o excluido del cálculo de la convolución, como se aprecia en las Fig. 2.80(e) y (g), respectivamente, que coincide con los valores de t calculados en (2.126) y (2.127).

Este cálculo sólo es válido para un entorno de $t = \tau/2$, donde es razonable aproximar $\tilde{x}(t)$ por la función signo. Las propiedades de convergencia de las series de Fourier establecen que $\tilde{x}_N(t) \to \tilde{x}(t)$ en todo punto, salvo en los puntos de discontinuidad, donde converge al valor medio del salto, cuando el número de armónicos $N \to \infty$[13].

2.7.1. Variaciones sobre el filtro

En la sección previa se ha estudiado el efecto Gibbs como el efecto de filtrar una onda cuadrada $\tilde{x}(t)$ con un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte $f_c = f_N = (N + 1/2)f_0 = (N + 1/2)/T_0$, donde T_0 es el período de la señal, tal como se representa en la Fig2.79. En esta sección se plantean variantes al filtro ideal para ver la influencia en la respuesta temporal (la salida del filtro).

El principal inconveniente del filtro ideal es que no es implementable. Uno de los motivos es porque no es causal, y además, como la respuesta impulsiva se extiende para $t \to -\infty$ tampoco se puede "causalizar" retardando la respuesta. Por este motivo, en primer lugar es necesario *trucar* la respuesta impulsiva. Este proceso se detalla en la Fig. 2.82.

La idea es truncar la respuesta impulsiva $h(t)$ para hacerla nula fuera del intervalo $[-T, T]$, donde T fija la duración temporal de la respuesta impulsiva, y sería deseable que $T < T_0$. Una manera de formalizar esta idea es definiendo una *ventana* temporal $w(t)$ como

$$w(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

[13] Thompson (1992) analiza en detalle el comportamiento de las series de Fourier truncadas a un número finito de términos N.

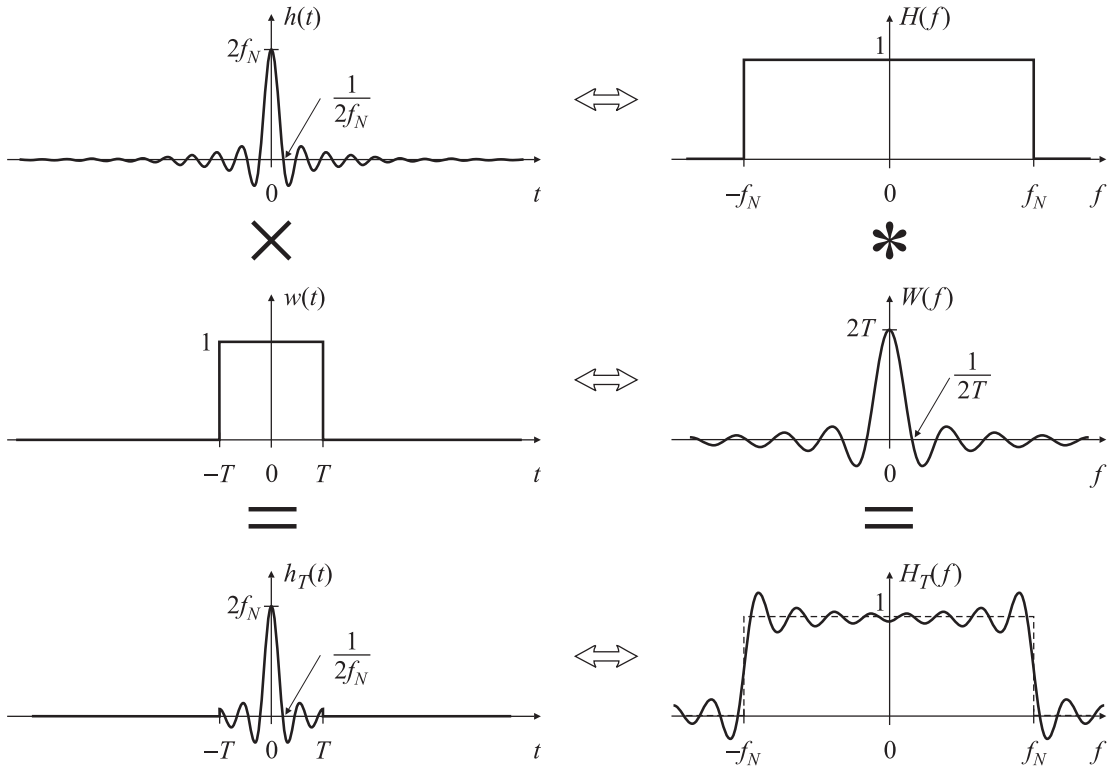


Fig. 2.82. Cálculo de la respuesta del filtro ideal con respuesta impulsiva truncada usando el teorema de convolución frecuencial.

y por lo tanto, la respuesta impulsiva del filtro ideal truncado se puede escribir como

$$h_T(t) = h(t)w(t) = \begin{cases} 2f_N \operatorname{sinc}(2f_N t), & |t| \leq T, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La truncación de la respuesta impulsiva modifica la respuesta en frecuencia del filtro, que se puede calcular aplicando el teorema de *convolución frecuencial*. Ya que $h_T(t) = h(t)w(t)$, el teorema asegura que la respuesta en frecuencia del filtro ideal truncado $H_T(f)$ se puede calcular como $H_T(f) = H(f) * W(f)$, donde $W(f)$ es la respuesta en frecuencia de la ventana temporal $w(t)$. La respuesta en frecuencia $W(f)$ fue calculada en el Ejemplo 2.10, y está dada por

$$W(f) = 2T \operatorname{sinc}(2Tf).$$

Se tiene entonces que

$$H_T(f) = H(f) * W(f) = \int_{-f_N}^{f_N} H(\sigma)W(f-\sigma)d\sigma = \int_{f-f_N}^{f+f_N} H(f-\sigma)W(\sigma)d\sigma,$$

y luego de algunos cálculos se encuentra que

$$H_T(f) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}[2\pi T(f+f_N)] - \frac{1}{\pi}[2\pi T(f-f_N)],$$

donde $\operatorname{Si}(\,\cdot\,)$ es la función seno integral definida en la sección anterior.

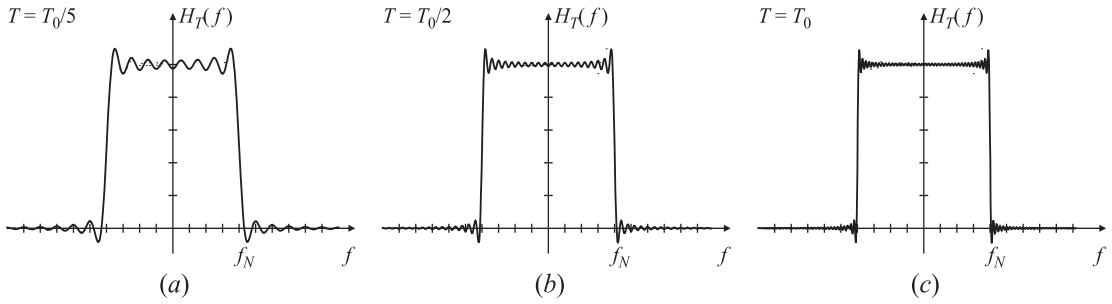


Fig. 2.83. Respuesta en frecuencia del filtro ideal con respuesta impulsiva truncada a $\pm T_0/5$ (a), $\pm T_0/2$ (b) y $\pm T_0$ (c).

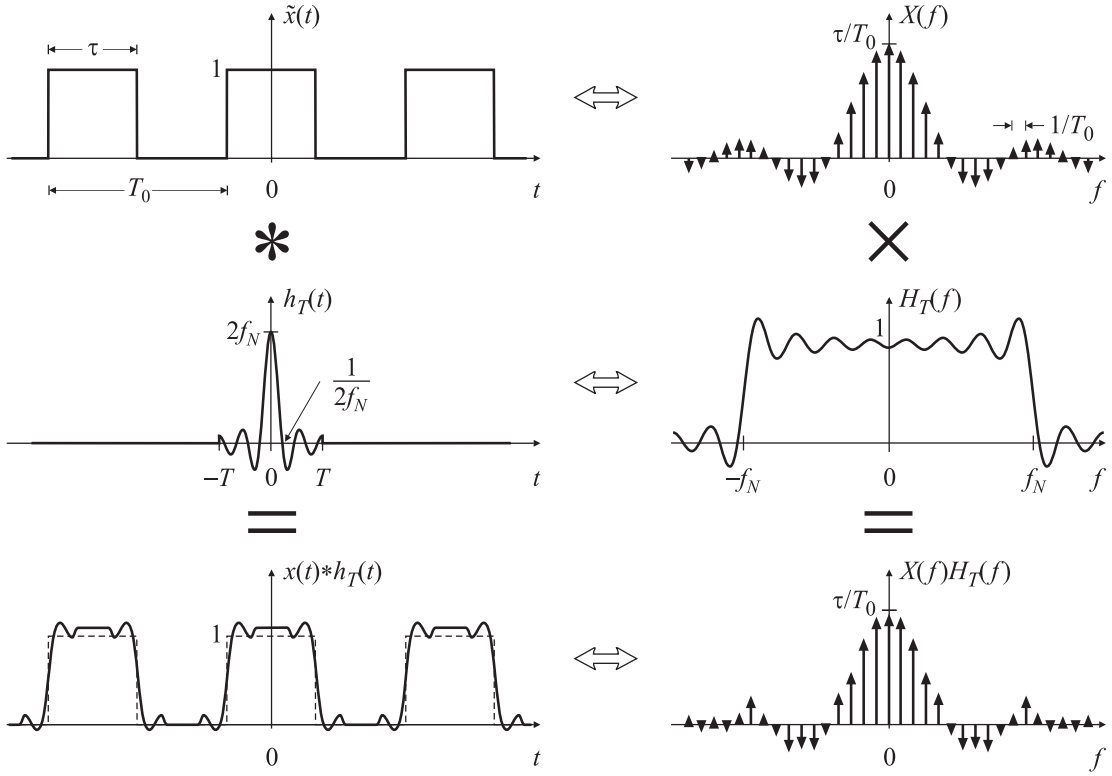


Fig. 2.84. Cálculo de la salida del filtro ideal con respuesta impulsiva truncada aplicando el teorema de convolución temporal.

Como sugiere la Fig. 2.83, cuando mayor sea la longitud de la respuesta impulsiva tanto más rápidas serán las oscilaciones de la respuesta en frecuencia del filtro. Sin embargo, esto no altera la amplitud de los sobrepicos de la respuesta en frecuencia $H_T(f)$, que dependen del *área* de $W(f)$, que es unitaria (es el valor de $w(t)$ en $t = 0$), y no varía con T. En realidad, este efecto es una versión dual del efecto Gibbs: una limitación en tiempo de la respuesta impulsiva provoca oscilaciones en la respuesta en frecuencia cuya amplitud es independiente del intervalo de truncación.

La expresión de la salida se puede calcular como en el caso del filtro ideal. Aproximando

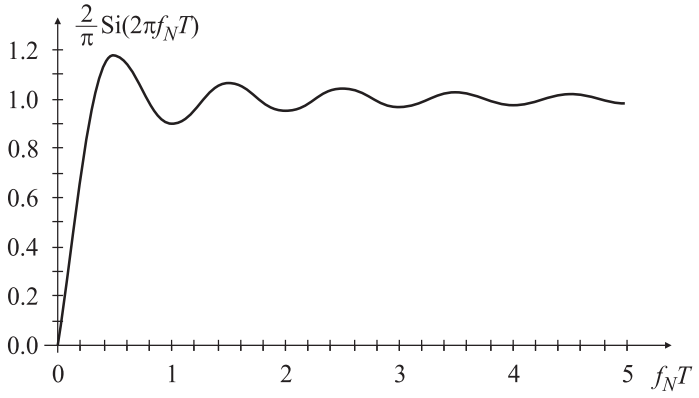


Fig. 2.85. Amplitud de la señal de salida del filtro ideal con frecuencia de corte f_N y respuesta impulsiva truncada a $\pm T$ en función del producto $f_N T$.

nuevamente la señal de entrada como $\tilde{x}(t) = (1/2) + (1/2)\,\mathrm{sgn}(\tau/2 - t)$, la salida es

$$x_T(t) = x(t) * h_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du.$$

En este caso, el cálculo de la convolución puede hacerse en tres pasos:

- Si $t < \tau/2 - T$, la respuesta impulsiva queda superpuesta totalmente con $\tilde{x}(t) = 1$, de modo que

$$x_T(t) = x(t) * h_T(t) = \int_{t-T}^{t+T} h(t-u)du = \int_{t-T}^{t+T} 2f_N\ \mathrm{sinc}[2f_N(t-u)]du = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(2\pi f_N T).$$

- Si $t > \tau/2 + T$, $\tilde{x}(t) = 0$, de modo que $x_T(t) = 0$.
- Finalmente, si $\tau/2 - T < t < \tau/2 + T$,

$$x_T(t) = \int_{t-T}^{t+T} h(t-u)du = \int_{t-T}^{\tau/2} 2f_N\ \mathrm{sinc}[2f_N(t-u)]du = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}(2\pi f_N T) - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}[2\pi f_N(t-\tau/2)].$$

Por lo tanto,

$$x_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(2\pi f_N T), & \text{si } t < \tau/2, \\ \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}(2\pi f_N T) - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}[2\pi f_N(t-\tau/2)], & \text{si } \tau/2 - T < t < \tau/2 + T, \\ 0, & \text{si } t > \tau/2 + T. \end{cases}$$

El cálculo de la respuesta aplicando el teorema de la convolución temporal se representa en la Fig. 2.84.

El efecto de truncar la respuesta impulsiva del filtro ideal altera la amplitud de la onda de salida, y este valor depende del producto $f_N T$, es decir, el ancho de banda del filtro ideal y la duración de la respuesta impulsiva truncada. En la Fig. 2.85 se grafica el valor de $(2/\pi)\,\mathrm{Si}(2\pi f_N T)$ en función del producto $f_N T$. Evidentemente, cuanto mayor sea $f_N T$, la amplitud de la señal de salida tiende a la unidad, pues:

- incrementando f_N crece el ancho de banda del filtro ideal, y por lo tanto se reduce la duración de la respuesta impulsiva,

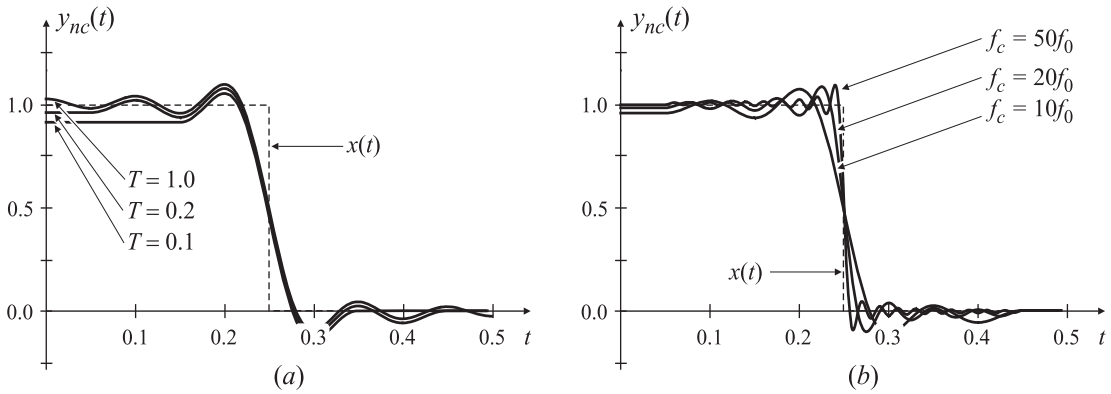


Fig. 2.86. Respuestas temporales de la salida del filtro ideal con respuesta truncada. $T = T_0$, $f_N = 10f_0$, $20f_0$ y $50f_0$ (a) y $f_N = 10f_0$, $T = T_0$, $T = T_0/5$, $T = T_0/10$ (b).

- aumentando T se aumenta la duración de la respuesta impulsiva

de manera que al efectuar la truncación sólo se pierden las "colas" de menor amplitud del sinc($\cdot$), y por lo tanto la variación en la amplitud es pequeña.

Una determinada amplitud de salida (por ejemplo, unitaria) puede obtenerse con infinitos valores del producto $f_N T$. La forma de onda de la respuesta temporal, para distintos anchos de banda y distintas longitudes de la respuesta impulsiva se representa en las Figs. 2.86(a) y (b), respectivamente.

2.8. Principio de incertidumbre

When the Lord created the world and people to live in it –an enterprise which, according to the modern science, took a very long time– I could imagine that He reasoned with Himself as follows: "If I make everything predictable, these humans beings, whom I have endowed with pretty good brains, will undoubtedly learn to predict everithing, and they will thereupon have no motive to do anything at all, because they will recognize that the future is totally determined and cannot be influenced by any human action.

On the other hand, if I make everything unpredictable, they will gradually discover that there is no rational basis for any decision whatsoever and, as in the first case, they will thereupon have no motive to do anything at all. Neither scheme would make sense. I must therefore create a mixture of the two. Let some things be predictable and let other be unpredictable. They will then, amongst many other things, have the very important task of finding out which is which."

E. F. Schumacher, *Small is beautiful*, 1973.

El principio de incertidumbre se puede enfocar desde tres perspectivas distintas: una característica distintiva de la mecánica cuántica, un principio que establece las limitaciones de efectuar mediciones en un sistema sin perturbarlo, y finalmente un teorema del análisis armónico que puede sintetizarse como

> una función no nula y su transformada de Fourier no pueden estar perfectamente localizadas.

Cuando se lo traduce al campo de la mecánica cuántica, este principio establece que un par de variables canónicas conjugadas, tales como la posición y el momento, no pueden determinarse precisamente en ningún estado cuántico. Esta es la idea del trabajo de Heisemberg (1927), profusamente difundido desde entonces.

Sin embargo, el principio de incertidumbre tiene una interpretación útil en física clásica. Si $x(t)$ representa la amplitud de una señal (una onda de sonido, un haz de luz, etc.) en el tiempo t, el principio de incertidumbre expresa una limitación sobre la duración que tal señal puede tener en tiempo, y del ancho de banda que ocupe su transformada de Fourier. Este aspecto del principio de incertidumbre fue inicialmente expuesto por Norbert Wiener en una conferencia dictada en Gotinga en 1925. Desafortunadamente no parece haber sobrevivido ninguna transcripción de esta conferencia, más allá de una reseña no técnica en la autobiografía de Wiener (1956). Cualquiera que haya sido la influencia sobre los físicos presentes, lo cierto es que el principio de incertidumbre no caló en las mentes de las personalidades vinculadas al procesamiento de señales hasta el trabajo fundamental de Gabor en 1946. Desde entonces es un tema común en esta especialidad.

Desde el punto de vista matemático sólo hubo desarrollos esporádicos en los cincuenta años que siguieron al trabajo inicial de la segunda década del siglo XX, para cobrar nuevo impulso en las décadas del 70 al 80, con ecos que llegan hasta el presente. El principio de incertidumbre ha influido directamente en algunas áreas del análisis, notablemente en (*i*) el estudio de las propiedades de una función impuestas por restricciones en el soporte o las propiedades de decaimiento de su transformada de Fourier, (*ii*) la construcción de bases ortonormales o marcos (bases "redundantes") en L^2 (espacio de las funciones de cuadrado integrable) cuyos elementos y sus transformadas de Fourier están bien localizadas (*onditas* o wavelets), (*iii*) el vasto cuerpo de resultados analíticos vinculados al análisis de señal y la teoría de comunicaciones. Para hacer justicia a las ramificaciones del principio de incertidumbre en cualquiera de estos tópicos sería necesario un libro para cada uno de ellos. Afortunadamente estos libros han sido escritos: Havin y Jöriche (1994), Daubechies (1992), lo mismo que un buen número de artículos tutoriales, como los de Benedetto (1990), Benedetto, Heil y Walnut (1992) y las colecciones de Price (1985) y de Benedetto y Frazier (1994).

El punto de vista abordado en este curso es mucho menos ambicioso, y enfoca el problema solamente desde el punto de vista de señales reales y continuas.

2.8.1. Teorema del ancho de banda

Las propiedades de la transformada de Fourier y los varios ejemplos utilizados para ilustrarlas muestran claramente que la descripción de la señal en los dominios frecuenciales y temporales están *inversamente* relacionadas. En particular, se observa que:

1. Si se cambia la descripción temporal de una señal, su representación en el dominio frecuencial cambia de manera inversa, y viceversa. Esta relación inversa impide que se pueda especificar arbitrariamente una señal en *ambos* dominios: puede definirse una función que dependa arbitrariamente del tiempo o de la frecuencia, pero no puede especificarse *simultáneamente* en ambos dominios. Esta es una limitación importante, por ejemplo, en el diseño de filtros: no puede diseñarse un filtro muy selectivo en frecuencia (con un ancho de banda muy angosto) que al mismo tiempo tenga un tiempo de establecimiento reducido (una respuesta impulsiva de corta

duración).

2. Si una señal está estrictamente limitada en frecuencia, su duración temporal será ilimitada, aún cuando su amplitud pueda tomar valores cada vez más pequeños. Se dice que una función es *estrictamente limitada en frecuencia* si su transformada de Fourier es nula fuera de una banda finita de frecuencias. El pulso $\mathrm{sinc}(t)$ (Ejemplo 2.11) es una función que está estrictamente limitada en frecuencia (Fig. 2.20). Esta figura también muestra que el pulso $\mathrm{sinc}(t)$ está *asintóticamente* limitado en tiempo. Recíprocamente, si una señal es *estrictamente limitada en tiempo* (es decir, que la señal es exactamente cero fuera de un intervalo temporal de longitud finita), entonces su espectro se extiende sobre todo el rango de frecuencias, aún cuando su magnitud tenga valores cada vez más pequeños a medida que aumenta la frecuencia. Esto se pone de manifiesto en los casos del pulso rectangular (Ejemplo 2.10) y del pulso triangular (Ejemplo 2.42).

En síntesis, estas observaciones indican que una señal no puede estar limitada simultáneamente en tiempo y frecuencia. El teorema del ancho de banda, o principio de incertidumbre de Fourier, formaliza esta idea.

2.8.2. Duración efectiva y ancho de banda

Si $x(t)$ es una función cuyo valor puede ser considerado "despreciable" fuera de algún intervalo (t_1, t_2), entonces la longitud de dicho intervalo, $\Delta t = t_2 - t_1$ es la *duración efectiva* de $x(t)$. Análogamente, si $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, y $X(f)$ puede ser considerada despreciable fuera de cierto intervalo (f_1, f_2), entonces $\Delta f = f_2 - f_1$ es el *ancho de banda* de $x(t)$. Salvo para ciertas casos, como las señales temporales $\mathrm{sinc}(\cdot)$ o rectangulares cuya duración frecuencial o temporal, respectivamente, está bien definida, la duración efectiva o el ancho de banda son conceptos relativamente imprecisos. En consecuencia, no hay definiciones universales, aunque sí algunas comúnmente aceptadas. En lo que sigue, nos referiremos a las definiciones del ancho de banda, pero las mismas consideraciones son aplicables, *mutatis mutandi*, para la duración efectiva de la señal.

Las dos definiciones usuales tienen en cuenta el contenido espectral de la señal. Si el contenido espectral está concentrado cerca del origen, como el espectro de la izquierda de la Fig. 2.87, se dice que la señal es *tipo pasabajos*. En cambio, la señal es tipo *pasabanda* si el contenido espectral está centrado alrededor de $\pm f_c$, donde f_c es una frecuencia no nula, como los espectros del centro y de la derecha de la Fig. 2.87.

Si el espectro de la señal es simétrico, con un lóbulo principal acotado por valles bien pronunciados, se suele definir el ancho de banda de acuerdo al ancho del lóbulo principal. Específicamente, si la señal es pasabajos, el ancho de banda se define como la mitad del ancho total del lóbulo principal, ya que sólo la mitad de este lóbulo yace en el rango de las frecuencias positivas; este es el caso del espectro centrado en el origen de la Fig. 2.87. Por ejemplo, un pulso rectangular de duración T tiene un espectro cuyo lóbulo principal tiene un ancho de $2/T$ Hz en torno al origen (Fig. 2.18). En consecuencia, y de acuerdo a esta convención, se dice que el pulso rectangular tiene un ancho de banda de $1/\tau$ Hz (Ejemplo 2.10).

Por otra parte, si la señal es tipo pasabanda, con un espectro cuyos lóbulos principales están centrados en $\pm f_c$, donde f_c es grande, se define el ancho de banda como el ancho

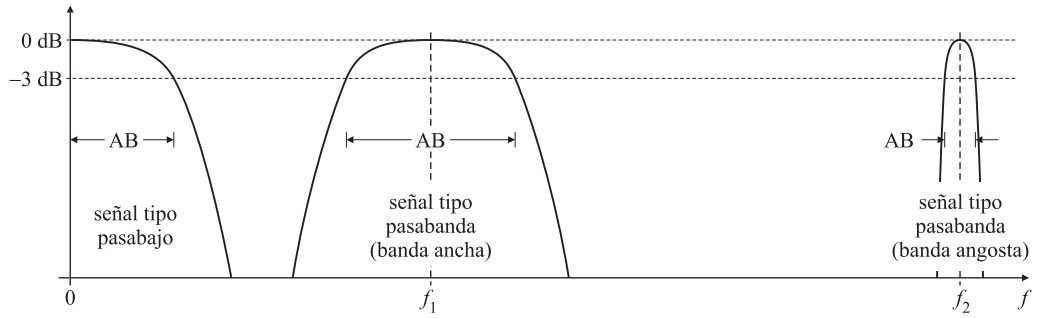


Fig. 2.87. Espectros de señales pasabajo, pasabanda de banda ancha y pasabanda de banda angosta.

del lóbulo principal que yace en las frecuencias positivas. Esta definición del ancho de banda se denomina *ancho de banda entre ceros*.

Otra definición popular es el *ancho de banda de* 3 dB. Si la señal es tipo pasabajos, el ancho de banda de 3 dB se define como la separación entre la frecuencia cero, donde el espectro de amplitud alcanza su valor máximo, y la frecuencia positiva en la cual el valor del espectro cae a $1/\sqrt{2}$ de su valor pico. Por ejemplo, el pulso exponencial decreciente (Ejemplo 2.5) o creciente (Ejemplo 2.29) tienen un ancho de banda de $1/(2\pi)$ Hz. Si, en cambio, la señal es tipo pasabanda, centrada en $\pm f_c$, el ancho de banda de 3 dB es la separación, sobre el eje de frecuencias positivo, entre las dos frecuencias a las cuales la amplitud del espectro cae a $1/\sqrt{2}$ del valor pico que alcanza en f_c. El ancho de banda de 3 dB tiene la ventaja que puede ser leído directamente a partir de un gráfico del espectro de amplitud aunque puede ser difícil de determinar si el espectro de amplitud decae muy lentamente.

Otras definiciones usuales del ancho de banda se basan en el rango de frecuencias donde se concentra la potencia o energía de la señal. Por ejemplo, si el 95 % del espectro de densidad de potencia abarca el intervalo de frecuencias $f_1 < f < f_2$, se dice que su ancho de banda de 95 % es $f_2 - f_1$. De manera similar, se definen los anchos de banda de 75 %, 90 %, o 99 % de la señal.

En el caso de una señal pasabanda, la expresión *banda angosta* indica que el ancho de banda de la señal $f_2 - f_1$ es mucho menor (por un factor de 10 o más) que la frecuencia media $(f_1 + f_2)/2$, como ocurre con el espectro de la derecha de la Fig. 2.87. En caso contrario la señal se denomina de *banda ancha* como el espectro del centro de la Fig. 2.87. Por ejemplo, las señales de radio de modulación de amplitud (MA) son señales de banda angosta, ya que el ancho de banda es de 5 kHz, y la portadora (la "frecuencia mitad") va desde 560 kHz hasta 1200 kHz, aproximadamente. La relación entre la portadora y el ancho de banda es de 100 a 240 veces. Aún la señal de TV puede describirse como de "banda angosta", pues aunque tiene un ancho de banda de 6 MHz, las portadoras van desde 54 MHz hasta 88 MHz para los canales 2 al 6, y desde 174 MHz hasta 216 MHz para los canales del 7 al 13.

2.8.3. Funciones de duración finita

Se dice que una función $x(t)$ tiene duración finita (o, impropiamente, que es de longitud finita) si $x(t) = 0$ para todo $t \notin [t_0, t_1]$. La duración de la señal es $\Delta t = t_1 - t_0$. La transformada de Fourier de esta señal es

$$X(f) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt. \tag{2.128}$$

Cualquier señal continua a tramos de longitud finita es absolutamente integrable, y tiene energía finita, de modo que la transformada de Fourier de señales de duración finita está bien definida. Además, para cualquier entero n no negativo, $t^n x(t)$ también es continua a tramos, absolutamente integrable y de energía finita. Teniendo en cuenta la propiedad de diferenciación en frecuencia de la transformada de Fourier [ecuación (2.90)], es inmediato que

$$(-j2\pi t)^n x(t) \quad \Leftrightarrow \quad X^{(n)}(f) = \int_{t_0}^{t_1} (-j2\pi t)^n x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$$

que revela que las derivadas en frecuencia de cualquier orden n de la transformada de Fourier de $X(f)$ existen y estás bien definidas, y que no pueden ser todas idénticamente nulas. Si se expresa la transformada $X(f)$ en una serie de Taylor alrededor de una frecuencia f_0 arbitraria,

$$X(f) = X(f_0) + X'(f_0)(f - f_0) + \frac{1}{2!}X^{(2)}(f_0)(f - f_0)^2 + \frac{1}{3!}X^{(3)}(f_0)(f - f_0)^3 + \cdots$$

se observa que la transformada no puede ser idénticamente nula en ningún intervalo de frecuencias[14]. En consecuencia, una señal de duración finita no puede ser simultáneamente de banda limitada.

Otra manera de explicar este hecho es observando que si $x(t)$ y $X(f)$ fuesen *ambas* de longitud finita, $x(t)$ se puede escribir como $x(t) = x(t)[u(t + a) - u(t - a)]$ para algún $a > 0$. Por lo tanto, la transformada de Fourier $X(f)$ de $x(t)$ es la convolución entre la transformada de $x(t)$ y la transformada de $b(t) = u(t + a) - u(t - a)$, un pulso rectangular centrado en cero, y distinto de cero para $t \in [-a, a]$. Pero como la transformada de $b(t)$ es una función tipo $\mathrm{sinc}(\cdot)$, y $X(f)$ no es nula, la convolución de las dos no es idénticamente nula para ningún intervalo de frecuencias, lo que contradice la hipótesis de partida.

2.8.4. Funciones de ancho de banda finito

Una función $x(t)$ con transformada de Fourier $X(f)$ es de ancho de banda finito si $X(f) = 0$ para todo $f \notin [f_0, f_1]$. En general, el ancho de banda de la señal es $\Delta f = f_1 - f_0$, aunque deben tenerse en cuenta las consideraciones de la Sección 2.8.2. Por la relación dual entre la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier, es evidente

[14] Más correctamente, la definición de $H(f)$ en (2.128) muestra que está bien definida para todo $f = \sigma + j\omega$. No es difícil demostrar que $H(\sigma + j\omega)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann del análisis complejo. Por lo tanto, $H(f)$ es analítica tanto en la línea real como en el plano complejo, y en consecuencia, no puede anularse o tomar valores constantes sobre cualquier intervalo no trivial de la línea real.

que $x(t)$ satisface propiedades similares a las de las transformadas de señales de duración finita. En particular,

$$x(t) = \int_{f_0}^{f_1} X(f)\, e^{j2\pi f t} df,$$

y, para cualquier entero n no negativo, las derivadas temporales de orden n de $x(t)$ están dadas por

$$x^{(n)}(t) = \int_{f_0}^{f_1} (j2\pi f)^n X(f)\, e^{j2\pi f t} df.$$

De acuerdo a consideraciones similares a las de la Sección 2.8.3, si $x(t)$ es de banda limitada, entonces $x(t)$ no pude anularse o tomar valores constantes sobre ningún intervalo no trivial de la línea real. En otras palabras, ninguna señal de ancho de banda limitado puede tener duración finita.

Vale tener presente estas consideraciones en muchas aplicaciones prácticas donde es deseable (pero, como se ha demostrado, imposible) contar con señales que simultáneamente sean de duración finita y de ancho de banda limitado.

2.8.5. Producto duración efectiva-ancho de banda

El teorema del ancho de banda postula que existe una constante universal positiva γ tal que la duración efectiva Δt y el ancho de banda Δf de cualquier función (con Δt y Δf finitos) satisfacen

$$\Delta t\, \Delta f \geq \gamma.$$

Entonces no es posible encontrar una función cuyo ancho de banda y su duración efectiva sean ambos arbitrariamente pequeños (o grandes). Debido a su similitud con el principio de incertidumbre de Heisemberg de la mecánica cuántica, el teorema del ancho de banda también se conoce como el principio de incertidumbre del análisis de Fourier.

La constancia de este producto es otra manifestación de la relación inversa que existe entre las descripciones en los dominios temporal y frecuencial de una señal. Cualquiera sea la definición que se adopte para el ancho de banda, el producto duración efectiva-ancho de banda permanece constante para cierto tipo de señales. La elección de una definición particular de ancho de banda sólo cambia el valor de la constante γ. Para las funciones tipo pulso el producto del tiempo de duración de la señal por su ancho de banda es contante, ya que si la duración de una señal se reduce escalando el eje de tiempos por un factor a, la escala de frecuencia de la señal, y por lo tanto su ancho de banda, se incrementa por el mismo factor a (en virtud de la propiedad de escalado en tiempo, Sección 2.5.2).

Hay varias versiones de este teorema, cada una de ellas aplicable a una clase particular de funciones. En cada uno de estos casos corresponde definir apropiadamente qué se entiende por "ancho de banda" y "duración efectiva", como se mencionó más arriba. Para ejemplificar veremos el caso de las funciones $x(t)$ que son absolutamente integrables, y también las de energía finita (de cuadrado integrable).

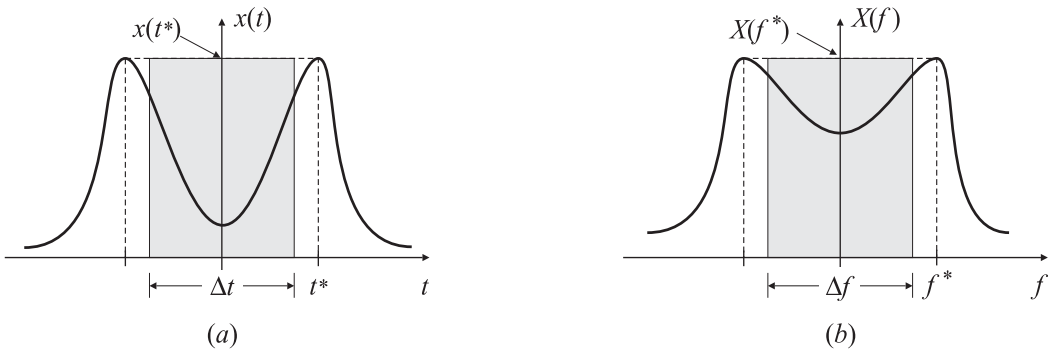


Fig. 2.88. Representación gráfica de la duración efectiva (a) y el ancho de banda efectivo (b).

Señales absolutamente integrables

Supongamos que tanto $x(t)$ como su transformada de Fourier $X(f)$ son absolutamente integrables. Sean t^* y f^* dos valores fijos de t y f tales que $x(t^*) \neq 0$ y $X(f^*) \neq 0$. La duración efectiva Δt y el ancho de banda efectivo Δf son los valores que satisfacen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt = |x(t^*)|\ \Delta t \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|\, df = |X(f^*)|\ \Delta f. \tag{2.129}$$

como se representa en la Fig. 2.88. El teorema del ancho de banda para funciones absolutamente integrables establece que

$$\Delta t\, \Delta f \geq 1,$$

y si $x(t)$ y $X(f)$ son funciones reales no negativas, y además $x(0)$ y $X(0)$ son no nulas,

$$\Delta t\, \Delta f = 1.$$

Las ecuaciones (2.129) sólo establecen una relación entre la duración de la señal en un dominio, y un valor particular de su transformada en el otro. La elección particular de los valores de t^* y f^* depende de la aplicación a que se destine el teorema Una elección típica son los centroides de $|x(t)|$ y $|X(f)|$,

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\, |x(t)|\, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt} \qquad \text{y} \qquad f^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f\, |X(f)|\, df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|\, df}.$$

Otra elección posible es seleccionar t^* y f^* de modo de maximizar los valores de $|x(t^*)|$ y $|X(f^*)|$, como muestra la Fig. 2.88, lo que minimiza el ancho de banda efectivo y la duración efectiva, respectivamente. Una tercera posibilidad, cuando tanto $x(t)$ como $X(f)$ son funciones pares real valuadas con máximos en el origen es $t^* = 0$ y $f^* = 0$.

La demostración del teorema es muy sencilla en este caso. Como $x(t)$ y $X(f)$ son absolutamente integrables,

$$|X(f^*)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f^* t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t)\, e^{-j2\pi f^* t} \right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt = |x(t^*)|\, \Delta t,$$

y análogamente,

$$|x(t^*)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{-j2\pi f t^*} df \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(f)\, e^{-j2\pi f t^*} \right| df \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|\, df = |X(f^*)|\, \Delta f,$$

de modo que

$$\Delta t\,\Delta f \geq \frac{|X(f^*)|}{|x(t^*)|} \times \frac{|x(t^*)|}{|X(f^*)|} = 1.$$

Evidentemente, si $x(t)$ y $X(f)$ sean funciones reales no negativas, y $x(0)$ y $X(0)$ son distintas de cero, entonces las cantidades de arriba pueden reemplazarse por

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = x(0)\ \Delta t, \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,df = X(0)\ \Delta f,$$

y entonces,

$$\Delta t\,\Delta f = \frac{|X(0)|}{|x(0)|} \times \frac{|x(0)|}{|X(0)|} = 1.$$

En el caso en que la transformada de Fourier se exprese en función de la frecuencia angular Ω, el teorema del ancho de banda para funciones absolutamente integrables establece que $\Delta t\,\Delta\Omega \geq 2\pi$ (véase el Ejercicio 27).

EJEMPLO **2.47. Aplicación del teorema del ancho de banda para señales absolutamente integrables**
Sea $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$. La transformada de $x(t)$ es

$$X(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}.$$

Tanto $x(t)$ como $X(f)$ son funciones pares con máximos en el origen. Entonces para calcular la duración efectiva y el ancho de banda se puede adoptar $t^* = 0$ y $f^* = 0$,

$$\Delta t = \frac{1}{|x(0)|}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}dt = \frac{2}{\alpha}, \tag{2.130}$$

$$\Delta f = \frac{1}{|X(0)|}\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|\,df = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}df = \frac{\alpha}{2}. \tag{2.131}$$

El producto de la duración efectiva por el ancho de banda es

$$\Delta t\,\Delta f = \left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1,$$

como lo predice el teorema del ancho de banda. La igualdad se alcanza pues tanto $x(t)$ como $X(f)$ son funciones reales y no negativas, con $x(0) \neq 0$, $X(0) \neq 0$. Intuitivamente, cuanto más pequeño sea α (es decir, la constante de tiempo $1/\alpha$ es mayor) tanto mayor será la "duración efectiva" de la señal $x(t)$; la ecuación (2.130) muestra que la duración efectiva Δt es inversamente proporcional a α. En consecuencia, la transformada de Fourier tendrá un ancho de banda efectivo Δf menor, directamente proporcional a α, tal como se revela en la ecuación (2.131). □

Señales de energía finita

Cuando $x(t)$ y su transformada de Fourier $X(f)$ son funciones de energía finita, conviene definir la duración efectiva y el ancho de banda efectivo como los momentos de segundo orden de la señal y la transformada,

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(t-t^*)^2\,|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt} \qquad \text{y} \qquad (\Delta f)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(f-f^*)^2\,|X(f)|^2\,df}{\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2\,df},$$

respectivamente, donde t^* y f^* son

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\,|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt} \qquad \text{y} \qquad f^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f\,|X(f)|^2\,df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df}.$$

(Debe tenerse en cuenta que la duración efectiva y el ancho de banda efectivo definidos en esta sección no son los mismos que los definidos en la Sección anterior.) Usando la definición de energía E de la señal

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df, \tag{2.132}$$

la duración efectiva y el ancho de banda efectivo pueden escribirse de manera más compacta como

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} (t-t^*)^2\,|x(t)|^2\,dt}, \quad \text{y} \quad \Delta f = \sqrt{\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} (f-f^*)^2\,|X(f)|^2\,df}. \tag{2.133}$$

El teorema del ancho de banda para señales de energía finita establece que, si Δt y Δf están bien definidas, y si además

$$\lim_{t\to\pm\infty} \sqrt{t}\,x(t) = 0, \tag{2.134}$$

es decir, que la señal temporal decrece más rápidamente que $1/\sqrt{t}$, entonces

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi},$$

y la igualdad se verifica sólo si $x(t)$ y $X(f)$ están linealmente relacionadas entre sí. De acuerdo al resultado del Ejemplo 2.36, esto sucede si $x(t)$ es una función gaussiana, $x(t) = Ae^{-\alpha t^2}$, con $\alpha > 0$.

Si la transformada de Fourier se expresa en función de la frecuencia angular Ω, el teorema del ancho de banda para funciones de energía finita establece que $\Delta t\,\Delta\Omega \geq 1/2$.

La demostración para esta clase de señales es un poco más complicada que para el caso de señales absolutamente integrables, y se basa en la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que establece que

$$\left|\int g(t)\;h(t)\,dt\right|^2 \leq \int |g(t)|^2\,dt \int |h(t)|^2\,dt \tag{2.135}$$

y la igualdad se verifica sólo cuando $g(t)$ y $h(t)$ están linealmente relacionadas entre sí, $g(t) = k\,h(t)$.

Para simplificar la notación se asume que tanto t^* como f^* son nulos; si no lo fuesen, basta efectuar un cambio de variables en las integrales. Definiendo

$$g(t) = ts(t), \qquad h(t) = \frac{d}{dt}x(t),$$

la desigualdad de Cauchy-Schwartz (2.135) toma la forma

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} t\,x(t)\;\frac{d}{dt}x(t)\;dt\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |t\,x(t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d}{dt}x(t)\right|^2 dt. \tag{2.136}$$

El miembro izquierdo de la desigualdad se puede integrar por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,x(t)\,\frac{d}{dt}x(t)\,dt = \frac{1}{2}tx^2(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = -\frac{E}{2}, \tag{2.137}$$

de acuerdo con la condición (2.134) y la definición de energía (2.132). Por otra parte, aplicando la propiedad de derivación temporal de la transformada de Fourier (2.82) y la relación de Parseval (2.99) resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{dt}x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}|j2\pi f\,X(f)|^2\,df = (2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty}|f\,X(f)|^2\,df. \tag{2.138}$$

Sustituyendo (2.137) y (2.138) en (2.136), se tiene que

$$\frac{E^2}{4} \le \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|t\,x(t)|^2\,dt}_{(\Delta t)^2E}(2\pi)^2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|f\,X(f)|^2\,df}_{(\Delta f)^2E} = E^2(2\pi)^2(\Delta t)^2(\Delta f)^2,$$

de acuerdo a las definiciones de duración efectiva y ancho de banda efectivo (2.133). En consecuencia,

$$\Delta t\Delta f \ge \frac{1}{4\pi}.$$

La igualdad se verifica sólo para señales que verifiquen $tx(t) = k\frac{d}{dt}x(t)$, es decir, si $x(t)$ es un pulso gaussiano, $x(t) = Ce^{-\frac{k}{2}t^2}$ (véase el Ejemplo 2.36). En otras palabras, el pulso gaussiano es la señal que tiene el mínimo producto ganancia-ancho de banda.

EJEMPLO **2.48. Aplicación del teorema del ancho de banda para señales de energía finita** Consideremos la señal $x(t)$ del ejemplo anterior, dada por el par transformado

$$x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}.$$

Como $t\,x(t)$ y $f\,X(f)$ son funciones impares, resulta $t^* = 0$ y $f^* = 0$. La energía E está dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-\alpha|t|}\right|^2 dt = 2\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}.$$

La duración efectiva de la señal es

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}(t-t^*)^2|x(t)|^2\,dt} = \sqrt{2\alpha\int_0^{\infty}t^2e^{-2\alpha t}dt} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha},$$

y el ancho de banda se obtiene integrando por partes,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sqrt{\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}(f-f^*)^2|X(f)|^2\,df} = \sqrt{\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f^2\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}\right)^2 df} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{\alpha}{2\pi}.\end{aligned}$$

El producto de la duración efectiva por el ancho de banda es

$$\Delta t\,\Delta f = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right) \ge \frac{1}{4\pi}$$

como lo predice el teorema (en este caso las funciones $x(t)$ y $X(f)$ no están linealmente relacionadas entre sí). □

El principio de incertidumbre del análisis de Fourier muestra que señales extremadamente concentradas en un dominio pierden su "localidad" en el otro: la transformada de Fourier de un impulso temporal $x(t) = \delta(t)$ (una señal concentrada en $t = 0$) es una constante en frecuencia $X(f) = 1$ (que no está "concentrada" en ningún rango de frecuencia). Por otra parte, una señal sinusoidal $x(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t)$, que no se puede "concentrar" en algún intervalo de tiempo, tiene una transformada de Fourier que está localizada (concentrada) en $\pm f_0$. Esta "falta de localidad" conjunta es causa de varios problemas cuando se trabaja con aplicaciones en el dominio frecuencial. Por este motivo se han desarrollado teorías de transformaciones muy modernas que permiten obtener simultáneamente buenas descomposiciones frecuenciales y temporales de las señales, tales como la transformada de Fourier de tiempo limitado (*short-time Fourier Transform*) o la transformación por "onditas" (*wavelets*).

2.9. Sumario

Se han presentado en este Capítulo los fundamentos físicos y matemáticos de la teoría de Fourier, comenzando con una breve reseña histórica. Se revisaron conceptos de series de Fourier, y se establecieron las bases para la representación espectral. El estudio de la transformada se presenta con cierto detalle, tratando de resaltar los aspectos más relevantes para las aplicaciones. Se definieron las funciones $\text{sinc}(\cdot)$ y los impulsos, que serán útiles para los desarrollos posteriores. Se estudiaron una serie de propiedades que facilitarán el análisis de sistemas de los Capítulos siguientes, poniendo especial énfasis en el teorema de convolución en tiempo y frecuencia, de vital importancia en el estudio de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Se establecieron los vínculos entre las series de Fourier de funciones periódicas y las transformadas de Fourier de un período de dichas señales, lo que conduce a establecer la transformada de Fourier para señales periódicas empleando impulsos. Se estudian además algunos temas de interés práctico, como el efecto Gibbs y el teorema del ancho de banda. Los conceptos expuestos se aplican al análisis espectral de señales analógicas, presentando las ideas básicas de funcionamiento de los analizadores espectrales. Finalmente, se estudian un conjunto de señales típicas y se comparan los espectros calculados analíticamente con los obtenidos por instrumentos de medida.

2.10. Bibliografía

1. Benedetto, J. J., "Uncertainty principle inequalities and spectrum estimation", *Recent Advances in Fourier Analysis and Its Applications*, (J. S. Byrnes y J. L. Byrnes, eds.) Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, 1990.

2. Benedetto, J. J., Frazier, M. W. (eds.) *Waveleets: Mathematics and Applications*, CRC Press, Boca Ratón, Florida, 1994.

3. Benedetto, J. J., Heil, C., Walnut, D. "Uncertainty principle in for time-frequency operators", *Continuous and Discrete Fourier Transforms, Extension Problems, and Wiener-Hopf Equations*, (I. Gohberg, ed.) Birkhäuser, Basel, pp. 1-25, 1992

4. Bôcher, M. "Introduction to the theory of Fourier's series", *Ann. Math.*, **7**, pp. 81-152, 1906.

5. Bracewel, R. *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill Book Co., Electrical and Electronic Engineering Series, New York, 1978.

6. Briggs, W. L., Henson, V. E. *The DFT. An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995.

7. Brigham, E. *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, 1974.

8. Carslaw, H. S. "A historical note on Gibbs' phenomenon in Fourier series and integrals", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **31**, pp. 420-424, 1925.

9. Carslaw, H. S. *An introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3ra edición revisada, Dover Publications, Inc., New York, 1950.

10. Churchill, R. V. *Fourier Series and boundary value problems*, 2daedición, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

11. Cooley, J., Tukey, J. "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", *Math. Comp.*, vol. 19, 1965, pp. 297-301.

12. Courant, R., John, F. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, 10ma reimpresión de la 1ra edición castellana. Limusa-Noriega Editores, México, 1993.

13. Daubechies, I. *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992

14. Folland, G. B., Sitaram, A. "The Uncertainty Principle: a Mathematical Survey", *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 3, no. 3, 1997, pp. 207-238.

15. Gabor, D. "Theory of Communication", *J. Inst. Elec. Engr.*, vol. 93, pp. 429-457, 1946.

16. Goldstine, H. H., *A History of Numerical Analysis from the* 16th *to the* 19th *Century*, Springe-Verlag, Berlin, 1977.

17. Gottlieb, D., Shu, C.-W. "On the Gibbs Phenomenon and its resolution", *SIAM Review*, **39**, 4, pp. 644-668, 1997.

18. Havin, V., Jöricke, *The uncertainty principle in Harmonic Analysis*, Springer, Berlin, 1994.

19. Haykin, S. *An Introduction to Analog and Digital Communications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

20. Heideman, M., Johnson, D., Burrus, C. "Gauss and the history of the fast Fourier transform", *Arch. Hist. Exact Sciences*, vol. 34, 1985, pp. 265-277.

21. Heisemberg, W. "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematic und Mechanik", *Zeit Physik*, vol. 43, 1927, pp. 172-198.

22. Howell, K. B. "Fourier Transforms" en Pularikas, A. (ed.) *The Transforms and Applications Handbook*, CRC Press/IEEE Press, Boca Ratón, Florida, 1996, pp. 95-226.

23. Howell, K. B. *Principles of Fourier Analysis*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Ratón, Florida, 2001.

24. James, J. F. *A Student's Guide to Fourier Transforms with Applications in Physics and Engineering*, Cambridge University Press, New York, 2002.

25. Kaplan, W. *Operational Methods for Linear Systems*, Adisson-Wesley, Reading, 1962.

26. Lanczos. C. *Discourse on Fourier Series*, Hafner Publishing, New York, 1966.

27. Oppenheim, A. V., Wilsky, A., Young, I. *Signals and Systems*, Prentice-Hall International Editions, 1983.

28. Papoulis, A. *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw Hill, 1962.

29. Porat, B. *A course in Digital Signal Processing*, John Wiley and Sons, New York, 1997.

30. Price, J. F. *Fourier Techniques and Applications*, Plenum, New York, 1985.

31. Thompson, W. J. "Fourier series and the Gibbs phenomenon", *American Journal of Physics*, vol. 60, No. 5, 1992, pp. 425-429.

32. Wiener, N., *I am a Mathematician*, MIT Press, Cambridge, 1956.

33. Wilbraham, H. "On a certain periodic function", *Cambridge and Dublin Math. J.*, **3**, pp. 198-201, 1848.

2.11. Tablas útiles

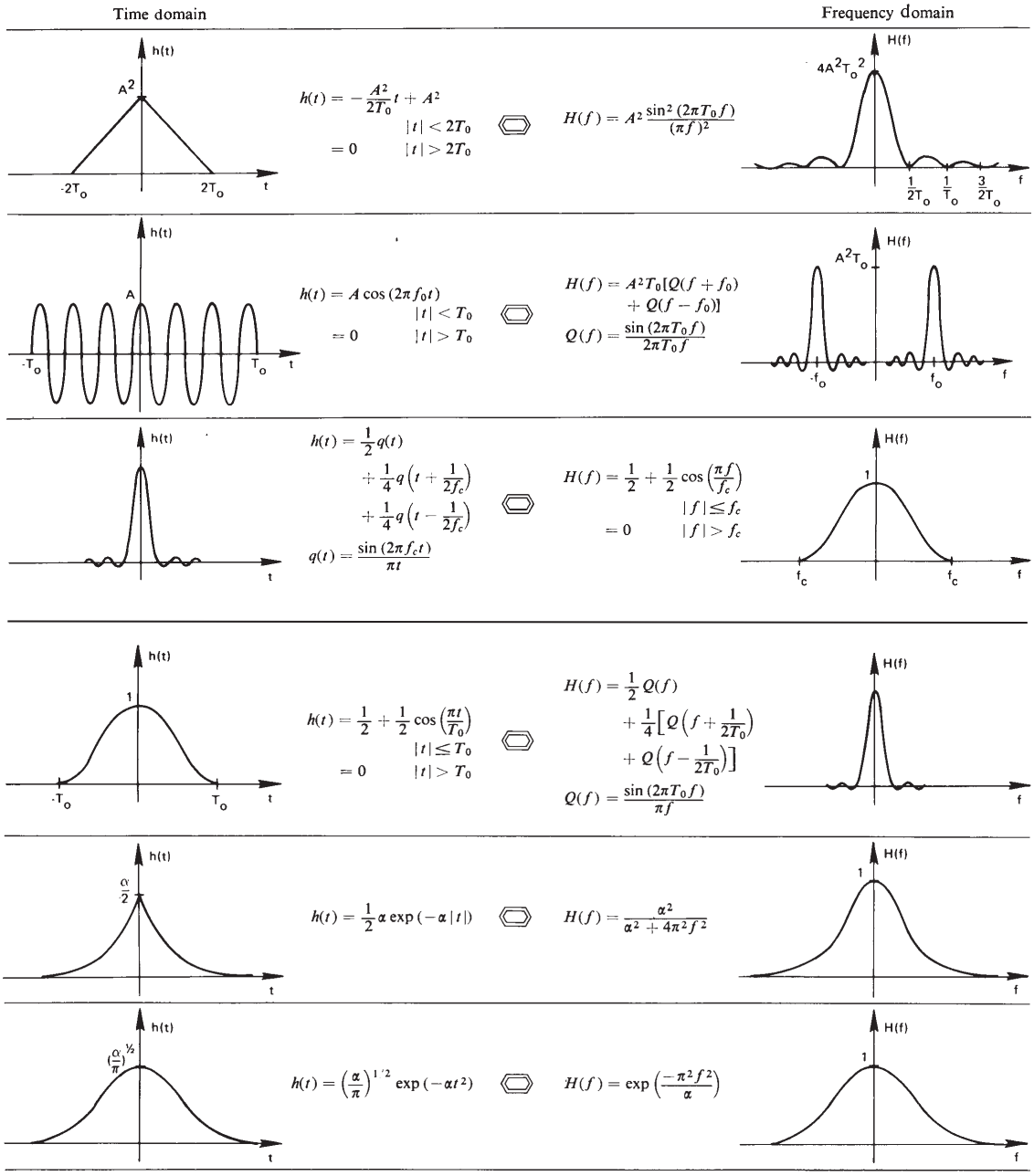
2.11.1. Propiedades y teoremas de transformadas y series de Fourier

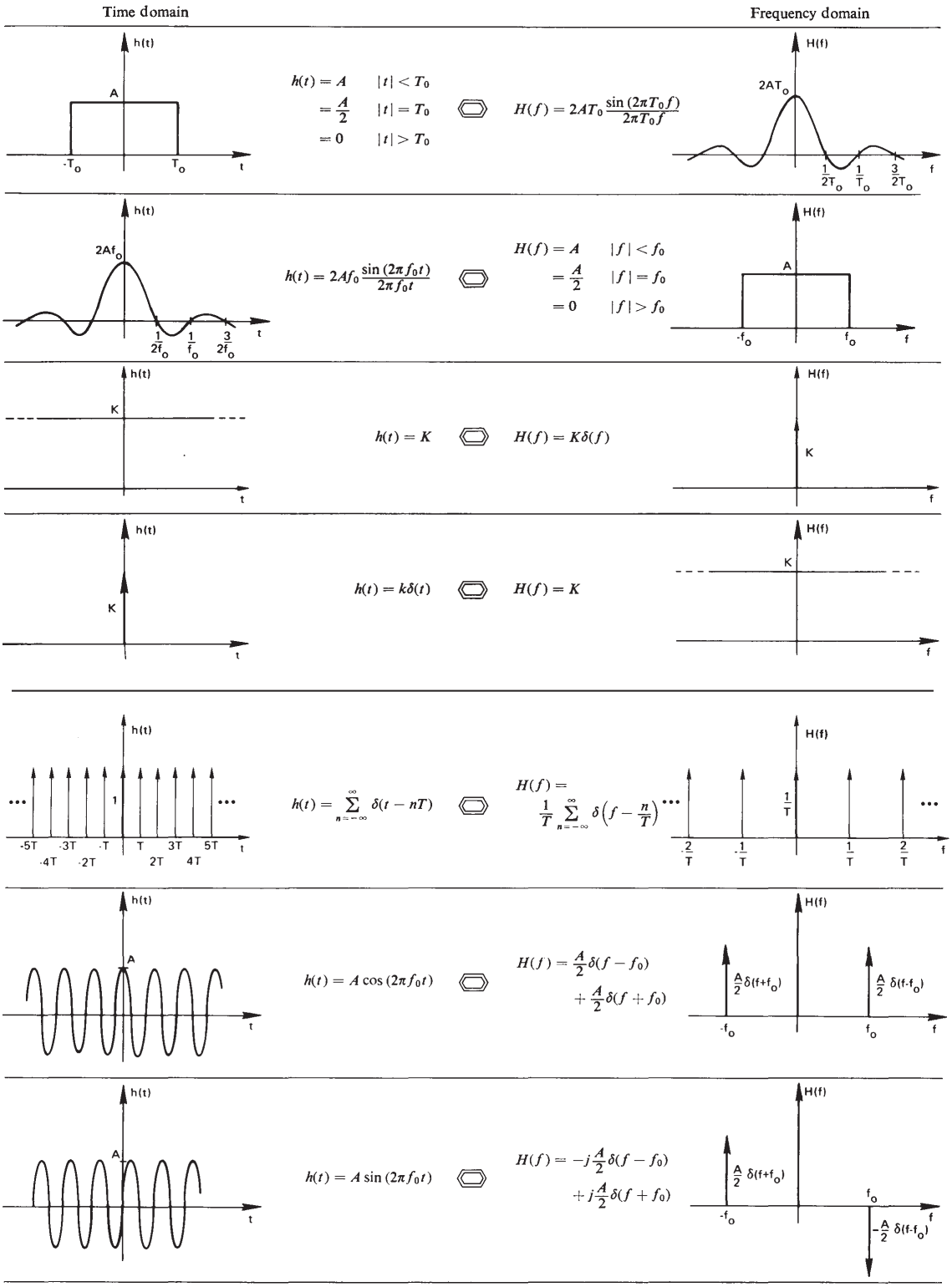
	Transformada de Fourier (TF)		Serie de Fourier (SF)	
Ecuación de análisis	$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$	$c_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\tilde{x}(t)\,e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\,dt$	
Ecuación de síntesis	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$		$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$	
Propiedades	función $x(t)$ continua, aperiódica	transformada $X(\Omega)$ continua, aperiódica	función $\tilde{x}(t)$ continua, periódica	transformada c_k discreta, aperiódica
desplazamiento temporal	$x(t-t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}X(\Omega)$	$\tilde{x}(t-t_0)$	$e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\,c_k$
desplazamiento frecuencial	$e^{j\Omega_0 t}x(t)$	$X(\Omega-\Omega_0)$	$e^{j\frac{2\pi}{T_0}Mt}\,\tilde{x}(t)$	c_{k-M}
escalado temporal	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$		
escalado frecuencial	$\frac{1}{\lvert a\rvert}x\left(\frac{t}{\lvert a\rvert}\right)$	$X(a\Omega)$		
dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\Omega)$	$\tilde{x}(-t)$	c_{-k}
inversión temporal	$x(-t)$	$X(-\Omega)$		
derivación temporal	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\Omega X(\Omega)$	$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t)$	$j\frac{2\pi}{T_0}kc_k$
derivación frecuencial	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$		
integración temporal	$\int_0^t x(\sigma)\,d\sigma$	$\frac{1}{j\Omega}X(\Omega)+\frac{1}{\pi}X(0)\delta(\Omega)$	$\int_{x_0}^{t}\tilde{x}(\tau)\,\tilde{y}(t-\tau)\,d\tau$	$T_0c_kd_k$
integración frecuencial	$-\frac{1}{j2\pi t}x(t)+\frac{1}{2}x(0)\delta(t)$	$2\pi\int_{-\infty}^{\omega}X(\sigma)\,d\sigma$		
convolución	$x(t)*y(t)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$	$\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)$	$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}c_\ell d_{k-\ell}$
modulación	$x(t)\,y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\Omega)*Y(\Omega)$	$\tilde{x}^*(t)$	c_{-k}^*
propiedades de simetría	$x^*(t)$	$X^*(-\Omega)$		
	$\mathrm{Re}\{x(t)\}$	$X_e(\Omega)=\frac{1}{2}[X(\Omega)+X^*(\Omega)]$	$\tilde{x}_e(t)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(t)+\tilde{x}^*(-t)]$	$\mathrm{Re}\{c_k\}$
	$j\,\mathrm{Im}\{x(t)\}$	$X_e(\Omega)=\frac{1}{2}[X(\Omega)-X^*(\Omega)]$	$\tilde{x}_o(t)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(t)-\tilde{x}^*(-t)]$	$j\,\mathrm{Im}\{c_k\}$
	$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x^*(-t)]$	$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$		
	$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x^*(-t)]$	$j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$		
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(\Omega)\rvert^2d\Omega=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(f)\rvert^2df$		$\frac{1}{T_0}\int_{x_0}^{}\lvert\tilde{x}(t)\rvert^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert c_k\rvert^2$	
Relación de potencia	$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,y^*(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)\,Y^*(\Omega)\,d\Omega=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\,Y^*(f)\,df$		$\frac{1}{T_0}\int_{x_0}^{}\tilde{x}(t)\,\tilde{y}^*(t)\,dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kd_k^*$	

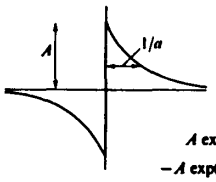
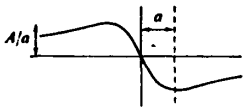
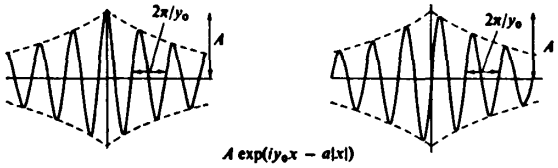
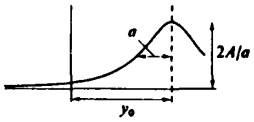
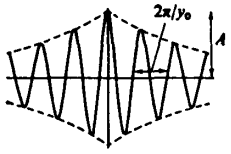
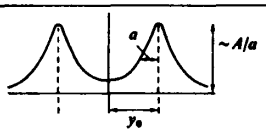
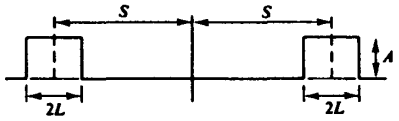
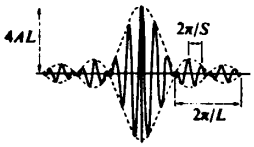
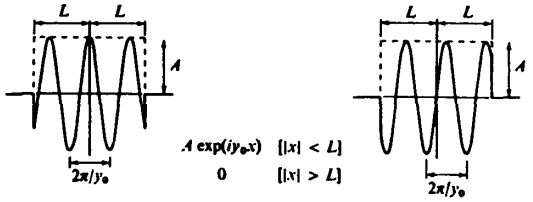
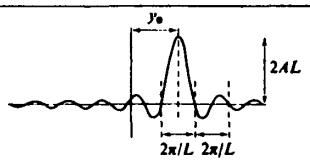
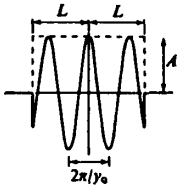
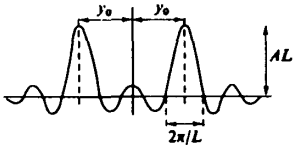
2.11.2. Algunos pares transformados de uso frecuente

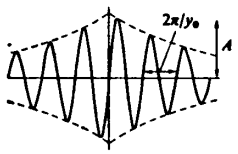
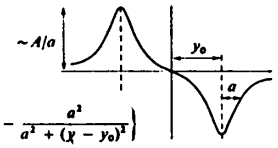
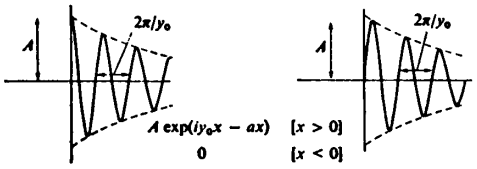
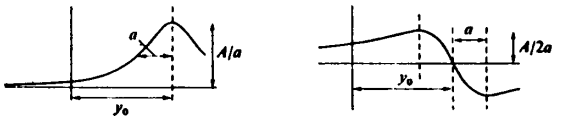
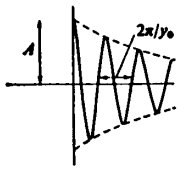
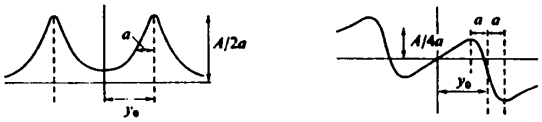
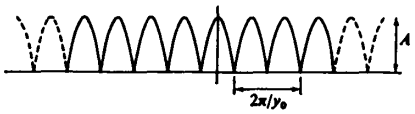
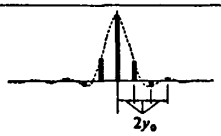
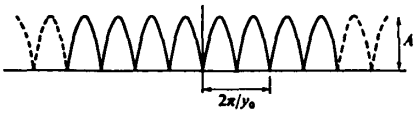
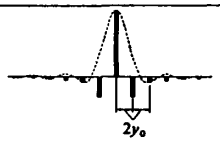
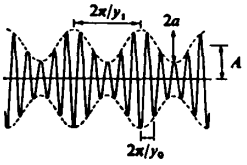
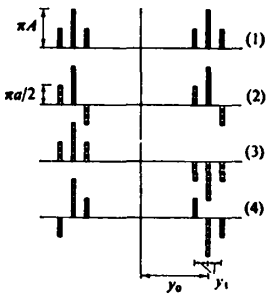
función temporal	transformada de Fourier		coeficiente c_k de la serie de Fourier (si la función se supone periódica de período T_0)
	$X(\Omega), -\infty \leq \Omega \leq \infty$	$X(f), -\infty \leq f \leq \infty$	
$\delta(t)$	1	1	
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$	$e^{-j2\pi t_0 f}$	
$e^{-\alpha t}u(t)$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{\alpha + j\Omega}$	$\dfrac{1}{\alpha + j2\pi f}$	
$u(t)$	$\dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$	$\dfrac{1}{j2\pi f} + \dfrac{1}{2}\delta(f)$	
$ta^{-t}u(t)$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{(a+j\Omega)^2}$	$\dfrac{1}{(a+j2\pi f)^2}$	
$\dfrac{\sin\Omega_c t}{\pi t} = \dfrac{\Omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\Omega_c}{\pi}t\right)$	$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\Omega\rvert < \Omega_c, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$	$X(f) = \begin{cases} 1, & \lvert f\rvert < f_c = \omega_c/2\pi, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$	
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\frac{\Omega^2}{4\pi}}$	$e^{-\pi f^2}$	
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < \tau \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau \end{cases}$	$\dfrac{2\sin\tau\Omega}{\Omega} = 2\tau\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\tau}{\pi}\Omega\right)$	$\dfrac{2\sin 2\pi\tau f}{2\pi f} = 2\tau\,\mathrm{sinc}\left(2\tau f\right)$	$\dfrac{2\sin 2\pi\tau k/T_0}{2\pi k} = \dfrac{2\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{2\tau}{T_0}k\right)$
$e^{j\Omega_0 t} = e^{j2\pi f_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$	$\delta\left(f - \dfrac{\Omega_0}{2\pi}\right) = \delta(f - f_0)$	$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_k = 0,\ k \neq 1. \end{cases}$
$1, -\infty \leq t \leq \infty$	$2\pi\delta(\Omega)$	$\delta(f)$	$c_0 = 1, c_k = 0\ (k \neq 0)$ (independientemente del período T_0 elegido)
$\cos(\Omega_0 t + \phi)$	$\pi e^{-j\phi}\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi e^{j\phi}\delta(\Omega + \Omega_0)$	$\dfrac{1}{2}e^{-j\phi}\delta\left(f - \dfrac{\Omega_0}{2\pi}\right) + \dfrac{1}{2}e^{j\phi}\delta\left(f + \dfrac{\Omega_0}{2\pi}\right)$	$\begin{cases} c_1 = c_{-1}^* = \frac{1}{2}e^{-j\phi}, \\ c_k = 0,\ k \neq 1. \end{cases}$
$\sin(\Omega_0 t + \phi)$	$-j\pi e^{-j\phi}\delta(\Omega - \Omega_0) + j\pi e^{j\phi}\delta(\Omega + \Omega_0)$	$-j\dfrac{1}{2}e^{-j\phi}\delta\left(f - \dfrac{\Omega_0}{2\pi}\right) + j\dfrac{1}{2}e^{j\phi}\delta\left(f + \dfrac{\Omega_0}{2\pi}\right)$	$\begin{cases} c_1 = -c_{-1}^* = \frac{1}{2}e^{-j\phi}, \\ c_k = 0,\ k \neq 1. \end{cases}$
$\sum_n \delta(t - nT_0)$	$\dfrac{2\pi}{T_0}\sum_k \delta\left(\Omega - \dfrac{2\pi}{T_0}k\right) = \Omega_0 \sum_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$	$\dfrac{1}{T_0}\sum_k \delta\left(f - \dfrac{1}{T_0}k\right) = f_0 \sum_k \delta(f - kf_0)$	$c_k = \dfrac{1}{T_0}$, para todo k

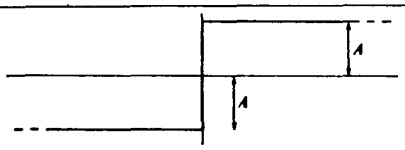
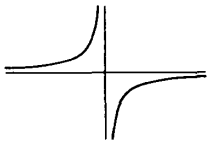
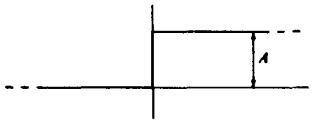
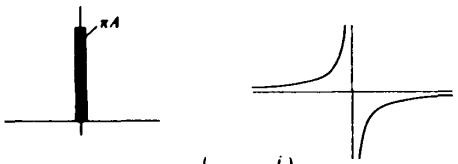
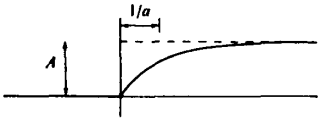
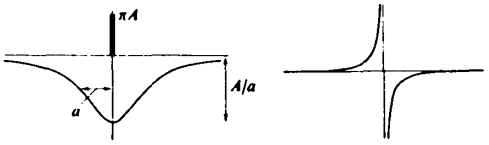
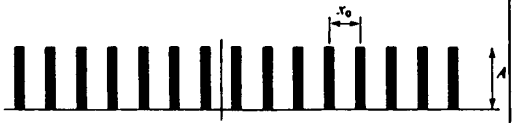
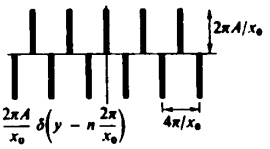
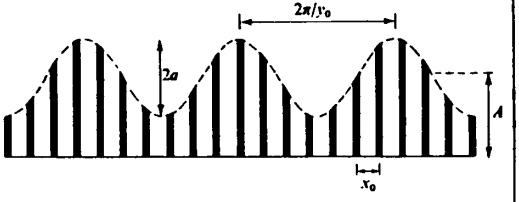
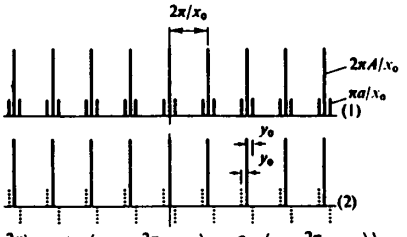
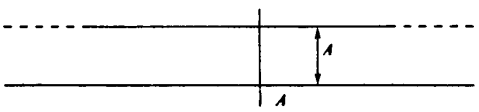
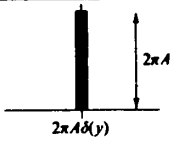
2.12. Tabla pictórica de transformadas

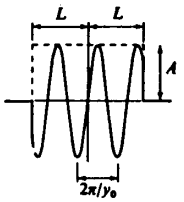
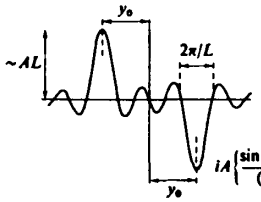
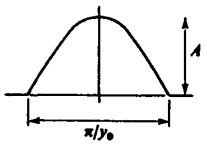
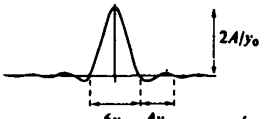
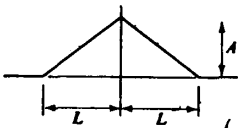
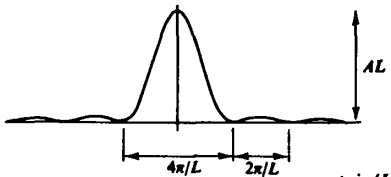
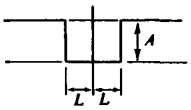
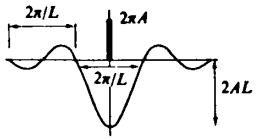
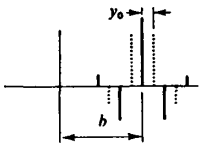
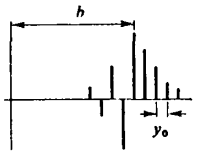



Time domain
Frequency domain
h(t)
H(f)
A
$-T_0$
T_0
t
f
$h(t) = A \quad |t| < T_0$
$= \frac{A}{2} \quad |t| = T_0$
$= 0 \quad |t| > T_0$
$H(f) = 2AT_0 \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$
$2AT_0$
$\frac{1}{2T_0}$ $\frac{1}{T_0}$ $\frac{3}{2T_0}$
$2Af_0$
$h(t) = 2Af_0 \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}$
$H(f) = A \quad |f| < f_0$
$= \frac{A}{2} \quad |f| = f_0$
$= 0 \quad |f| > f_0$
$\frac{1}{2f_0}$ $\frac{1}{f_0}$ $\frac{3}{2f_0}$
$-f_0$ f_0
K
$h(t) = K$
$H(f) = K\delta(f)$
$h(t) = k\delta(t)$
$H(f) = K$
-5T -3T -T T 3T 5T
-4T -2T 2T 4T
1
$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$
$H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
$\frac{1}{T}$
$\frac{2}{T}$ $\frac{1}{T}$ $\frac{1}{T}$ $\frac{2}{T}$
$h(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$
$H(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$
$\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$
$\frac{A}{2}\delta(f-f_0)$
$h(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$
$H(f) = -j\frac{A}{2}\delta(f - f_0) + j\frac{A}{2}\delta(f + f_0)$
$-\frac{A}{2}\delta(f-f_0)$

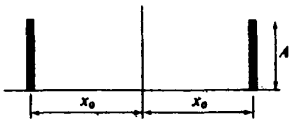
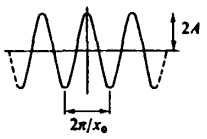
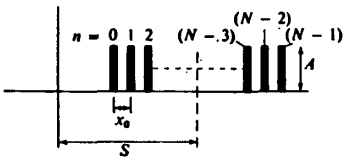
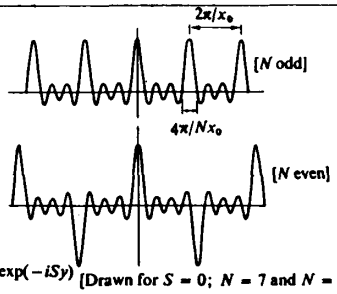
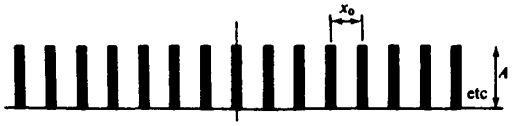
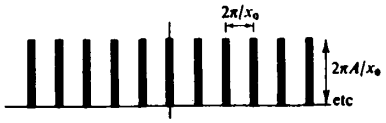
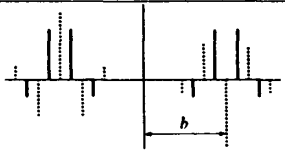
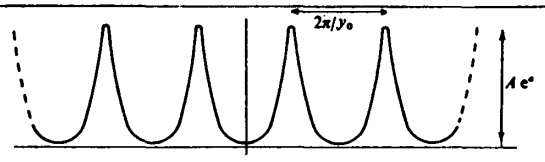
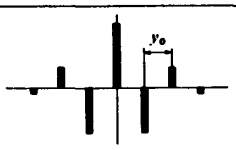
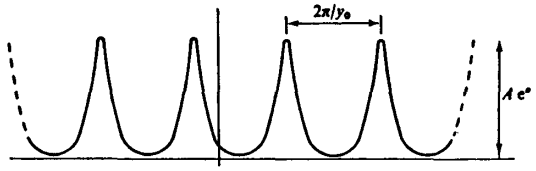
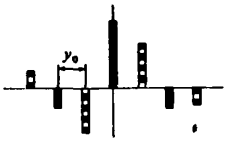
$f(x)$	$F(y)$
 $A\exp(-ax) \quad [x > 0]$ $-A\exp(-a\lvert x\rvert) \quad [x < 0]$	 $-2iA\dfrac{y}{a^2+y^2}$
 $A\exp(iy_0x - a\lvert x\rvert)$	 $\dfrac{2A}{a}\dfrac{a^2}{a^2+(y-y_0)^2}$
 $A\cos y_0x\exp(-a\lvert x\rvert)$	 $\dfrac{A}{a}\left\{\dfrac{a^2}{a^2+(y-y_0)^2}+\dfrac{a^2}{a^2+(y+y_0)^2}\right\}$ $=\dfrac{A}{a}\left\{\dfrac{2a^2(a^2+y_0^2+y^2)}{(a^2+y_0^2-y^2)^2+4a^2y^2}\right\}$
 $A \quad [(S-L) < \lvert x\rvert < (S+L)]$ $0 \quad$ [otherwise]	 $4A\dfrac{\cos Sy\sin Ly}{y}$
 $A\exp(iy_0x) \quad [\lvert x\rvert < L]$ $0 \quad [\lvert x\rvert > L]$	 $2A\dfrac{\sin\{L(y_0-y)\}}{(y_0-y)}$
 $A\cos y_0x \quad [\lvert x\rvert < L]$ $0 \quad [\lvert x\rvert > L]$	 $A\left[\dfrac{\sin L(y-y_0)}{(y-y_0)}+\dfrac{\sin L(y+y_0)}{(y+y_0)}\right]$

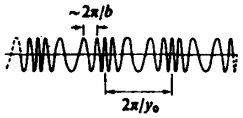
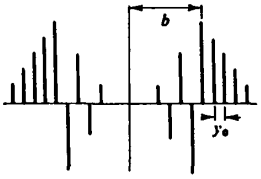
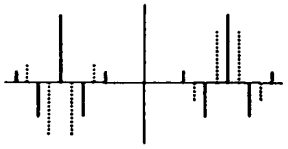
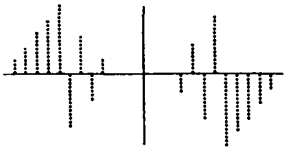
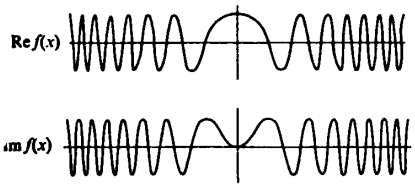
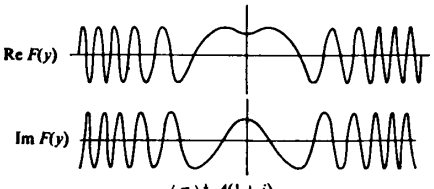
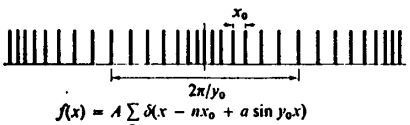
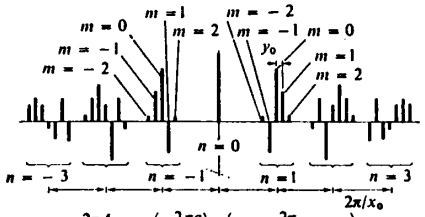
$f(x)$	$F(y)$
 $A \sin y_0 x \exp(-a\lvert x\rvert)$	 $\frac{iA}{a}\left\{\frac{a^2}{a^2+(y+y_0)^2}-\frac{a^2}{a^2+(y-y_0)^2}\right\}$ $=\frac{iA}{a}\left\{\frac{-4a^2yy_0}{(a^2+y_0^2-y^2)^2+4a^2y^2}\right\}$
 $A \exp(iy_0x - ax)$ $[x > 0]$ 0 $[x < 0]$	 $A\left\{\frac{a+i(y_0-y)}{a^2+(y_0-y)^2}\right\}=A\left\{\frac{1}{a+i(y-y_0)}\right\}$
 $A \cos y_0 x \exp(-ax)$ $[x > 0]$ 0 $[x < 0]$	 $\frac{A}{2}\left[\left\{\frac{a}{a^2+(y+y_0)^2}+\frac{a}{a^2+(y-y_0)^2}\right\}+i\left\{\frac{y_0-y}{a^2+(y_0-y)^2}-\frac{y_0+y}{a^2+(y_0+y)^2}\right\}\right]$ $=A\left\{\frac{a(a^2+y_0^2+y^2)-iy(a^2+y^2-y_0^2)}{(a^2+y_0^2-y^2)^2+4a^2y^2}\right\}$
 $A\lvert\cos y_0 x\rvert$	 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4A\left(\frac{y_0^2}{y_0^2-y^2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2y_0}\right)\delta(y-2ny_0)$ $[n = 0, \pm1, \pm2, \ldots]$
 $A\lvert\sin y_0 x\rvert$	 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n 4A\left(\frac{y_0^2}{y_0^2-y^2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2y_0}\right)\delta(y-2ny_0)$ $[n = 0, \pm1, \pm2, \ldots]$
 $\cos y_0 x\{A + a\cos y_1 x\}$ ... (1) $\cos y_0 x\{A + a\sin y_1 x\}$ ... (2) $\sin y_0 x\{A + a\cos y_1 x\}$ ... (3) $\sin y_0 x\{A + a\sin y_1 x\}$ ... (4)	 $F(y)$ consists of delta functions as shown

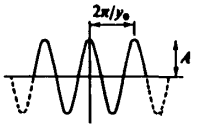
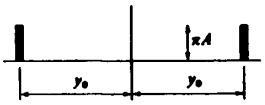
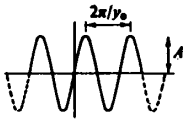
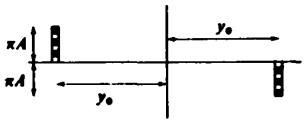
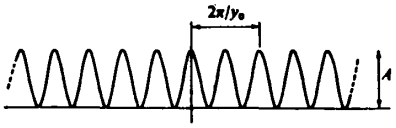
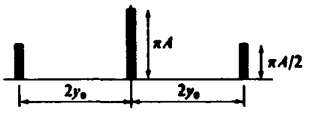
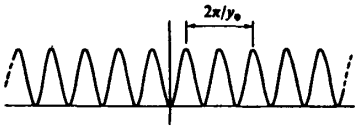
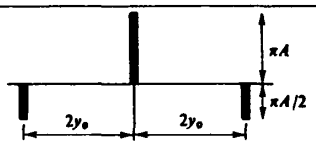
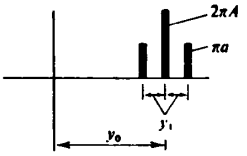
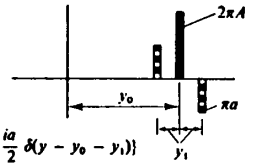
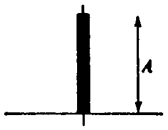
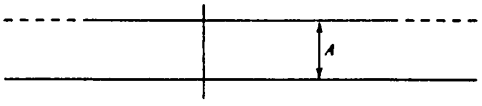
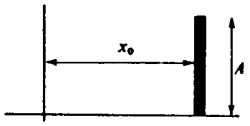
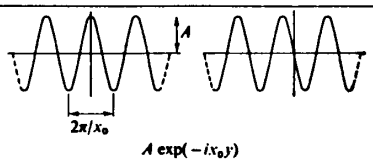
$f(x)$	$F(y)$
 $+A \quad [x > 0]$ $-A \quad [x < 0]$ $[f(x) = A\,\mathrm{sgn}(x)]$	 $-2iA\,\frac{1}{y}$
 $A \quad [x > 0]$ $0 \quad [x < 0]$ $[f(x) = AU(x)]$	 $A\left\{\pi\delta(y) - \frac{i}{y}\right\}$
 $A\{1-\exp(-ax)\} \quad [x > 0]$ $0 \quad [x < 0]$	 $\pi A\delta(y) - A\left\{\frac{a}{a^2 + y^2} + i\,\frac{a^2}{y(a^2 + y^2)}\right\}$
 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A\delta\left(x - \frac{x_0}{2} - nx_0\right)$	 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{2\pi A}{x_0}\,\delta\left(y - n\frac{2\pi}{x_0}\right)$
 $\sum \delta(x - nx_0)\{A + a\cos y_0 x\} \quad (1)$ $\sum \delta(x - nx_0)\{A + a\sin y_0 x\} \quad (2)$ $[n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$	 $\sum_n \frac{2\pi}{x_0}\left\{A\delta\left(y - n\frac{2\pi}{x_0}\right) + \frac{a}{2}\,\delta\left(y - n\frac{2\pi}{x_0} + y_0\right) + \frac{a}{2}\,\delta\left(y - \frac{2\pi}{x_0} - y_0\right)\right\}$ $\sum_n \frac{2\pi}{x_0}\left\{A\delta\left(y - n\frac{2\pi}{x_0}\right) + \frac{ia}{2}\,\delta\left(y - n\frac{2\pi}{x_0} + y_0\right) - \frac{ia}{2}\,\delta\left(y - n\frac{2\pi}{x_0} - y_0\right)\right\}$ $[n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$
	

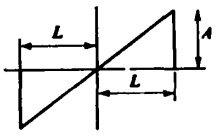
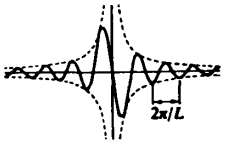
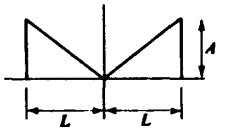
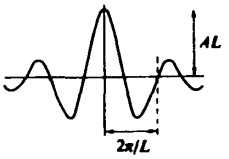
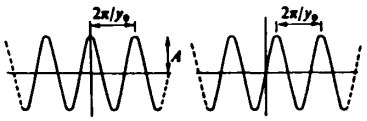
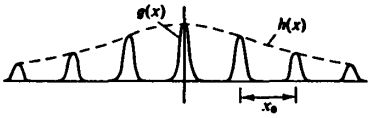
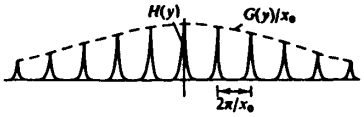
$f(x)$	$F(y)$
 $A \sin y_0 x \quad [\lvert x\rvert < L]$ $0 \quad [\lvert x\rvert > L]$	 $iA\left\{\frac{\sin L(y+y_0)}{(y+y_0)} - \frac{\sin L(y-y_0)}{(y-y_0)}\right\}$
 $A \cos y_0 x \quad [\lvert x\rvert < (\pi/2y_0)]$ $0 \quad [\lvert x\rvert > (\pi/2y_0)]$	 $2A\left\{\frac{y_0}{y_0^2 - y^2}\right\}\cos\left(\frac{\pi y}{2y_0}\right)$ [See (2.52) with $L = \pi/2y_0$].
 $A\left(1 - \frac{\lvert x\rvert}{L}\right) \quad [\lvert x\rvert < L]$ $0 \quad [\lvert x\rvert > L]$	 $AL\left\{\frac{\sin (Ly/2)}{(Ly/2)}\right\}^2$
 $A \quad [\lvert x\rvert > L]$ $0 \quad [\lvert x\rvert < L]$	 $2\pi A\delta(y) - 2A\frac{\sin Ly}{y}$
$A \exp\{i(a \cos y_0 x + bx)\}$	 $2\pi A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (i)^n J_n(a)\delta(y - b - ny_0)$
$A \exp\{i(a \sin y_0 x + bx)\}$	 $2\pi A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a)\delta(y - b - ny_0)\}$

Note: $J_n(-a) = J_{-n}(a) = (-1)^n J_n(a)$. See Appendix H for some properties of Bessel functions.

$f(x)$	$F(y)$
	
$A\{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)\}$	$2A \cos x_0 y$
	
$\sum_{n=0}^{N-1} A\delta\left\{x - nx_0 - S + \frac{(N-1)x_0}{2}\right\}$ Set of N delta functions symmetrically placed about $x = S$.	$A\frac{\sin(Nyx_0/2)}{\sin(yx_0/2)}\exp(-iSy)$ [Drawn for $S = 0$; $N = 7$ and $N = 8$]
	
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\delta(x - nx_0)$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi A}{x_0}\delta\left(y - n\frac{2\pi}{x_0}\right)$
$A \sin(a \cos y_0 x + bx)$	 $iπA\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{-(i)^n J_n(a)\delta(y - b - ny_0) + (-i)^n J_n(a)\delta(y + b + ny_0)\}$
 $A \exp(-a \cos y_0 x)$	 $2\pi A\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n I_n(a)\delta(y - ny_0)$
 $A \exp(-a \sin y_0 x)$	 $2\pi A\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(i)^n I_n(a)\delta(y - ny_0)$

$f(x)$	$F(y)$
 $A\cos(a\sin y_0 x + bx)$	 $\pi A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{J_n(a)\delta(y - b - ny_0) + J_n(a)\delta(y + b + ny_0)\}$
$A\cos(a\cos y_0 x + bx)$	 $\pi A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{(+i)^n J_n(a)\delta(y - b - ny_0) + (-i)^n J_n(a)\delta(y + b + ny_0)\}$
$A\sin(a\sin y_0 x + bx)$	 $i\pi A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{-J_n(a)\delta(y - b - ny_0) + J_n(a)\delta(y + b + ny_0)\}$
 $A\exp(\pm ia^2x^2)$	 $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{A(1 \pm i)}{a} \exp(\mp iy^2/4a^2)$
 $f(x) = A\sum_n \delta(x - nx_0 + a\sin y_0 x)$	 $F(y) = \frac{2\pi A}{x_0} \sum_{m,n} J_m\left(n\frac{2\pi a}{x_0}\right)\delta\left(y - n\frac{2\pi}{x_0} - my_0\right)$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$

$f(x)$	$F(y)$
 $A\cos y_0 x$	 $\pi A\{\delta(y-y_0)+\delta(y+y_0)\}$
 $A\sin y_0 x$	 $\pi i A\{\delta(y+y_0)-\delta(y-y_0)\}$
 $A\cos^2 y_0 x$	 $\pi A\{\frac{1}{2}\delta(y+2y_0)+\delta(y)+\frac{1}{2}\delta(y-2y_0)\}$
 $A\sin^2 y_0 x$	 $\pi A\{-\frac{1}{2}\delta(y+2y_0)+\delta(y)-\frac{1}{2}\delta(y-2y_0)\}$
$\exp(iy_0 x)(A + a\cos y_1 x)$	$2\pi\left\{A\delta(y-y_0)+\frac{a}{2}\delta(y-y_0+y_1)+\frac{a}{2}\delta(y-y_0-y_1)\right\}$ 
$\exp(iy_0 x)(A + a\sin y_1 x)$	 $2\pi\{A\delta(y-y_0)+\frac{ia}{2}\delta(y-y_0+y_1)-\frac{ia}{2}\delta(y-y_0-y_1)\}$
 $A\delta(x)$	 A
 $A\delta(x-x_0)$	 $A\exp(-ix_0 y)$

$f(x)$	$F(y)$
	
$\frac{Ax}{L}$ $\quad [\lvert x\rvert < L]$ $0 \quad [\lvert x\rvert > L]$	$\frac{2iA}{y}\left(\cos Ly - \frac{\sin Ly}{Ly}\right)$
	
$\frac{A\lvert x\rvert}{L}$ $\quad [\lvert x\rvert < L]$ $0 \quad [\lvert x\rvert > L]$	$2AL\left\{\frac{\sin Ly}{Ly} - 2\left(\frac{\sin (Ly/2)}{Ly}\right)^2\right\}$
	
$A\exp(iy_0x)$	$2\pi A\delta(y - y_0)$.
	
$f(x) = h(x)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(x - nx_0)$	$F(y) = \frac{1}{x_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{G\left(\frac{n2\pi}{x_0}\right)H\left(y - \frac{n2\pi}{x_0}\right)\right\}$
$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(nx_0)g(x - nx_0)$	$F(y) = \frac{1}{x_0}G(y)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(y - \frac{n2\pi}{x_0}\right)$

2.13. Ejercicios

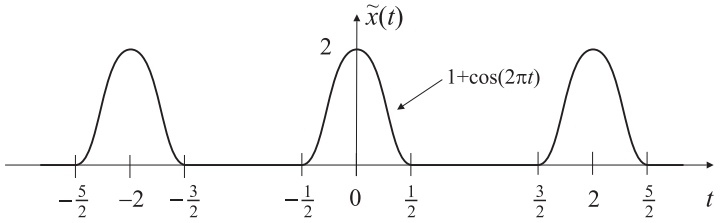
Ejercicio 1. Encuentre la relación entre los coeficientes a_k, b_k de la serie de Fourier de senos y cosenos con los coeficientes c_k de la serie de Fourier exponencial.

Ejercicio 2. Una señal de uso frecuente en comunicaciones es el *pulso coseno elevado*

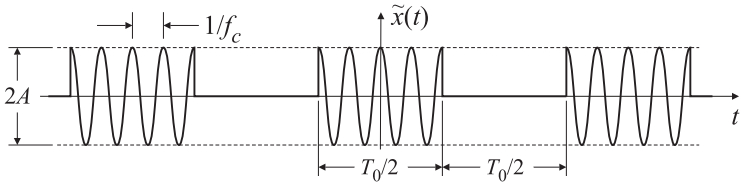
$$c(t) = \begin{cases} 1 + \cos(2\pi t), & -1/2 \leq t \leq 1/2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La figura muestra una señal $\tilde{x}(t)$ periódica, de período $T = 2$, compuesta por pulsos coseno elevado equiespaciados. Muestre que los primeros tres términos de la expansión en series de Fourier de $\tilde{x}(t)$ son

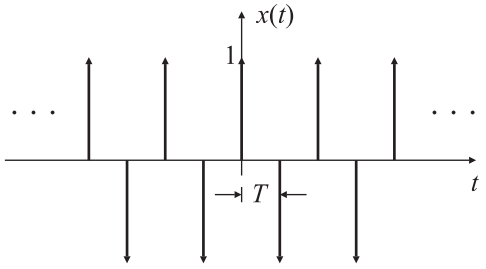
$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi}\cos \pi t + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \ldots$$



Ejercicio 3. Evalúe la amplitud del espectro de la señal de RF pulsada que se muestra en la figura, suponiendo que $f_c = 10/T_0$.



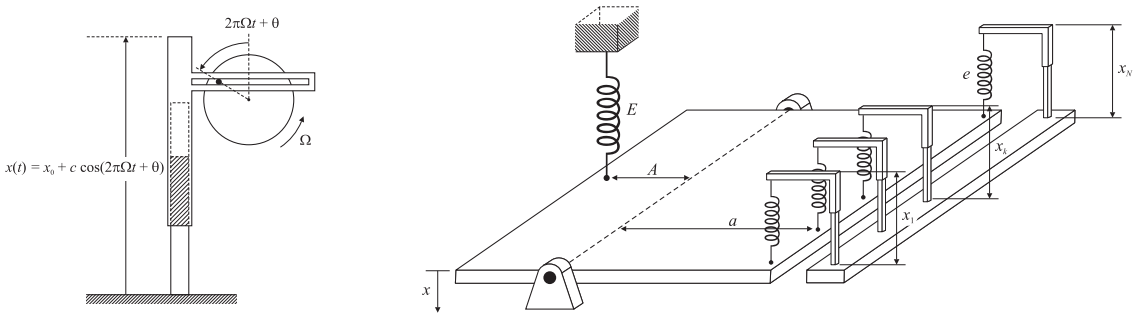
Ejercicio 4. La transformada de Fourier del tren (infinito) de impulsos $x(t) = \sum_n \delta(t - nT)$ es $X(f) = (1/T)\sum_k \delta(f - k/T)$. En base a este par transformado, calcule la transformada de Fourier del tren (infinito) de impulsos *alternantes* $x(t) = \sum_n (-1)^n \delta(t - nT)$. Aplicando propiedades, justifique "intuitivamente" el resultado obtenido.



Ejercicio 5. Pruebe las siguientes propiedades de la serie de Fourier:

1. Los coeficientes de Fourier c_k de una función $\tilde{x}(t)$ periódica y par $[\tilde{x}(t) = \tilde{x}(-t)]$ son reales y pares: $c_k = c_{-k}$.
2. Los coeficientes de Fourier c_k de una función $\tilde{x}(t)$ periódica e impar $[\tilde{x}(t) = -\tilde{x}(-t)]$ son imaginarios puros e impares: $c_k = -c_{-k}$.
3. Si $\tilde{x}(t)$ tiene "simetría de media onda", esto es $\tilde{x}\left(t \pm \frac{1}{2}T_0\right) = -\tilde{x}(t)$ donde T_0 es el período de $\tilde{x}(t)$, las armónicas pares de la serie de Fourier son nulas ($c_{2r} = 0$, $c_{2r+1} \neq 0$): las armónicas de la señal son los múltiplos impares de la frecuencia fundamental).

Ⓒ **Ejercicio 6.** A fines del siglo XIX, A. Michelson y S. Stratton idearon un dispositivo mecánico para síntesis armónica, es decir, para reconstruir una señal $x(t)$ a partir de un conjunto de coeficientes de Fourier c_k.



(a) (b)

1. Muestre que el sistema mecánico de la Fig. (a) permite generar la señal de desplazamiento $x(t) = x_0 + c\cos(2\pi\Omega t + \theta)$ a partir de un movimiento circular uniforme.
2. La Fig. (b) ilustra cómo sumar mecánicamente pequeños desplazamientos. La constante elástica del resorte grande es E, y la de los N resortes más pequeños es e. El extremo inferior del resorte grande se desplaza una cantidad x cuando los resortes pequeños se someten a desplazamientos $x_1, \ldots, x_N$. Muestre que la elongación del resorte grande es $L + x$ y las de los resortes pequeños es $\ell + x_k - (a/A)x, k = 1, \ldots, N$, donde L y ℓ son los estiramientos de los resortes grande y pequeños, respectivamente, cuando $x = x_1 = x_2 = \cdots x_N = 0$.
3. Sabiendo que la ecuación de balance de momentos es $\sum_{i=1}^{N}\left[\ell + x_i - \left(\frac{a}{A}\right)x\right]ea = (L + x)\,EA$, demuestre que el extremo inferior del resorte grande se desplaza

$$x = N^{-1}\left(\frac{a}{A} + \frac{\ell}{L}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

El dispositivo de Michelson y Stratton sumaba 80 desplazamientos sinusoidales $x_k(t) = c_k\cos(2\pi\Omega_k t + \theta_k), k = 1, \ldots, 80$, producidos por un sistema mecánico ligeramente más elaborado que el de la Fig. (a). El desplazamiento $x(t)$ del resorte grande se utilizaba para mover un lápiz que dibujaba la señal "reconstruida" sobre un papel.

Ejercicio 7. Uno de los problemas más difíciles que enfrentaron los antiguos astrónomos griegos fue el de predecir la posición de los planetas en el firmamento. Un modelo exitoso fue descrito por Ptolomeo en su *Almagesto*. Utilizando notación moderna, el movimiento uniforme circular de un planeta P alrededor de la Tierra T (teoría geocéntrica) está dado por

$$x_1(t) = a_1 e^{j2\pi \frac{t}{T_1}}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

donde $a_1 = |a_1|\, e^{j\phi_1}$, $0 \leq \phi_1 \leq 2\pi$, es el radio de la órbita, T_1 su período, y el parámetro ϕ_1 especifica la ubicación del planeta en $t = 0$ [Fig. (a)]. Como este modelo no puede explicar el ocasional movimiento retrógrado de los planetas exteriores (Marte, Júpiter y Saturno), se propuso el modelo más elaborado

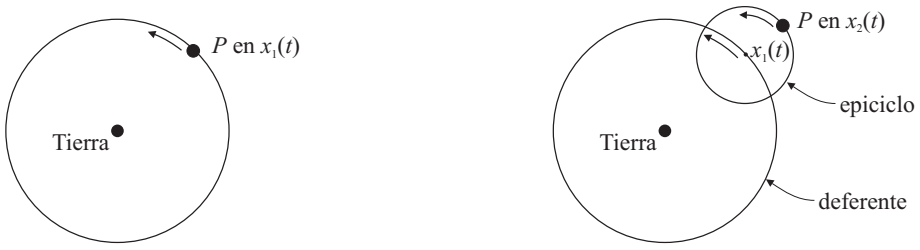
$$x_2(t) = x_1(t) + a_2 e^{j2\pi \frac{t}{T_2}},$$

con $a_2 = |a_2|\, e^{j\phi_2}$, $0 \leq \phi_2 \leq 2\pi$. El planeta P tiene un movimiento circular uniforme alrededor de un punto que, a su vez, tiene movimiento circular uniforme alrededor de la tierra T, como se muestra en la Fig. (b). Con este modelo se puede reproducir el movimiento retrógrado, pero no es suficiente para ajustar el movimiento de los planetas con los datos experimentales.

Extendiendo esta idea se propone representar el movimiento por la suma exponencial

$$x_N(t) = a_1 e^{j2\pi \frac{t}{T_1}} + a_2 e^{j2\pi \frac{t}{T_2}} + \cdots + a_N e^{j2\pi \frac{t}{T_N}}$$

utilizando un círculo fijo denominado *deferente* y $N-1$ círculos móviles denominados *epiciclos*. Tal movimiento es periódico cuando T_1, T_2, $\ldots$, T_N son múltiplos enteros de algún $T > 0$, en cuyo caso la suma es una serie de Fourier con un número finito de términos. Hiparco y Ptolomeo utilizaron una construcción usando 4 círculos para ajustar el movimiento de cada planeta, con la Tierra cerca pero no en el origen. Este modelo fue utilizado para predecir las posiciones de los cinco planetas de la antigüedad hasta que Kepler y Newton descubrieron las leyes de movimiento planetario unos 1300 años después. Lagrange fue el primero en reconocer las conexión entre el análisis de Fourier y el antiguo modelo de movimiento planetario de Hiparco y Ptolomeo.



(a) (b)

La Tierra y Marte orbitan el sol con períodos $T_T = 1$ año, $T_M = 1{,}88$ año, a una distancia media de 1 au $\doteq 150\,10^6$ km, 1,53 au $= 228\,10^6$ km, respectivamente. En este ejercicio se utilizarán las aproximaciones

$$x_T(t) = e^{j2\pi \frac{t}{1}}, \qquad x_M(t) = 1{,}5 e^{j2\pi \frac{t}{2}}, \qquad (t \text{ en años})$$

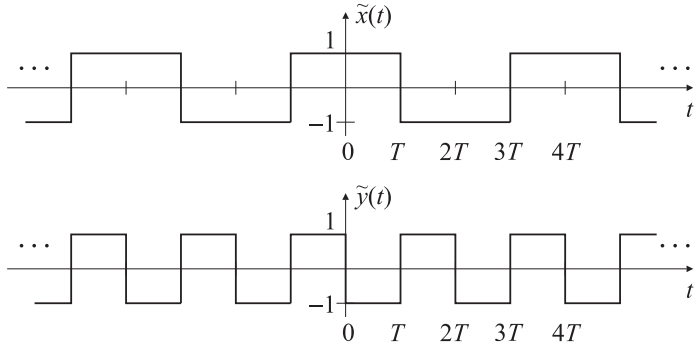
para estudiar el movimiento de Marte visto desde la Tierra.

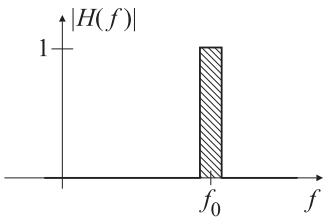
1. Dibuje círculos concéntricos con radio 1, 1.5, e indique 9 puntos marcados $A, B, \ldots, I$ ubicando la Tierra y Marte en $t = 0, 1/4, 2/4, \ldots, 8/4$ años.
2. Dibuje la órbita $x(t) = x_M(t) - x_T(t)$, $0 \leq t \leq 2$ años que muestra la posición de Marte como se ve desde la Tierra.
3. Normalmente, Marte se mueve sobre el cielo nocturno en la misma dirección que la luna. Sin embargo, hay un período de tres meses cada dos años en el cual el planeta se mueve en sentido contrario. De acuerdo a los resultados del inciso 2 explique la causa de este "movimiento retrógrado".

Ejercicio 8. Las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ son la salida y la entrada, respectivamente, de un flip-flop "T".

1. Calcule los coeficientes de Fourier $c_k^{(x)}$ y $c_k^{(y)}$ de las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$, y grafíquelos en función del número de armónico k.
2. Dibuje el espectro en frecuencia $X(f)$ e $Y(f)$ de $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$, respectivamente.
3. Un detector de tono es un filtro pasabanda muy angosto $H(f)$, como el que se muestra en la figura. ¿Puede elegir f_0 de manera de detectar $\tilde{x}(t)$ o $\tilde{y}(t)$?

Nota: para simplifcar los cálculos, aplique las propiedades de la *transformada* de Fourier.

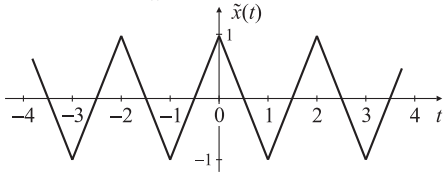




Ejercicio 9. Para la señal $\tilde{x}(t)$ que se muestra en la Fig. A,

1. Dibuje el espectro $X(f)$ sabiendo que los coeficientes $c_k^{(x)}$ de su serie de Fourier son

$$c_k = \begin{cases} 4/(\pi k)^2, & \text{si } k \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases}$$



2. Escriba la expresión del espectro de la señal $\tilde{y}(t)$ de la Fig. B
3. Calcule los coeficientes $c_k^{(z)}$ de la serie de Fourier de la señal $\tilde{z}(t)$ de la Fig. C en función de los coeficientes $c_k^{(x)}$ de la señal de la Fig. A.

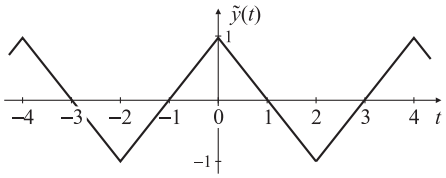


Fig. B

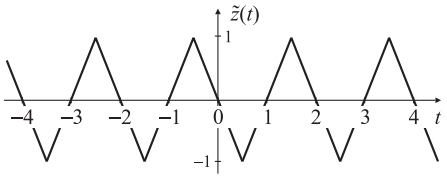
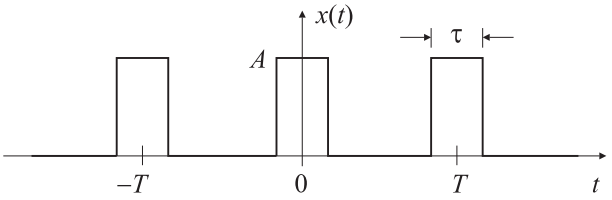


Fig. C

Ejercicio 10. Determine la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ formada por tres pulsos rectangulares que se muestra en la figura. Grafique la amplitud del espectro para $\tau \ll T$. (*Ayuda*: Considere un único pulso de amplitud A y duración τ, y utilice las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal de la Transformada de Fourier.)



Ejercicio 11. Cualquier función $x(t)$ puede descomponerse de manera única en dos componentes, una parte *par* y otra *impar*:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t),$$

donde

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \qquad x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)],$$

1. Calcule la componente par y la componente impar del pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. Calcule las transformadas de Fourier de cada una de las componentes.

Ejercicio 12. Si $X(f)$ es la transformada de Fourier de una señal $x(t)$, pruebe que:

1. El área total bajo la curva de $x(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = X(0),$$

donde $X(0)$ es el valor de $X(f)$ en $f = 0$ (el valor de "continua" de la señal).

2. El área total bajo la curva de $X(f)$ está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, df = x(0),$$

donde $x(0)$ es el valor de $x(t)$ en $t = 0$.

3. La transformada de Fourier $X(f)$ de una señal real y par $x(t)$ es real.
4. La transformada de Fourier $X(f)$ de una señal real e impar $x(t)$ es imaginaria.

Ejercicio 13. En base a los resultados del Ejercicio 12, demuestre que:

1. El área encerrada por la función sinc (ax) es $1/|a|$: $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(ax)\,dx = 1/|a|$.
2. El área comprendida bajo el pulso gaussiano $x(t) = e^{-\pi t^2}$ vale 1: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dx = 1$.
3. El área bajo la transformada de Fourier del pulso exponencial del Ejemplo 2.5 es $\beta/2$. **Nota:** compare el valor de $x(0)$ con la solución que resulta de integrar la transformada de Fourier: $\int_{-\infty}^{\infty} \beta/(\alpha + j2\pi f)df = \beta/2$. Explique la diferencia.
Comentario: "La diferencia entre una función $x(t)$ y cualquier otra funcion $\hat{x}(t)$ tal que $\hat{x}(0) \neq 1/2$ es una función nula cuya integral siempre es cero. Se fuese necesario realizar observaciones físicas de una cantidad que fluctúa según $x(t)$ o $\hat{x}(t)$, no sería posible distinguir entre ambas alternativas matemáticas, ya que las medias ponderadas sobre intervalos no nulos, que son las únicas cantidades mensurables, no se verían afectadas por la presencia o ausencia de funciones nulas. Para las aplicaciones físicas de $x(t)$ es posiblemente más elegante no mencionar $x(0)$." [15]

Ejercicio 14. Calcule la transformada de Fourier (en módulo y fase y parte real-parte imaginaria) de la siguientes funciones. En todos los casos, suponga $\alpha > 0$.

1. $x(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

2. $x(t) = \begin{cases} k, & -T_0 < t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ -k, & 0 < t < T_0. \end{cases}$

3. $x(t) = Ae^{-\alpha|t|}$.

Ejercicio 15. Calcule la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones. Antes de resolver este ejercicio, es conveniente resolver el Ejercicio 14.

1. $X(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$.
2. $X(f) = \frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$. [recuerde que $\mathcal{F}(x_1 * x_2) = \mathcal{F}(x_1) \cdot \mathcal{F}(x_2)$]
3. $X(f) = 2AT_0 \text{ sinc}(2T_0 f)$, usando los resultados del Ejercicio 13.1.

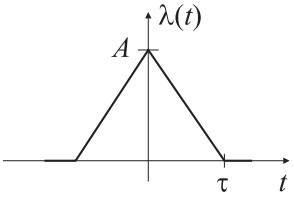
Ejercicio 16. Demuestre que el espectro del pulso exponencial creciente definido por

$$x(t) = \begin{cases} \beta e^{\alpha t}, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

con $\alpha > 0$ tiene el mismo módulo y fase opuesta a la del pulso del Ejercicio 14.1. Explique este comportamiento en base a la propiedad de escalado en tiempo de la Transformada de Fourier.

[15] R. Bracewell, *The Fourier Transform and its applications*, 2da. ed., McGraw-Hill, New York, 1978, p. 61.

(I) **Ejercicio 17.** Calcule la transformada de Fourier del pulso triangular $\lambda(t)$ de la figura a partir de la convolución de dos pulsos rectangulares $r(t)$, cuya transformada de Fourier es conocida (Ejemplo 2.10).



1. Especifique claramente los pulsos (amplitud y duración) $r(t)$ tal que $\lambda(t) = r(t) * r(t)$.
2. Escriba la transformada de Fourier $R(f)$ de los pulsos $r(t)$.
3. Con estos resultados calcule $\Lambda(f)$, la transformada de Fourier de $\lambda\,(t)$.
4. A partir de los resultados del inciso anterior, calcule la transformada de Fourier $\Lambda\,(\Omega)$ del pulso triangular $\lambda\,(t)$ en función de la frecuencia angular Ω.

Ejercicio 18. Aplicando propiedades, determine la transformada de Fourier de la señal $x\,(t) = u\,(t)\cos\,(2\pi f_0 t)$, donde $u\,(t)$ es la función escalón unitario.

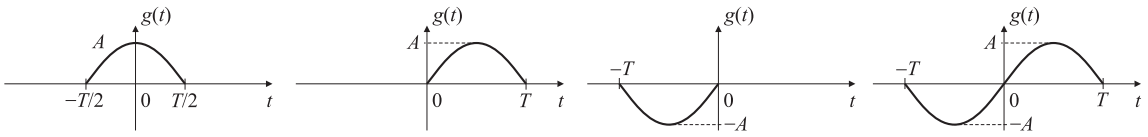
Ejercicio 19. Dibuje la señal $x\,(t) = A\,\text{sen}(2\pi f_0 t)$, y calcule y grafique su espectro $X(f)$. A partir de este par transformado, dibuje las señales y calcule (tanto por definición como aplicando propiedades) y grafique los espectros de:

1. $x_1(t) = A\,\text{sen}[2\pi(2f_0 t)]$.
2. $x_2(t) = A\,\text{sen}[2\pi(3f_0 t)]$.

Ejercicio 20. Si $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, muestre que $\mathcal{F}\,\{\mathcal{F}\,\{\mathcal{F}\,\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}\}\} = x(t)$.

Ejercicio 21. Para la señal que se ilustra en la figura,

1. calcule la transformada de Fourier $G(f)$ del medio pulso coseno de la Fig. (a) ;
2. aplique la propiedad de desplazamiento temporal al resultado del inciso anterior para calcular la transformada de Fourier del medio pulso seno de la Fig. (b) ;
3. determine el espectro de un pulso medio seno cuya duración sea aT, $a > 0$;
4. determine el espectro del pulso medio seno negativo que se muestra en la Fig. (c) ;
5. calcule el espectro del pulso seno que se observa en la Fig. (d) .



(a) (b) (c) (d)

Ⓒ **Ejercicio 22.** La función $c(t)$ del Ejercicio 2 se conoce como *función generadora* de $\tilde{x}(t)$.

1. Determine la transformada de Fourier de la función generadora $c(t)$.
2. Calcule la transformada de Fourier de $\tilde{x}(t)$ aplicando propiedades. Compare sus resultados con los del Ejercicio 2.

Ejercicio 23. Sabiendo que el pulso gaussiano es su propio par transformado, $x(t) = e^{-\pi t^2} \Leftrightarrow X(f) = e^{-\pi f^2}$, utilice la propiedad de escalado en tiempo para demostrar que

$$y(t) = \left(\sqrt{2\pi}\tau\right)^{-1} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = e^{-2\pi^2\tau^2 f^2}.$$

Ⓒ **Ejercicio 24.** Usando las Propiedades de derivación temporal y frecuencial y las definiciones de la transformada de Fourier en función de la frecuencia angular Ω, demuestre que la función temporal $h(t)$ cuya expresión matemática coincide con su transformada $H(\Omega)$ es $h(t) = ke^{-\frac{1}{2}t^2}$.

Ⓘ **Ejercicio 25.** En el Ejemplo 2.36 se mostró que la transformada del pulso gaussiano $x(t) = e^{-\pi t^2}$ coincide con $x(t)$. Esto es, si $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, entonces $x(t) = X(f)|_{f=t}$. Para simplificar la notación y evitar confusiones, es conveniente definir la transformada como un operador $\mathcal{F} : C \to C$, donde C es un espacio de funciones apropiado, tal que $\mathcal{F} : x(\cdot) \mapsto \mathcal{F}\{x(\cdot)\}$, donde $\mathcal{F}\{x(\cdot)\}$ se define como

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)e^{-j2\pi t\sigma} d\sigma.$$

Si $x(t)$ es el pulso gaussiano, $x(t) = e^{-\pi t^2}$, se verifica que $x(.) = \mathcal{F}\{x(.)\}$. Esta idea se puede generalizar, y si la función $x(\cdot)$ satisface

$$x(\cdot) = \lambda\mathcal{F}\{x(\cdot)\}$$

para un único $\lambda \in \mathbb{C}$, se dice que $x(\cdot)$ es una *autofunción* de la transformada de Fourier, por analogía con la definición de autovector: $\mathbf{v}$ es un autovector de la matriz $\mathbf{A}$ si $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Entonces el pulso gaussiano es una autofunción de la transformada de Fourier, con $\lambda = 1$. En este problema se investiga la existencia de otras autofunciones.

1. Pruebe que la función constante $x(t) = 0$ para todo t es una autofunción. ¿Cuál es el autovalor λ?
   Nota: como el autovalor no es único, en este caso no se reconoce $x(t) = 0$ como una autofunción, de la misma manera que el vector nulo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ no se reconoce como un autovector aunque $\mathbf{A0} = \lambda\mathbf{0}$ para cualquier λ.
2. Demuestre que el tren de impulsos

   $$p(t) = \sum_r \delta(t - rT)$$

   es una autofunción. ¿Cuál es el autovalor λ?

3. Encuentre para qué valores no nulos de α, β, γ y ε la función $x(t) = \alpha \operatorname{sinc}(\gamma t) + \beta r(\varepsilon t)$ es una autofunción, donde $r(t)$ es el pulso rectangular definido por

$$r(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

4. Generalice el resultado anterior para una función $y(t) = \alpha x(t) + \beta \mathcal{F}\{x(t)\}$: encuentre para qué valores de α y β la función $y(\,\cdot\,)$ es una autofunción de la transformada de Fourier, $y(\,\cdot\,) = \mathcal{F}\{y(\,\cdot\,)\}$.

Ejercicio 26. Para el sistema lineal $\mathcal{S}$ con respuesta impulsiva $h_\tau(t) = \alpha e^{-\beta t} e^{\gamma\tau} u(t-\tau)$, con $t \geq \tau \geq 0$, y $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

1. Determine si es invariante en el tiempo para (*i*) $\gamma = \beta$, y (*ii*) $\gamma \neq \beta$.
2. Calcule y grafique la respuesta $y_1(t)$ del sistema ante una entrada escalón $x_1(t) = u(t)$ cuando (*i*) $\gamma = \beta = 1$, (*ii*) $\gamma = 2\beta = 2$ y (*iii*) $\gamma = -2\beta = -2$.
3. Repita el inciso anterior para una entrada $x_2(t) = u(t-1)$ cuando (*i*) $\gamma = \beta = 1$, (*ii*) $\gamma = 2\beta = 2$ y (*iii*) $\gamma = -2\beta = -2$.

Ejercicio 27. Demuestre el Teorema del ancho de banda para funciones absolutamente integrables cuando la transformada de Fourier se expresa en función de la frecuencia angular Ω. Esto es, si $h(t)$ tiene transformada de Fourier $H(\Omega)$, con duración efectiva Δt y ancho de banda $\Delta\Omega$,

$$\Delta t \Delta\Omega \geq 2\pi.$$

Ⓒ **Ejercicio 28.** Demuestre que para el pulso gaussiano $x(t) = Ce^{-\alpha t^2}$, con $\alpha > 0$, se verifica la *igualdad* del teorema del ancho de banda para funciones de energía finita:

$$\Delta t \Delta f = 1/(4\pi).$$

Ejercicio 29. Un rectificador de onda completa es un dispositivo tal que su respuesta $y(t)$ ante una entrada $x(t)$ es $y(t) = |x(t)|$. Si $x(t)$ es una señal modulada en amplitud,

$$x(t) = f(t) \operatorname{sen} \Omega_0 t,$$

donde $f(t) \geq 0$ es la señal *moduladora*, y la señal $\operatorname{sen} \Omega_0 t$ es la *portadora*, muestre que la salida del rectificador de onda completa es

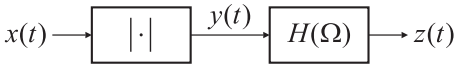
$$Y(\Omega) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(\Omega - 2k\Omega_0)}{4k^2 - 1},$$

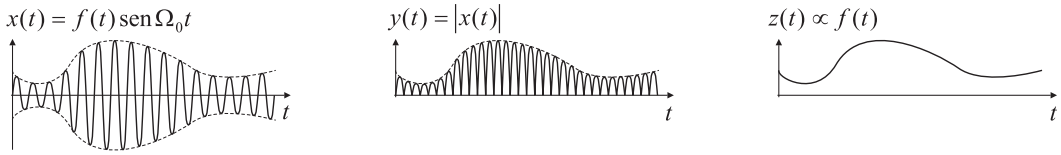
donde $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$. **Ayuda:** La expresión en series de Fourier de $|\operatorname{sen} \Omega_0 t|$ es

$$|\operatorname{sen} \Omega_0 t| = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2k\Omega_0 t}}{4k^2 - 1}.$$

(I) **Ejercicio 30.** La *demodulación* de la señal modulada en amplitud $x(t) = f(t)\,\mathrm{sen}\,\Omega_0 t$ es el proceso de recuperar $f(t)$ a partir de $x(t)$. Un demodulador sencillo se obtiene conectando en cascada un rectificador de onda completa como el del Ejercicio 29 con un filtro pasabajos ideal $H(\Omega)$ con frecuencia de corte Ω_0,

$$H(\Omega) = \begin{cases} A_0 e^{-j\Omega t_0}, & \text{si } |\Omega| < \Omega_0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

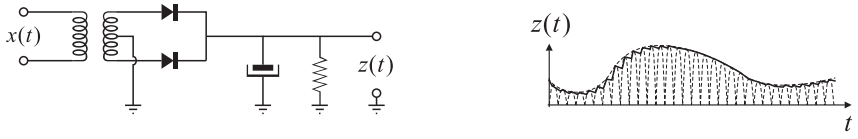




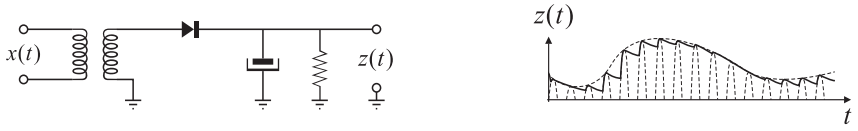
Muestre que, si $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, y si $F(\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_0$, la salida $z(t)$ del filtro pasabajos coincide, salvo un factor de escala, con la señal $f(t)$:

$$z(t) = \frac{2}{\pi} A_0 f(t - t_0).$$

Observación: Los demoduladores de las radios de AM siguen este principio, aunque en lugar de utilizar un rectificador de onda completa en cascada con un filtro pasabajos implementan un detector de pico con pérdida, como se muestra en la figura.



Como usualmente la frecuencia Ω_0 de la señal portadora (entre 500 kHz y 1600 kHz) es mucho más elevada que el ancho de banda de la señal $f(t)$ (aproximadamente 5 kHz) se suele utilizar un rectificador de media onda, a costa de un pequeño aumento de la distorsión.



Ejercicio 31. Observadas desde una distancia normal de lectura las 101 barras negras separadas por 100 barras blancas de la rejilla que se muestra en la figura se distinguen perfectamente. A una distancia suficiente, la rejilla se observa como un rectángulo uniforme de color gris.



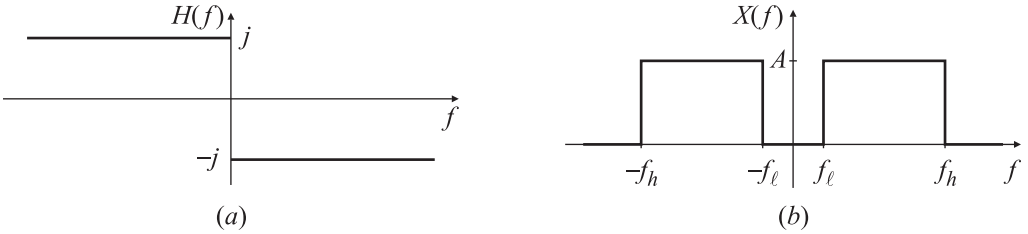
1. Determine experimentalmente la distancia D a la cual su ojo puede resolver las barras, tanto en posición horizontal como vertical.
2. El ojo tiene un ancho de banda de $2B$. Utilice el resultado del inciso anterior para determinar B (en ciclos por radianes).
3. A la distancia normal de lectura, el ojo es capaz de percibir los pixeles del retrato de Fourier. Sin embargo,a una distancia apropiada aparece como una imagen bien detallada. Utilice los resultados del inciso 1 para predecir la distancia donde ocurre esta transición... y luego confirme (o no) su predicción de manera experimental.



Ejercicio 32. Un *Transformador de Hilbert* es un sistema cuya respuesta en frecuencia es

$$H(f) = \begin{cases} j, & -\infty < f < 0, \\ -j, & 0 \le f < \infty. \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. (a) .



1. Determine la respuesta impulsiva $h(t)$ de este sistema. **Ayuda:** Aplique propiedades y los resultados del Ejemplo 2.7.
2. Calcule, *tanto en el dominio tiempo como en el dominio frecuencia*, la salida $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ del Transformador de Hilbert cuando se lo excita con la señal $x(t) = A/(2\pi t)[\text{sen}(2\pi f_h t) - \text{sen}(2\pi f_\ell t)]$. **Ayuda**: muestre que el espectro de la señal $x(t)$ está dado por

$$X(f) = \begin{cases} A, & -f_h < f < -f_\ell, \\ A, & +f_\ell < f < +f_h, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde $0 < f_\ell < f_h$, como se muestra en la Fig. (b) . Las señales con espectros de esta forma se denominan tipo *pasabanda*.

3. Grafique el espectro de la entrada $x(t)$ y la salida $\hat{x}(t)$ del Transformador de Hilbert.

4. Una *señal analítica* $x_a(t)$ se define como

$$x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t).$$

donde $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ son la entrada y la salida del Transformador de Hilbert, respectivamente. Grafique el espectro de la señal $x_a(t)$. ¿Cuál es su característica distintiva?

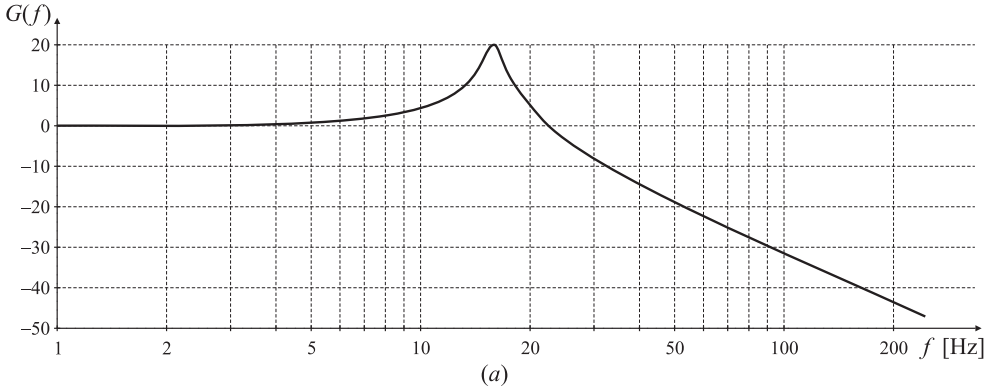
5. Si $x(t)$ es una señal arbitraria, calcule $y(t) = \mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\}$.

Ejercicio 33. El sistema de suspensión de un automóvil se puede modelar con la función transferencia

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{10^4}{s^2 + 10s + 10^4}$$

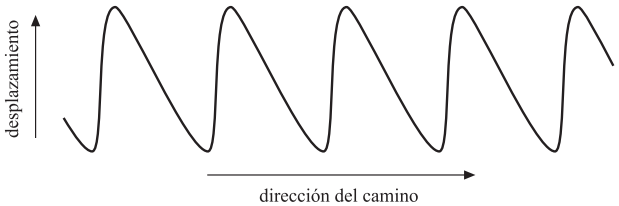
considerando como entrada el desplazamiento vertical de la rueda, y como salida la posición de la carrocería. La Fig. (a) muestra el gráfico de la respuesta en frecuencia; el amortiguamiento $\zeta = 0{,}05$ indica que el estado de la suspensión no es muy bueno. Este automóvil circula por una ruta de tierra con ondulaciones, como las que se muestran en la Fig. (b) , compuestas por una serie de crestas elevadas sobre la superficie de la ruta en sentido ortogonal a la misma, Fig. (c). Se producen por la interacción inestable entre los vehículos y la deformación del material del camino. Una vez que alcanzan cierta relación base/altura se estabilizan porque los picos se aplastan al mismo tiempo que se elevan los bordes.

1. Si el auto se desplaza a una velocidad de v m/s, y la distancia entre las ondulaciones es de d metros, muestre que la frecuencia en Hz del desplazamiento de las ruedas es v/d Hz.



(a)


(b)



(c)

2. Si las ondulaciones están separadas $d = 5$ m entre sí, y el vehículo se desplaza a una velocidad $v_1 = 5$ m/s (18 Km/h), determine la frecuencia de la excitación causada

por las ondulaciones, y el desplazamiento vertical de la carrocería como múltiplo de la altura de la ondulación. (Como no interesa el valor exacto del multiplicador, este inciso puede resolverse usando la gráfica de la respuesta en frecuencia.)

3. Repita los cálculos para velocidades $v_2 = 10$ m/s, $v_3 = 30$ m/s, $v_4 = 50$ m/s. Comente sus resultados.

4. Utilice la ecuación de la función transferencia para encontrar el desplazamiento del vehículo debido a las ondulaciones cuando la velocidad es $v_5 = 100/(2\pi)$ m/s (aproximadamente 57 Km/h).

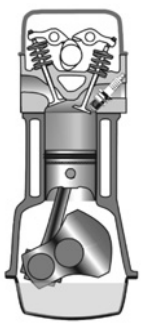
5. Comente sobre la mejor estrategia para de transitar sobre una carretera con ondulaciones de modo de minimizar los impactos sobre los ocupantes del vehículo. ¿Cuál es el inconveniente?

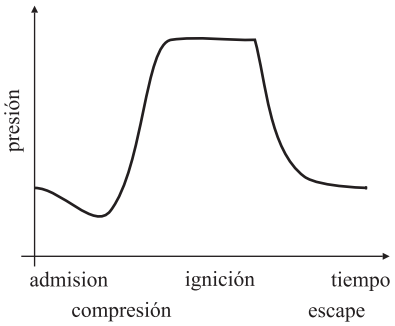
6. De la figura se observa que las ondulaciones no son puramente sinusoidales, sino que se asemejan a una onda triangular, y por lo tanto el espectro de los desplazamientos tendrá componentes armónicas. Explique cómo se manifiestan estas armónicas cuando el auto se desplaza a distintas velocidades sobre la ruta.

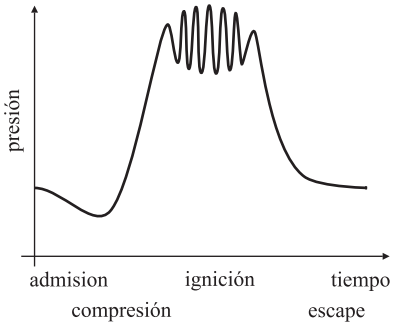
7. El cuerpo humano es mucho más sensible a la aceleración que a los desplazamientos. Describa cómo modificar la función transferencia para estudiar estos efectos, y discuta cómo cambian los resultados de los incisos anteriores.

Ejercicio 34. La Fig. (a) muestra la sección de un motor de cuatro tiempos. El ciclo de trabajo distingue cuatro etapas, denominadas:

- **admisión**: durante la cual se inyectan aire y combustible en el cilindro, mientras el pistón está en la posición inferior;
- **compresión**: en la que se comprime la mezcla de aire y combustible elevando el pistón, con las válvulas cerradas;
- **combustión**: cuando se produce la ignición de la mezcla por la chispa de la bujía, y la expansión de los gases de escape fuerza el cilindro hacia la posición inferior;
- **escape**: en la que se abren las válvulas y el movimiento ascendente del pistón provoca la salida de los productos de combustión.







(a) (b) (c)

La Fig. (b) muestra la variación de la presión en el cilindro en función del tiempo cuando el motor funciona correctamente. La Fig. (b) muestra la variación en el tiempo de un motor que *ratea*, provocado por el encendido prematuro de la mezcla de aire y combustible y rápidas oscilaciones de la presión en la transición entre la compresión y la ignición. El *rateo* reduce la eficiencia del motor, y disminuye la vida útil del motor. Se desea diseñar un método para detectar el rateo examinado la señal de presión en el cilindro. Como el ciclo de trabajo del motor se repite en el tiempo, puede pensarse que la señal de presión es periódica, y por lo tanto se puede descomponer en series de Fourier.

1. Si el período del ciclo es T, se aproxima la señal de presión por la onda cuadrada definida en un período por

$$p(t) = \begin{cases} p_0, & t \in [0, T/2), \\ 21p_0, & t \in [T/2, 3T/4), \\ p_0, & t \in [3T/4, T). \end{cases}$$

   Muestre que los coeficientes de la serie de Fourier compleja están dados por $c_0 = 6p_0$ si $k = 0$, y

$$c_k = j\frac{10p_0}{\pi k}e^{-j\pi k}(e^{-j\frac{\pi k}{2}} - 1) = j\frac{10p_0}{\pi k}(-1)^k[(-j)^k - 1] = \frac{20p_0}{\pi k}e^{j\frac{3\pi}{4}k}\,\text{sen}(\pi k/4),$$

   si $k \neq 0$.

2. La señal de presión del motor con *rateo* se aproxima por

$$p_r(t) = \begin{cases} p_0, & t \in [0, T/2), \\ 21p_0 + 4p_0\cos(2\pi 24t/T), & t \in [T/2, 3T/4), \\ p_0, & t \in [3T/4, T). \end{cases}$$

   en un período. Esta señal es esencialmente la misma que $p(t)$, con el agregado de un término aditivo $4p_0\cos(2\pi 24t/T)$ durante el intervalo $t \in [T/2, 3T/4)$. Muestre que los coeficientes de la serie de Fourier de este término aditivo están dados por

$$d_k = \frac{2p_0}{T}\int_{T/2}^{3T/4}\left[e^{j\frac{2\pi}{T}(24-k)t} + e^{j\frac{2\pi}{T}(24+k)t}\right]dt.$$

3. Calcule d_{24}, y demuestre que el resto de los términos se comporta como $[1/(24-k) + 1/(24+k)]$.

4. Explique cómo usaría los coeficientes de las series de Fourier calculadas en los incisos anteriores para distinguir entre un motor que ratea y otro que no.

Ⓜ **Ejercicio 35. Problema para resolver con Matlab** **Fecha de entrega: 30/03/12**

Una señal T-periódica $\tilde{x}(t)$ se aplica a un filtro pasabajos ideal de ancho de banda $f_N = (N + \frac{1}{2})/T$. El efecto del filtro es anular todas las componentes armónicas de frecuencia superior a f_N. La Fig. 2.89 muestra el espectro de la señal de entrada $\tilde{x}(t)$, la respuesta en frecuencia del filtro, y el espectro de la señal de salida $\tilde{x}_f(t)$.

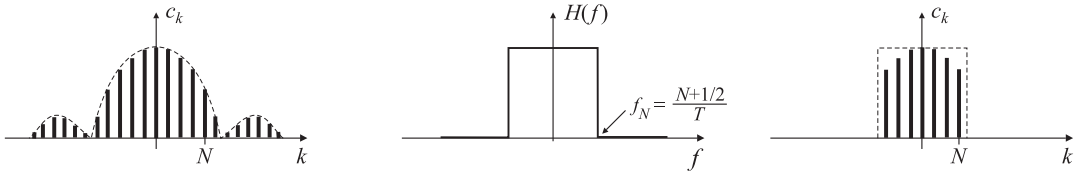


Fig. 2.89. Espectro de la entrada, respuesta en frecuencia, y espectro de la salida del filtro.

Si la señal $\tilde{x}\,(t)$ se representa por su serie de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

a la salida del filtro sólo se observan las N primeras armónicas, de manera que la señal de salida $\tilde{x}_f(t)$ se puede escribir como

$$\tilde{x}_f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}.$$

Si el filtro es muy angosto, por ejemplo si tiene una frecuencia de corte $f_1 = 3/(2T)$, sólo permite el paso de la componente de continua y de la primera armónica de la señal. A medida que se aumenta el ancho de banda del filtro, crece el número de componentes armónicas presentes en la señal de salida, y ésta se parece cada vez más a la señal de entrada. En el límite, si $f_N \to \infty$, el filtro se comporta como un cable (no filtra nada) y la señales de entrada y salida son idénticas.

El propósito de este ejercicio es determinar el ancho de banda del filtro que asegure que la diferencia entre la señal de entrada y salida no supere una determinada cota. Hay varias maneras de medir la diferencia entre dos señales, y para este ejercicio se consideran dos:

- el *error medio cuadrático*, definido por

$$e_2 = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_2 = \left(\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_f(t)|^2 d\,t\right)^{1/2},$$

- el *error máximo*, que se calcula como

$$e_\infty = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_\infty = \max_{t\in[-\tau/2,\tau/2]} \left|\tilde{x}\,(t) - \tilde{x}_f\,(t)\right|.$$

Para el caso de señales periódicas, es habitual elegir τ igual al período T de la señal. Además, aplicando propiedades (¿cuáles?) la integral de la expresión del error medio cuadrático puede reemplazarse por una sumatoria.

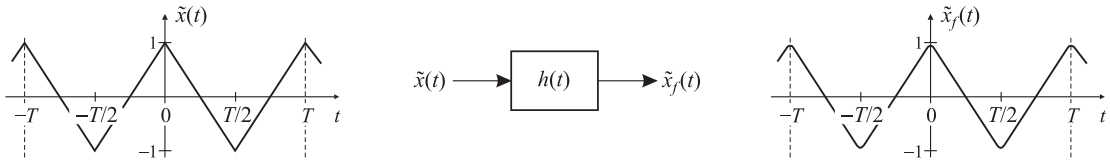


Fig. 2.90. Procesamiento de una forma de onda triangular por un filtro ideal.

1. Para la señal triangular de la Fig. 2.90, definida en un período por

$$\tilde{x}(t) = 1 - 4\left|\frac{t}{T}\right|, \quad |t| < T/2,$$

1. *a*) Calcular analíticamente los coeficientes de Fourier c_k, donde

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}\,(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt.$$

   b) Graficar el módulo y fase de los coeficientes c_k en función del número de armónico k.

   c) Usando MATLAB, computar 2 períodos de la salida $\tilde{x}_f(t)$ del filtro usando los coeficientes calculados en el inciso (a). Adopte $T = 1$, $N = 4, 8, 16, 20, 50, 100$. **Nota:** Para poder graficar adecuadamente la respuesta temporal, en MATLAB se debe definir un "vector de tiempos" de resolución suficiente para que los resultados sean significativos. Por ejemplo, `t` $= [$`0 : dt : 2T`$]$, con `dt` $=$ `2T/K`, donde K es un entero apropiado. ¿Por que?

   d) Determinar el ancho de banda f_{N_2} del filtro (i.e. el mínimo valor de N_2) que asegura que el error medio cuadrático entre las señales de entrada y la salida es inferior al 5 %:

$$e_2 = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_2 = \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_f(t)|^2 d\,t\right)^{1/2} < 0{,}05.$$

   Aplicar las propiedades sugeridas más arriba para reemplazar el cálculo de la integral por una sumatoria.

   e) Encontrar el ancho de banda f_{N_∞}del filtro (i.e. el mínimo valor de N_∞, que seguramente será distinto a N_2) que asegura que el error máximo entre las señales de entrada y la salida es inferior al 5 %:

$$e_\infty = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_\infty = \max_{t\in[-T/2,T/2]} \left|\tilde{x}\,(t) - \tilde{x}_f\,(t)\right| < 0{,}05.$$

2. Repetir el inciso anterior para la señal $\tilde{x}(t)$ de la Fig. 2.91 definida en un período por

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/4, \\ 0, & T/4 < |t| < T/2. \end{cases}$$

3. Comparar la forma de onda calculada con MATLAB en los incisos previos con la salida de un filtro lineal, causal, e invariante en el tiempo, que se puede simular con el ambiente que se muestra en la Fig. 2.92(a). Elaborar sobre las similitudes y diferencias entre estos resultados. (Esta aplicación puede descargarse desde la página web de la materia.)

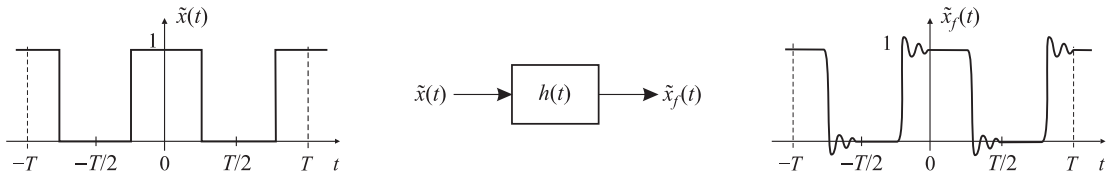
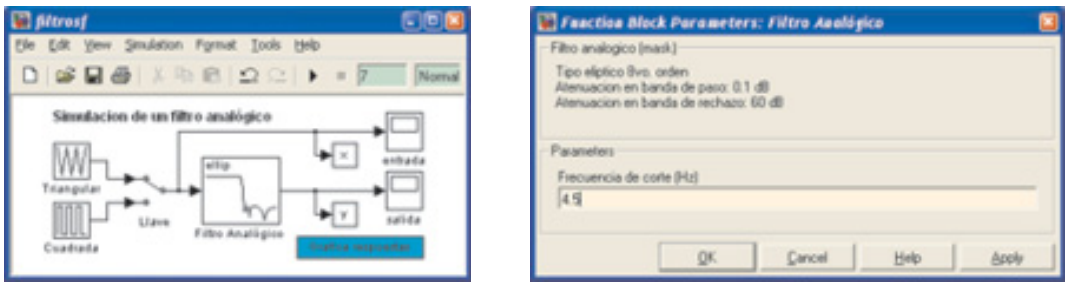


Fig. 2.91. Procesamiento de una forma de onda cuadrada por un filtro ideal.

Este filtro es de tipo elíptico de orden 8, con una atenuación máxima en la banda de paso de 0.1 dB, y una atenuación mínima en la banda de rechazo de 60 dB. La frecuencia de corte del filtro se elije con la caja de diálogo de la Fig. 2.92(b), que aparece al "clickear" dos veces sobre el bloque del filtro analógico. El módulo de la respuesta en frecuencia, que se representa en la Fig. 2.93 para distintas frecuencias de corte, es bastante parecido al de un filtro ideal.

Observaciones

- Adjuntar el código escrito para obtener las respuestas.
- Como parte del propósito del ejercicio es reforzar los conocimientos de MATLAB, tratar de resolver el problema evitando el empleo de ciclos `for ... next`, que son de ejecución muy lenta, empleando en cambio producto de matrices.



(a) (b)

Fig. 2.92. Ambiente de simulación de un filtro analógico (a). Especificación de la frecuencia de corte del filtro (b).

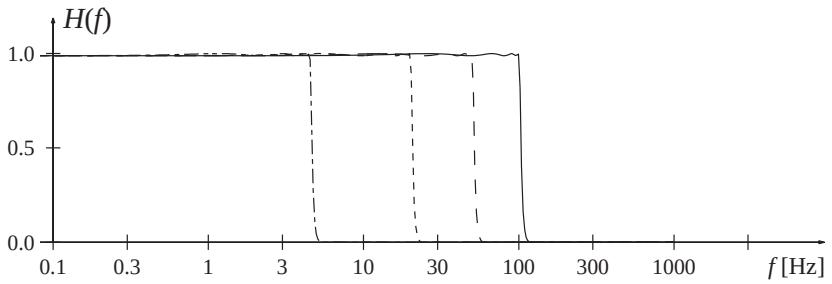


Fig. 2.93. Respuesta en frecuencia del filtro elíptico con $f_N = 4{,}5$ Hz $(-\cdot)$, 20 Hz (--), 50 Hz $(--)$ y 100 Hz $(—)$.

Ⓜ **Ejercicio 36. Problema para resolver con Matlab** **Fecha de entrega: 5/04/13**

En la Fig. 2.94(a) se muestra una señal periódica triangular $\tilde{x}(t)$, de período T. En la Fig. 2.94(b) se muestra una señal $\tilde{y}(t)$ similar, de período MT. En esta nueva señal, la distribución de los pulsos no es uniforme. Se ha construido desplazando ligeramente $M-1$ pulsos respecto de su posición en la señal original: en lugar de estar ubicados en $t = nT$ para $0 \leq n \leq (M-1)T$ (dentro del período $0 \leq t \leq MT$) están ubicados en $t = t_n$, donde

n	0	1	2	3	4	5
t_n	0	$1{,}14T$	$2{,}45T$	$3T$	$3{,}56T$	$5{,}37T$

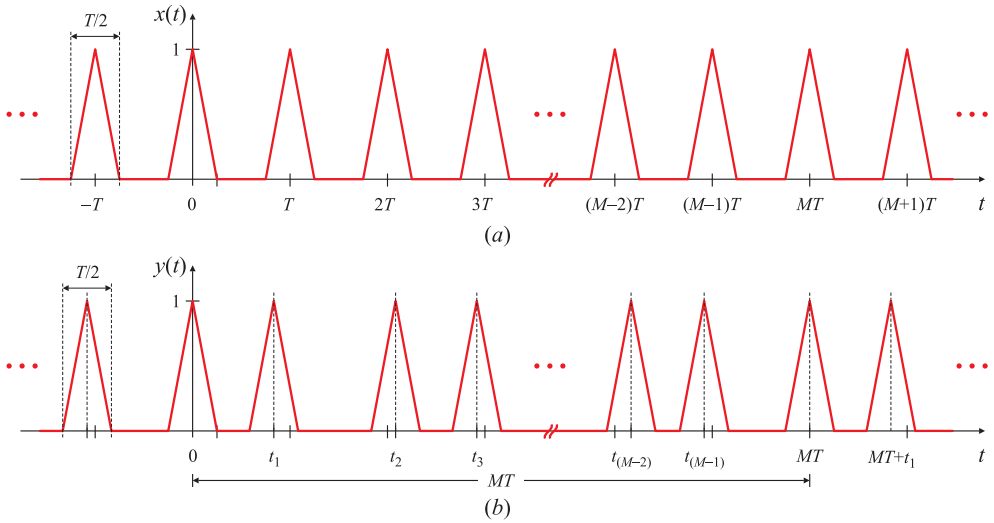


Fig. 2.94. Señal original con distribución uniforme de los pulsos (a) y modificada, con distribución no uniforme (b). (La figura no corresponde con los datos de la tabla.)

1. Calcule y compare la energía promedio (potencia) de ambas señales: $E_p^x = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)\,dt$.
2. Calcule los coeficientes c_k^x, c_k^y de las series de Fourier de las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ para $M = 6$.
3. Utilizando MATLAB, y a partir de los resultados del inciso anterior, grafique los espectros $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$, $\mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$ en una misma figura, para $-6/T < f < 6/T$, como se muestra en la Fig. 2.95. Puede utilizar, por ejemplo, el comando `stem`.
4. Reconstruya las señales $\hat{x}(t)$ e $\hat{y}(t)$ para el rango de frecuencias especificado más arriba. Utilice $T = 1/50$, y elija un vector de tiempos `t = (0:8191)/8192`.
5. Grafique un segmento de las señales temporales, para $0 \leq t \leq 10T$, como se representa en la Fig. 2.95, y verifique que el corrimiento de los pulsos de $\hat{y}(t)$ coinciden con los especificados en la tabla.
6. Utilizando el comando `sound`, escuche cómo se oyen $\hat{x}(t)$ e $\hat{y}(t)$. Relacione con los resultados del inciso 3.

Verifique que las señales reconstruidas en los incisos 4 a 6 sean reales (no complejas). Si no lo fuesen, revise que la magnitud de la parte imaginaria es mucho menor que la de la parte real (comandos `imag`, `real`), y aproxime la señal por su parte real o su módulo (comando `abs`).

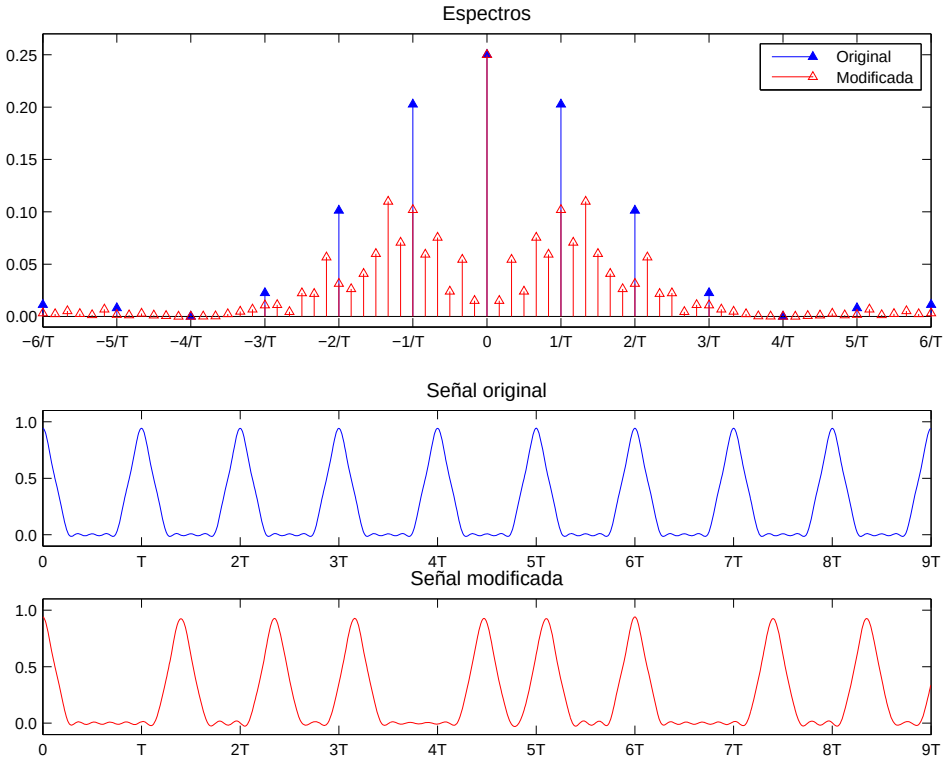
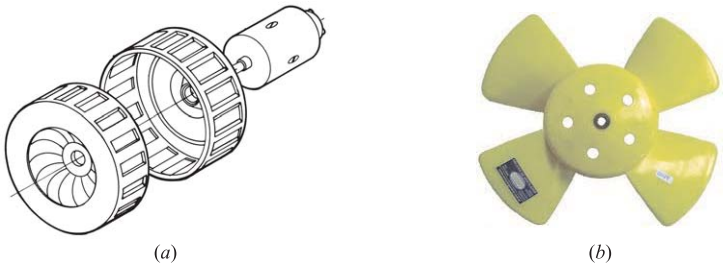


Fig. 2.95. Figura de Matlab donde se muestra el espectro de las señales (panel superior) y las formas de ondas temporales de la señal orginal y la señal modificada (paneles inferiores). Esta figura no corresponde a los datos consignados en la tabla.

Este problema modela la solución adoptada en el diseño de los electroventiladores del radiador de los autos para reducir el nivel de ruido en el habitáculo. En lugar de utilizar un ventilador con aspas equiespaciadas, se utilizan diseños como el que se muestra en la Fig. 2.96(b). En este problema la posición de las aspas está representada por la ubicación de cada pulso. La señal $\tilde{x}(t)$ representa un ventilador con aspas equiespaciadas, mientras que la señal $\tilde{y}(t)$ uno con distribución no uniforme. El Fiat 128 fue uno de los primeros vehículos en adoptar esta solución en Argentina, alrededor de 1971. Las sirenas mecánicas de advertencia ante emergencias también se basan en este principio [Fig. 2.96(a)].



(a) (b)

Fig. 2.96. Despiece de una sirena (aspas con distribución uniforme) (a), y electroventilador de un Fiat 128 (aspas con distribución no uniforme) (b).

A

Convergencia y existencia de la serie de Fourier

A.1. Convergencia de la serie de Fourier*

Posiblemente una de las mayores controversias respecto al desarrollo de Fourier fue su afirmación que *cualquier* función periódica "razonable" podía aproximarse por la serie (2.19). No fue trivial demostrar que esta afirmación es falsa, en parte debido a que muchos conceptos matemáticos (como el de *función*) no habían sido definidos correctamente en ese entonces. Pero sí es cierto que una clase muy grande de funciones periódicas –incluyendo entre ellas funciones continuas a tramos– puede aproximarse de esta forma.

La notación utilizada hasta el momento, por ejemplo en la ecuación (2.19), supone que la serie de Fourier converge a la función. En esta sección es conveniente distinguir la función periódica $\tilde{x}(t)$ de su serie $\sum_k c_k e^{jk\Omega_0 t}$, que notaremos $\tilde{x}_\infty(t)$; esto es

$$\tilde{x}_\infty(t) = \sum_k c_k e^{jk\Omega_0 t}. \tag{A.1}$$

La expresión (A.1) debe entenderse como el límite doble de las sumas parciales $\tilde{x}_{M,N}(t)$ definidas por

$$\tilde{x}_{M,N}(t) = \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t}. \tag{A.2}$$

Por lo tanto la ecuación (A.1) puede escribirse como

$$\tilde{x}_\infty(t) = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \tilde{x}_{M,N}(t) = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t}. \tag{A.3}$$

Esta sumatoria doblemente infinita plantea dos interrogantes:

1. La existencia de (A.3) para cualquier valor de t: si t_0 es un valor particular de t, se desea saber si la serie converge a un número finito para cualquier valor de t_0. Si esto ocurre, $\tilde{x}_\infty(t)$ es realmente una función, y permite formular la segunda (y más interesante) cuestión:

2. La identidad de la función periódica $\tilde{x}(t)$ y su serie de Fourier $\tilde{x}_\infty(t)$. Si la serie converge a $\tilde{x}(t)$ significa que

$$\tilde{x}_\infty(t) = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \tilde{x}_{M,N}(t) = \tilde{x}(t) \quad \text{para todo } t.$$

Si la serie no converge, significa que existen puntos t_i tal que

$$\tilde{x}_\infty(t) = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \tilde{x}_{M,N}(t) \neq \tilde{x}(t_i).$$

El siguiente teorema, clásico del análisis de Fourier, resuelve estas inquietudes.

Teorema 1. Teorema básico de convergencia puntual. Si $\tilde{x}(t)$ es una señal periódica, continua a tramos y suave a tramos sobre un intervalo (a, b), entonces:

- si $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ es continua en $t_0 \in (a, b)$, $s_x(t_0)$ converge a $\tilde{x}(t_0)$; esto es

$$\sum_k c_k e^{jk\Omega_0 t_0} = \tilde{x}(t_0).$$

- si $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ tiene una discontinuidad tipo salto en $t_0 \in (a, b)$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t_0} = \frac{1}{2}\left[\lim_{t\to t_0^-} \tilde{x}(t) + \lim_{t\to t_0^+} \tilde{x}(t)\right] \qquad \blacklozenge$$

El teorema establece que la serie de Fourier compleja de una función periódica se comporta "adecuadamente", al menos sobre intervalos donde la función es continua y suave a tramos. En cada punto de ese intervalo la serie converge exactamente al valor de la función en ese punto (por eso se dice que la convergencia es *puntual*). En aquellos puntos donde la función presenta saltos (finitos, porque se exige que sea *suave a tramos*) se tiene una convergencia *simétrica* de la serie al valor medio de los límites a izquierda y a derecha de la función en el punto de discontinuidad. Gráficamente, este valor es el punto medio del salto. La convergencia simétrica se entiende en el sentido que la variable k tiende a $(+\infty)$ y a $(-\infty)$ a la misma velocidad.

El Teorema 1 muestra que siempre que $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ sea suave a tramos y periódica, la función $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ y la serie de Fourier $\tilde{x}_\infty(t)$ representan la misma función continua a tramos sobre toda la línea real, confirmando la conjetura de Fourier para el caso en que la función es continua a tramos y periódica. Este es un resultado importante (y famoso), y también se enuncia como un teorema.

Teorema 2. Identidad de las funciones y su serie de Fourier (versión 1). Si $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ es una función periódica, suave a tramos sobre $\mathbb{R}$, y $\tilde{x}_\infty(\,\cdot\,)$ su serie de Fourier, entonces $\tilde{x}_\infty(t)$ converge en cada punto donde $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ es continua, y

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_\infty(t)$$

en cada punto t donde $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ es continua. $\blacklozenge$

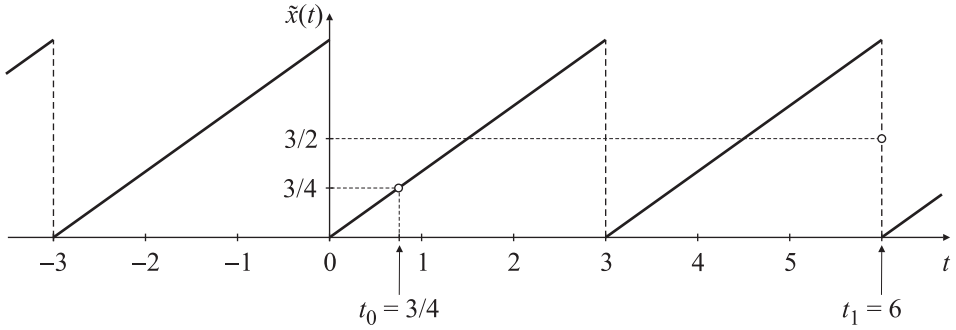


Fig. A.1. Señal diente de sierra del Ejemplo A.1.

EJEMPLO **A.1. Diente de sierra**
La serie de Fourier de la función diente de sierra $\tilde{x}(t)$ de período $T = 3$, definida en un período como $\tilde{x}(t) = t$ con $0 < t < 3$, como se muestra en la Fig. A.1, está dada por

$$\tilde{x}_\infty(t) = \frac{3}{2} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{3}{2\pi k} j e^{j2\pi \frac{k}{3} t}.$$

Este función es suave a tramos en toda la línea real, y es continua en todo t salvo cuando t es múltiplo de $T = 3$. El Teorema 2 asegura que la serie $\tilde{x}_\infty(t)$ converge para todo t que no sea múltiplo de 3. Por ejemplo, para $t = t_0 = 3/4$, $\tilde{x}(t_0) = 3/4$, y

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\infty(t)|_{t=\frac{3}{4}} &= \frac{3}{2} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{3}{2\pi k} j e^{j2\pi \frac{k}{3}\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2\pi k} j (e^{j\pi k/2} - e^{-j\pi k/2}) \\ &= \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2\pi k} j(2j) \operatorname{sen}(\pi k/2) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\pi k} \operatorname{sen}(\pi k/2) \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}(\pi k/2) = 0$ para k par, se reemplaza $k = 2r + 1$, y entonces

$$\begin{aligned} s_x(t)|_{t=\frac{3}{4}} &= \frac{3}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{3}{\pi(2r+1)} \operatorname{sen}[\pi(2r+1)/2] = \frac{3}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{3}{\pi(2r+1)} \operatorname{sen}[\pi r + \pi/2] \\ &= \frac{3}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{3}{\pi(2r+1)} (-1)^{r+1} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

porque $\sum_{r=0}^{\infty} 3(-1)^{r+1}/[\pi(2r+1)] = -3/4$. Por lo tanto, se verifica que $\tilde{x}_\infty(t_0) = \tilde{x}(t_0)$, al menos para un $t = t_0$ que no es múltiplo de $T = 3$.

Por otra parte, $\tilde{x}(t)$ es discontinua en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$, y por ejemplo en $t = t_1 = 6$, la serie converge simétricamente:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t_0} = \frac{3}{2} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{3}{2\pi k} j e^{j2\pi \frac{k}{3} 6} = \frac{3}{2} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{3}{2\pi k} j (e^{j4\pi k} - e^{-j4\pi k}) = \frac{3}{2}.$$

Sin embargo, no converge en sentido general, ya que,

$$\lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t} = \frac{3}{2} - \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{k=M}^{N} \frac{3}{2\pi k} j e^{j2\pi \frac{k}{3} 6} = \frac{3}{2} - \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \frac{3j}{2\pi} \sum_{k=M}^{N} \frac{1}{k}.$$

La última expresión es la serie armónica bilátera que no converge en sentido amplio. □

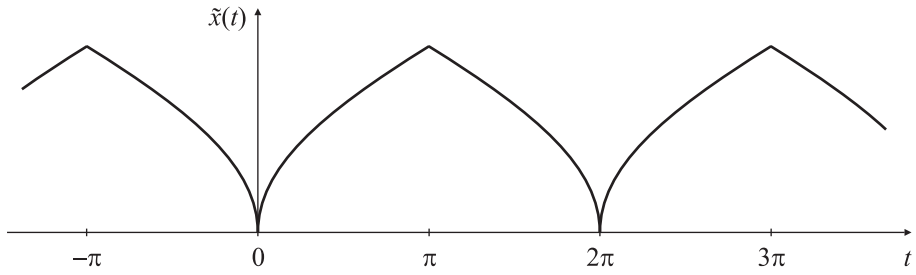


Fig. A.2. Gráfico de la raíz cuadrada periódica del Ejemplo A.2.

Las funciones periódicas que son suaves a tramos son funciones "razonables" para el análisis de Fourier. Como muestra el ejemplo siguiente, muchas función que son "casi" suaves a tramos también pueden representarse por sus series de Fourier.

EJEMPLO **A.2. Serie de Fourier de una función que no es suave a tramos**
Sea $\tilde{x}(t)$ la función periódica definida en un período por $\tilde{x}(t) = \sqrt{|t|}$, para $-\pi < t < \pi$.Esta función, cuyo gráfico se representa en la Fig. A.2, es par, continua, y periódica de período 2π. Su serie de Fourier compleja es de la forma

$$\tilde{x}_\infty(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt}, \tag{A.4}$$

y sus coeficientes c_k, cuya expresión analítica no se calculará explícitamente, están dados por

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{t} e^{-jkt}\, dt,$$

En $t = 0$, y por periodicidad en cada $t = n2\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, no existe la derivada de $\tilde{x}(t)$:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{t}} \to \infty,$$

de manera que la función $\tilde{x}(t)$ no es suave a tramos en cualquier intervalo que contenga un múltiplo entero de 2π, y por lo tanto el Teorema 2 no se puede aplicar.

Sin embargo, cuando t no es un múltiplo entero de 2π (por ejemplo en $t = 2$) existe un intervalo [por ejemplo $(1,3)$] en el cual la función $\tilde{x}(t)$ no sólo es suave, sino uniformemente suave. Los Teoremas 1 y 2 aseguran que la serie (A.4) converge para $t = 2$, y que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2} = \tilde{x}(2) = \sqrt{2}.$$

En general, si t_0 es cualquier punto distinto de un múltiplo de 2π, y τ es la distancia entre ese punto y el múltiplo entero de 2π más cercano, resulta que $\tilde{x}(t)$ es uniformemente suave en el intervalo $(t_0 - \tau/2, t_0 + \tau/2)$. Los Teoremas 1 y 2 aseguran que la serie (A.4) converge para $t = t_0$, y que es igual a $\tilde{x}(t_0)$. Como existe sólo un número finito de múltiplos de 2π en un intervalo finito cualquiera, en este intervalo arbitrario la función $\tilde{x}(t)$ y su serie de Fourier (A.4) coinciden, y se puede escribir

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt},$$

donde esta igualdad es válida para todo t distinto de un múltiplo entero de 2π. □

Bajo las ideas ilustradas en el ejemplo anterior se puede probar una versión más general de Teorema 2.

Teorema 3. Identidad de las funciones y su serie de Fourier (versión 2). Sea $\tilde{x}(t)$ una función continua a tramos, periódica sobre $\mathbb{R}$, y suave a tramos salvo en un número finito de puntos en cada intervalo finito. Entonces la serie de Fourier $\tilde{x}_\infty(t)$ converge a $\tilde{x}(t)$ en todo el intervalo salvo en un número finito de puntos, y por lo tanto $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_\infty(t)$. ♦

De aquí en más se supondrá que las funciones periódicas satisfacen los postulados de los Teoremas 2 o 3, de manera que la función y su serie de Fourier son representaciones alternativas de un mismo objeto matemático.

A.2. Aproximaciones uniformes y no uniformes*

Efectuar la suma infinita indicada en (2.19) o en (A.4) no es conveniente aún con las mejores computadoras, y en la práctica se aproxima $\tilde{x}(t)$ usando una suma parcial $\tilde{x}_{M,N}(t)$, definida en (A.2) utilizando un número finito de términos de su serie de Fourier $\tilde{x}_\infty(t)$. Para que esta aproximación sea útil, los límites M y N deben elegirse de manera que el error de aproximación sea tan pequeño como se desee.

Se define el error en magnitud $\tilde{e}_{M,N}(t)$ a la diferencia entre $\tilde{x}(t)$ y su aproximación $\tilde{x}_{M,N}(t)$:

$$\tilde{e}_{M,N}(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}_{M,N}(t) = \tilde{x}(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t}. \tag{A.5}$$

Evidentemente, $\tilde{e}_{M,N}(t)$ es una función de t. Si $\tilde{x}(t)$ es continua a tramos, el Teorema 1 asegura que para cada t donde $\tilde{x}(t)$ es continua,

$$\lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} |\tilde{e}_{M,N}(t)| = 0.$$

Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$ es el mayor error deseado, y t_0 es un punto donde $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ es continua, existen números enteros M_ε, N_ε tales que $|\tilde{e}_{M,N}(t_0)| < \varepsilon$ cuando $M \geq M_\varepsilon$ y $N \geq N_\varepsilon$. Esto no significa que el error será menor que ε en *otros* puntos $t_i \neq t_0$. La situación ideal sería:

- Que para cada $\varepsilon > 0$ existiese un par de enteros M_ε, N_ε tales que $|\tilde{e}_{M,N}(t)| < \varepsilon$ *para todo* t cuando $M \geq M_\varepsilon$ y $N \geq N_\varepsilon$.
- Poder determinar M_ε, N_ε para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

Si la primera condición se verifica para todo $\varepsilon > 0$, se dice que $\tilde{x}_{M,N}(t)$ aproxima *uniformemente* a $\tilde{x}(t)$, o que $\tilde{x}_{M,N}(t)$ converge *uniformemente* a $\tilde{x}(t)$ cuando $M \to -\infty$, $N \to +\infty$. En otras palabras, si $\tilde{x}_{M,N}(t)$ es una aproximación uniforme de $\tilde{x}(t)$, siempre es posible encontrar enteros M_ε, N_ε la que la suma parcial $\tilde{x}_{M,N}(t)$ difiere de $\tilde{x}(t)$ en menos de ε para todo $t \in \mathbb{R}$.

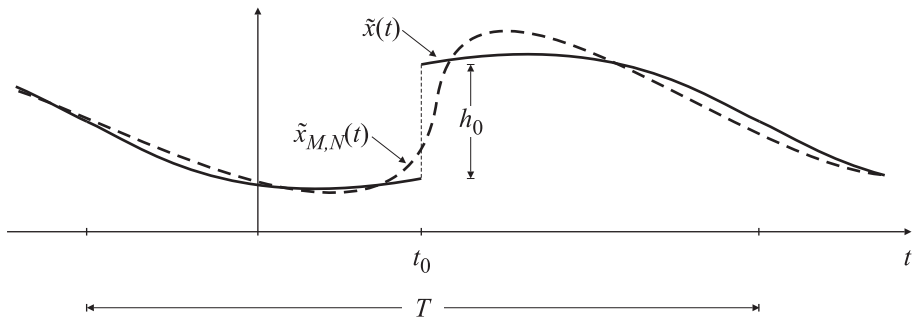


Fig. A.3. Aproximación continua $\tilde{x}_{M,N}(t)$ a una función $\tilde{x}(t)$ con una discontinuidad tipo salto en t_0.

Si una serie de Fourier converge uniformemente a una función, entonces también converge puntualmente a esa función en toda la línea real; esto es

$$\tilde{x}(t) = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Además, si la convergencia es uniforme, el máximo error en usar $\sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t}$ para calcular $\tilde{x}(t)$ debe tender a cero cuando M, N tienden a $-\infty, +\infty$ respectivamente. Aunque sin duda esta es la situación ideal, no siempre ocurre, como se verá a continuación.

A.3. Continuidad y aproximación uniforme*

Cada una de las sumas parciales $\tilde{x}_{M,N}(t) = \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t}$ debe ser una función continua porque es una suma finita de funciones continuas. Por ello es sencillo demostrar que estas sumas parciales no pueden aproximarse a $\tilde{x}(t)$ de manera uniforme si $\tilde{x}(t)$ *no* es una función continua. De hecho, si $\tilde{x}(t)$ tiene una discontinuidad tipo salto, para cada suma parcial $\tilde{x}_{M,N}(t)$ debe existir un intervalo (a_N, b_N) donde el error $|\tilde{e}_{M,N}(t)|$ es del orden de la mitad del salto. Esta es la situación que se presenta en la Fig. A.3. Si t_0 es el punto donde la función $\tilde{x}(t)$ es discontinua, y si $\tilde{x}_{M,N}(t)$ aproxima a $\tilde{x}(t)$ por el lado izquierdo de la discontinuidad, entonces al ser continua necesita un cierto intervalo para volver a aproximarse a $\tilde{x}(t)$ a la derecha de la discontinuidad. Estos resultados se pueden formalizar en el siguiente Teorema.

Teorema 4. Convergencia uniforme. Sea $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ una función periódica continua a tramos. Si la serie de Fourier truncada $\tilde{x}_{M,N}(\,\cdot\,)$ aproxima uniformemente a $\tilde{x}(\,\cdot\,)$, entonces $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ debe ser una función continua sobre la línea real. Recíprocamente, si $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ no es una función continua, entonces $\tilde{x}_{M,N}(\,\cdot\,)$ no aproxima uniformemente a $\tilde{x}(\,\cdot\,)$. Más aún, si $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ tiene una discontinuidad tipo salto de amplitud h_0 en $t = t_0$, entonces para cada par de enteros M, N, con $M < N$ existe un intervalo (a, b) conteniendo t_0 (o con t_0 siendo uno de sus extremos) sobre el cual

$$|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_{M,N}(t)| > \rho h_0,$$

para todo $t \in (a, b)$, y $\rho < 1/2$. ♦

Siguiendo estas líneas, el siguiente Teorema confirma que la serie de Fourier de señales periódicas continuas converge uniformemente.

Teorema 5. Convergencia uniforme. Sea $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ una función periódica suave a tramos con período T. Si $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ además es continua, entonces su serie de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$ converge uniformemente a $\tilde{x}(\,\cdot\,)$. Además, para cualquier valor t y cualquier par de enteros M, N, con $M < 0 < N$,

$$|\tilde{e}_{M,N}(t)| = \left| \tilde{x}(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t} \right| \leq \left[(-M)^{-1/2} + (N)^{-1/2} \right] B$$

donde

$$B = \frac{1}{2\pi} \left[T \int_0^T \left(\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \right)^2 dt \right]^{1/2}$$ ♦

Estos teoremas no aseguran que la serie de Fourier de $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ converge a $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ cuando $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ sólo es una función periódica continua (pero *no* suave a tramos). De hecho, existen funciones periódicas continuas que no se pueden aproximar uniformemente por su serie de Fourier. Estas señales son difíciles de construir y no suelen aparecer en las aplicaciones.

A.4. Convergencia en norma*

Se dice que una aproximación con un número finito de términos $\tilde{x}_{M,N}(t)$ *converge en norma* a la función $\tilde{x}(t)$ si y sólo si

$$\lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \left\| \tilde{x}(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t} \right\| = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \|\tilde{e}_{M,N}(t)\| = 0, \tag{A.6}$$

donde $\tilde{e}_{M,N}(t)$ es el error definido en (A.5), y la función *norma* $\|f(\,\cdot\,)\|$ se define como

$$\|f(\,\cdot\,)\|^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |f(t)|^2 \, dt.$$

Las expresiones (A.6) son equivalentes a

$$\lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \tilde{x}(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t} \right|^2 = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |\tilde{e}_{M,N}(t)|^2 \, dt = 0.$$

De acuerdo a la clasificación del Capítulo 1, la expresión

$$E_{M,N} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |\tilde{e}_{M,N}(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{e}_{M,N}(t) \tilde{e}^*_{M,N}(t) \, dt, \tag{A.7}$$

representa la energía promedio de la señal durante un período, o bien el promedio de la señal error elevada al cuadrado: el error cuadrático medio.

Si $\tilde{x}(t)$ es periódica, continua y suave a tramos, el Teorema 5 establece que existe un valor finito de B tal que $|\tilde{e}_{M,N}(t)| \leq \left[(-M)^{-1/2} + (N)^{-1/2}\right] B$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y todos los enteros M, N tales que $M < 0 < N$. Entonces, el error medio cuadrático verifica

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |\tilde{e}_{M,N}(t)|^2\, dt &< \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [(-M)^{-1/2} + (N)^{-1/2}]^2 B^2 dt \\ &< \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} [(-M)^{-1/2} + (N)^{-1/2}]^2 B^2 = 0, \end{aligned}$$

lo que prueba el siguiente Teorema:

Teorema 6. Convergencia en norma de funciones continuas y suaves a tramos. La serie de Fourier de una función periódica continua y suave a tramos converge en norma a dicha función. ♦

En realidad existe un resultado más fuerte, que establece que la serie de Fourier de una función continua a tramos converge en norma a la función, aún cuando ésta no sea suave a tramos.

Teorema 7. Convergencia en norma de funciones continuas a tramos. La serie de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$ de una función periódica $\tilde{x}(t)$ de período $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ continua a tramos converge en norma a dicha función; además se verifica que

$$\|\tilde{x}(\,\cdot\,)\|^2 = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Esta expresión se conoce como *igualdad de Bessel*. ♦

A.5. Aproximación óptima con un número finito de términos*

La mejor manera de aproximar la función periódica $\tilde{x}(t)$ por una suma *finita* de exponenciales complejas armónicamente relacionadas es encontrar un conjunto de coeficientes c_k, $k = -N, \ldots, N$ tal que la energía promedio por período del error (A.7) sea mínima. Para simplificar la notación respecto a la sección anterior, se considera que en la sumatoria se toman la misma cantidad de términos para $k > 0$ y para $k < 0$, esto es, se hace $M = -N$:

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\Omega_0 t}. \tag{A.8}$$

. Desarrollando (A.7) se tiene que

$$\begin{aligned} E_N &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{e}_N(t)\tilde{e}_N^*(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)][\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)])^* dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}(t)\tilde{x}_N^*(t) - \tilde{x}^*(t)\tilde{x}_N(t) + \tilde{x}_N(t)\tilde{x}_N^*(t)]\, dt. \end{aligned}$$

La condición para que el error sea mínimo es que

$$\frac{\partial E_N}{\partial c_k} = 0, \quad k = -N, \ldots, N$$

esto es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [-\tilde{x}(t)\frac{\partial \tilde{x}_N^*(t)}{\partial c_k} - \tilde{x}^*(t)\frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} + \frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k}\tilde{x}_N^*(t) + \tilde{x}_N(t)\frac{\partial \tilde{x}_N^*(t)}{\partial c_k}]\, dt \\ &= -\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left\{ [\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)]\frac{\partial \tilde{x}_N^*(t)}{\partial c_k} + [\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}_N^*(t)]\frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} \right\} dt \end{aligned} \tag{A.9}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} = e^{jk\Omega_0 t}, \qquad \text{y que} \qquad \frac{\partial \tilde{x}_N^*(t)}{\partial c_k} = 0,$$

pues $\tilde{x}_N^*(t)$ depende de c_k^*, pero no de c_k, la expresión (A.9) se puede escribir como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}_N^*(t)]\frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}_N^*(t)] e^{jk\Omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left(\tilde{x}^*(t) - \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell^* e^{-j\ell\Omega_0 t} \right) e^{jk\Omega_0 t}\, dt \qquad \text{(A.10)} \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}^*(t) e^{jk\Omega_0 t} dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell^* e^{j(k-\ell)\Omega_0 t} dt. \qquad \text{(A.11)} \end{aligned}$$

(note el cambio de variable k por ℓ en la sumatoria para evitar confusiones son el índice k del c_k respecto al cual se está derivando.) Por la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas (nota al pie de la página 74)

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell^* e^{j(k-\ell)\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{\ell=-N}^{N} \int_0^{T_0} c_\ell^* e^{j(k-\ell)\Omega_0 t} dt = c_\ell^*. \tag{A.12}$$

Finalmente, de (A.11) y (A.12), y conjugando y renombrando los índices, se encuentra que

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k = -N, \ldots, N. \tag{A.13}$$

En otras palabras, los coeficientes (A.13) que minimizan la integral del error entre $\tilde{x}(t)$ y su aproximación $\tilde{x}_N(t)$ de orden N son los *mismos* coeficientes de la serie de Fourier (2.20): si la señal $\tilde{x}(t)$ admite una representación en series de Fourier, la mejor aproximación usando una suma *finita* de exponenciales complejas armónicamente relacionadas es la que se obtiene truncando la serie de Fourier al número de términos deseados. A medida que se incrementa N, se agregan nuevos términos, pero los anteriores permanecen sin cambios, y E_N decrece. De hecho, si $\tilde{x}(t)$ tiene una representación en series de Fourier,

$$\lim_{N\to\infty} E_N = 0.$$

En otras palabras, el error medio cuadrático entre la función $\tilde{x}(t)$ y su representación $\tilde{x}_N(t)$ formada por un número finito de términos de la serie de Fourier es nulo. Esto no significa que las funciones sean iguales, como se comenta en la siguiente sección.

A.6. Validez de la representación en series de Fourier*

Dada una señal periódica $\tilde{x}(t)$ siempre se puede intentar obtener un conjunto de coeficientes de Fourier a partir de la ecuación (2.20). Sin embargo, en algunos casos la integral puede no converger (el valor de alguno de los c_k puede ser infinito), y en otros, aún cuando todos los c_k sean finitos, la sustitución de estos coeficientes en la ecuación de síntesis (2.19) puede no converger a la señal original $\tilde{x}(t)$.

Si la señal $\tilde{x}(t)$ es continua no hay problemas de convergencia: toda función periódica continua tiene una representación en series de Fourier de modo que la energía del error de aproximación (A.7) tiende a cero a medida que $N \to \infty$. Esto también es cierto para muchas señales discontinuas. Como éstas son muy comunes en el estudio de señales y sistemas –por ejemplo, el tren de pulsos rectangulares del Ejemplo 2.4– es necesario analizar la convergencia con más detalle. Al discutir estas condiciones no se intenta una justificación matemática rigurosa, la que puede encontrarse en otros textos sobre análisis de Fourier (Churchill, 1963; Kaplan, 1962).

Una clase de señales periódicas que son representables con las series de Fourier comprende las funciones de cuadrado integrable sobre un período. Estas señales tienen energía finita sobre un período,

$$\int_T |\tilde{x}(t)|^2 \, dt < \infty,$$

de donde los coeficientes c_k calculados con (2.20) son finitos. Si $\tilde{x}_N(t)$ representa la aproximación a $\tilde{x}(t)$ usando $2N+1$ términos de la serie de Fourier como en la ecuación (A.8), se puede probar que el error medio cuadrático E_N definido por (A.7) tiende a cero cuando N tiende a infinito. Es decir, si

$$e(t) = \tilde{x}(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi ft},$$

entonces

$$\int_T |e(t)|^2 \, dt = 0.$$

Esta ecuación *no* significa que las señal $\tilde{x}(t)$ y su representación en serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi ft}, \tag{A.14}$$

son iguales en todo instante de tiempo t; lo que dice es que *no hay energía en la diferencia entre las dos*. Las funciones como las indicadas al pie de la página 79 son diferentes, pero tienen la misma representación en series de Fourier. El error entre la función y la serie sólo es nulo para $\tilde{x}_2(t)$. Para $\tilde{x}_1(t)$ y $\tilde{x}_3(t)$ el error $e(t)$ es nulo para todo t cuando $N \to \infty$, *excepto* para $t = \pm\tau/2 + kT_0$, $k \in \mathbb{Z}$, donde $|e_N(t)| = 1/2$ para cualquier N. Sin embargo, para cada valor de N el error medio cuadrático E_N definido por (A.7) es el mismo para las tres funciones.

El tipo de convergencia garantizado cuando $x(t)$ es de cuadrado integrable es muy útil en el tratamiento de señales y sistemas. La mayoría de las señales con que se trabaja en este campo tiene energía finita sobre un período, y por lo tanto admiten representación en series de Fourier. Si bien $\tilde{x}_N(t)$ y $\tilde{x}(t)$ no son idénticas en todos los puntos, el hecho

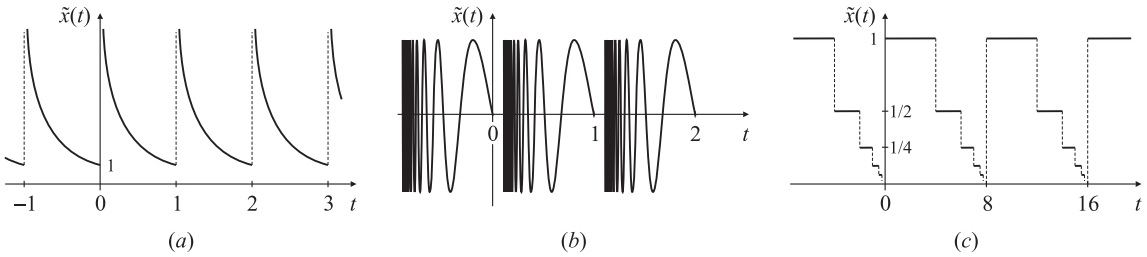


Fig. A.4. Funciones que no satisfacen las condiciones de Dirichlet.

que la diferencia entre ambas tenga energía nula cuando $N \to \infty$ es muy conveniente en muchas aplicaciones. Se suele decir que $\tilde{x}_N(t)$ aproxima en *mínimos cuadrados* a $\tilde{x}(t)$.

P. L. Dirichlet enunció un conjunto de condiciones –que también son satisfechas por casi todas las señales de interés– que garantiza que $\tilde{x}(t)$ y su serie serán *idénticas*, excepto en el conjunto de puntos en donde $\tilde{x}(t)$ es discontinua donde la serie infinita (A.14) converge al valor medio de la discontinuidad. Estas condiciones son *suficientes* pero no *necesarias*, lo que significa que existen funciones que pueden no satisfacer alguna de ellas, pero aún así tener representación en series de Fourier. Las condiciones son:

1. $\tilde{x}\,(t)$ es absolutamente integrable sobre un período, es decir

$$\int_T |\tilde{x}\,(t)|\; dt < \infty. \tag{A.15}$$

   Como sucede con las funciones de cuadrado integrable sobre un período, esto garantiza que todos los coeficientes c_k son finitos, ya que, de acuerdo con (A.15),

$$|a_k| \leq \frac{1}{T}\int_T \left|\tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\right|\; dt = \frac{1}{T}\int_T |\tilde{x}(t)|\; dt < \infty.$$

   Una señal periódica que viola la primera condición de Dirichlet es la que se presenta en Fig. A.4(a) , definida como

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1,$$

   donde $\tilde{x}(t)$ es periódica con período 1.

2. $\tilde{x}\,(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos (se dice que es de *variación acotada*). Un ejemplo de una función que verifica la condición 1, pero no la 2, es

$$\tilde{x}(t) = \operatorname{sin}\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1,$$

   que se grafica en la Fig. A.4(b) . Esta función, periódica con período $T = 1$, es absolutamente integrable

$$\int_0^1 |\tilde{x}(t)|\; dt < 1,$$

   pero tiene un número no finito de máximos y mínimos en el intervalo.

3. $\tilde{x}(t)$ tiene un número finito de discontinuidades (finitas) en un intervalo finito de tiempo. Una función que viola esta condición es la que muestra la Fig. A.4(c), de período $T = 8$, compuesta de un número infinito de secciones cada una de las cuales tiene la mitad de la altura y el ancho de las secciones previas. Aunque es absolutamente integrable, pues el área debajo de un período es menor que 8, el número de discontinuidades en el período es infinito.

Los ejemplos muestran que las señales que no satisfacen los criterios de Dirichlet son generalmente de naturaleza patológica, y en consecuencia no muy importantes en el estudio de señales y sistemas.

Resumiendo, la representación en series de Fourier de señales

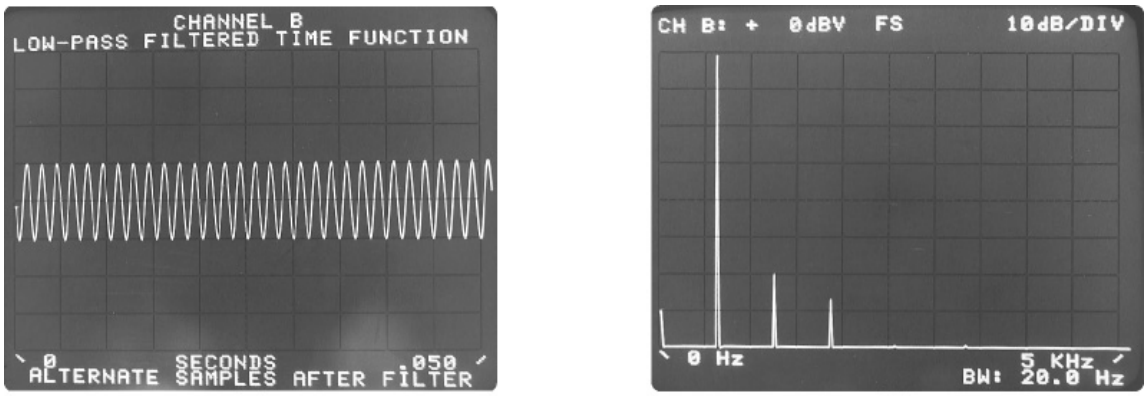
- *continuas* converge e iguala a la señal original en para cada valor de t.
- *discontinuas* converge en todo punto *salvo* en los puntos de discontinuidad, donde converge al valor medio del salto. En este caso la diferencia entre la señal original y la representada por la serie infinita no contiene energía, de modo que para todos los fines prácticos ambas señales son idénticas. Como ambas señales difieren sólo en puntos aislados, sus integrales coinciden sobre cualquier intervalo; por ello se comportan igual bajo la convolución y *son* idénticas desde el punto de vista del análisis de sistema lineales e invariantes en el tiempo.

B

Análisis espectral de señales analógicas

El análisis de señales en el campo transformado permite descubrir aspectos de la señal que serían muy difíciles o imposibles de observar a partir de su representación temporal. Por ejemplo en la Fig. B.1(a) se muestra un tono que parece ser sinusoidal puro. Sin embargo, el espectro de esta señal, que se observa en la Fig. B.1(b) , revela la presencia de otras componentes frecuenciales. Cuando estas componentes se grafican en el dominio frecuencial son fáciles de detectar porque no quedan enmascaradas por las señales de gran amplitud. La Fig. B.2 muestra una señal simultáneamente en los dominios temporal y frecuencial, revelando que el espectro está compuesto por dos sinusoides. Esto no significa que las mediciones en el dominio transformado son "mejores" que las mediciones en el dominio tiempo. Cierta clase de medidas, como el tiempo de crecida y de caída de un pulso, el sobrepico, y las oscilaciones amortiguadas ("ringing") de una señal sólo pueden medirse en el dominio temporal (por ejemplo, con un osciloscopio).

En otras aplicaciones, en cambio, las mediciones en el dominio frecuencial son más ventajosas. Como muestran las Figs. B.1 y B.2, la determinación del contenido armónico de una señal es más sencillo en el dominio frecuencia. En el campo de las comunicaciones es muy



(a) (b)

Fig. B.1. (a) Representación temporal; (b) representación frecuencial de un tono "casi" sinusoidal.

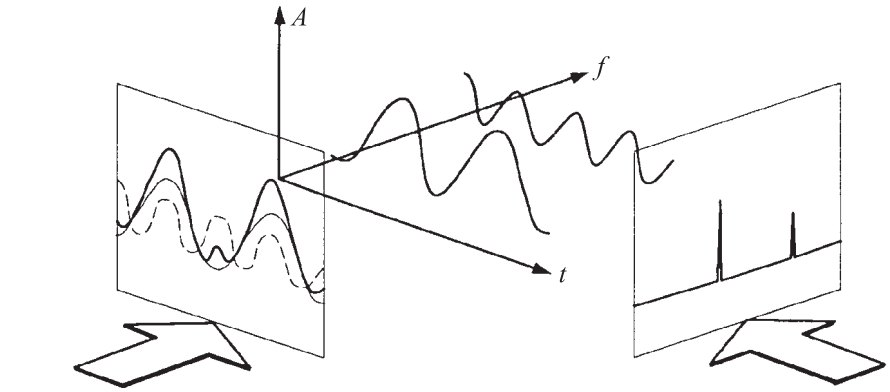


Fig. B.2. Relación entre el dominio temporal y frecuencial.

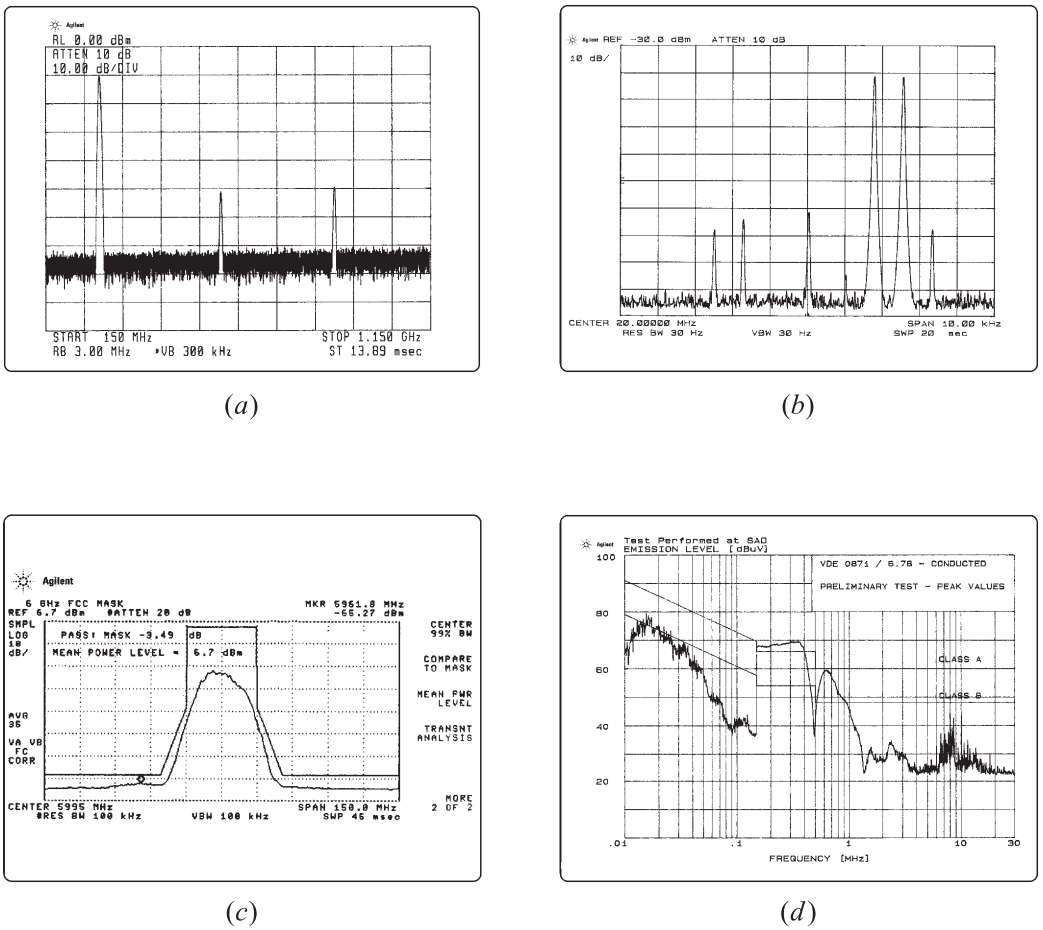


Fig. B.3. Aplicaciones del análisis espectral: (a) prueba de distorsión armónica; (b) pueba de intermodulación de tercer orden en un transmisor de banda lateral única (BLU); (c) espectro de una señal de radio digital, y máscara que muestra los límites permitidos de ocupación espectral; (d) emisiones conducidas en función de los límites impuestos por la VDE como parte de una prueba de interferencia electromagnética.

importante la medición de la distorsión armónica; tal es el caso de los sistemas celulares, donde debe verificarse el contenido armónico de la señal portadora para evitar interferencias con otros sistemas que operan en las frecuencias de las armónicas [Fig. B.3(a)]. También es crucial la distorsión eventual del mensaje modulado sobre una portadora. La intermodulación de tercer orden (dos tonos de una señal que se modulan entre sí) puede ser particularmente problemático pues las componentes de distorsión pueden caer dentro de la banda de interés, y en consecuencia no pueden ser filtradas [Fig. B.3(b)]. Otra medición importante es la *ocupación espectral*. La modulación de una señal aumenta su espectro, y para evitar interferencia entre canales próximos las agencias regulatorias restringen el ancho espectral de varias transmisiones [Fig. B.3(c)]. La interferencia electromagnética (EMI) también puede ser considerada como una forma de ocupación espectral; se debe evitar que emisiones no deseadas, ya sean radiadas o transmitidas por la alimentación u otro tipo de cableado interfieran con el funcionamiento de otros sistemas. Los fabricantes de productos eléctricos o electrónicos deben verificar los niveles de emisión en función de la frecuencia de acuerdo a las normativas de los organismos reguladores [Fig. B.3(d)].

Mientras que el comportamiento de una señal en el dominio tiempo puede analizarse con un osciloscopio, el análisis en el dominio transformado requiere de un instrumento que tradicionalmente era bastante más costoso y más complicado de utilizar: el analizador espectral. Hoy en día es frecuente que los osciloscopios digitales sean capaces de calcular el espectro de una señal, utilizando herramientas que se estudiarán más adelante en este curso. Tales instrumentos reciben el nombre de analizadores digitales de espectro, y sus propiedades y características se analizarán oportunamente. Sin embargo, es interesante describir el funcionamiento de los analizadores espectrales analógicos, ya que se basan en un conjunto de propiedades de la transformada de Fourier descritas en las secciones precedentes, y además porque comparten muchas características con los instrumentos más modernos.

Otro instrumento pensado para efectuar mediciones en el dominio frecuencia es el *analizador de redes*. Los analizadores espectrales están optimizados para caracterizar señales, introduciendo muy baja distorsión y pocas señales espurias, de modo que el análisis que realiza muestra realmente el espectro de la señal de entrada, y no señales generadas por el mismo analizador. Los analizadores de redes, por otra parte, están optimizados para medir precisamente amplitud y desfasaje sobre un amplio rango de ganancias y atenuaciones de red. Este diseño significa que estas dos familias de instrumentos no son intercambiables: un analizador espectral no puede funcionar como un analizador de redes pues no mide la amplitud con gran exactitud, y tampoco mide desfasaje. Un analizador de redes no puede suplir a un analizador espectral pues las respuestas espurias limitan su rango dinámico.

B.1. Analizador espectral analógico

Un analizador espectral es un sistema físico capaz de medir la transformada de Fourier $X(f)$ de una señal arbitraria $x(t)$. El término "analizador" se reserva para sistemas como el de la Fig. B.4 donde su entrada es $x(t)$ y su salida $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \ldots, y_N(t)]$ es función del período en que se observa la señal, y se supone que mide, de cierta manera, la transformada $X(f)$ deseada. Como es un sistema físico, necesariamente es causal, es decir que sus salidas $y_k(t)$ en un dado tiempo $t = t_0$ dependen, necesariamente, sólo de

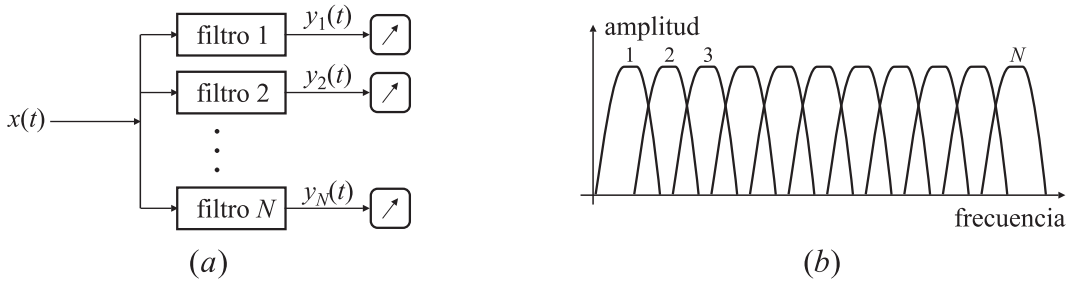


Fig. B.4. Analizador espectral analógico simultáneo: (a) diagrama simplificado; (b) salida del analizador.

los valores de $x\,(t)$ previos a $t = t_0$, mientras que la transformada $X\,(f)$ depende de la historia completa de $x\,(t)$, para t desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En consecuencia, $y\,(t_0)$ no puede representar $X\,(f)$, excepto que $x\,(t)$ se anule para algún $t > t_0$, o bien cuando el futuro de la señal pueda deducirse de su historia pasada, tal como sucede con las señales periódicas. El lector interesado puede consultar Randall (1977) para mayor información sobre estos aspectos.

Los analizadores espectrales analógicos se dividen en dos clases. La primera clase (Fig. B.4) tiene varias salidas[1], y en un tiempo $t = t_0$ cada una de ellas mide una componente frecuencial distinta de la señal de entrada; de modo que el espectro deseado se lee *simultáneamente*. La segunda clase (Fig. B.5) consta de una única salida que mide las distintas componentes frecuenciales en instantes de tiempos consecutivos. Se dice que el espectro se determina *secuencialmente*.

La elección del analizador y la interpretación de los resultados depende de la naturaleza de la señal de entrada $x\,(t)$. En esta sección se considerará sólo el caso de señales periódicas o señales aperiódicas con energía finita. Las señales aperiódicas que no tienen energía finita (como el ruido) no poseen transformada de Fourier, y se caracterizan por su *espectro de potencia*. La discusión de estas secciones puede ser útil para la medición del espectro de potencia; sin embargo, su interpretación adecuada requiere de consideraciones estadísticas, que están fuera de los objetivos de este curso.

B.1.1. Analizador espectral simultáneo o de bancos de filtros

La Fig. B.4(a) ilustra el diseño básico de un analizador espectral analógico simultáneo. El sistema está compuesto por un conjunto o banco de filtros pasabanda, relativamente selectivos, cada uno de ellos sintonizado a una frecuencia distinta. Si se mide la salida de cada uno de estos filtros se puede determinar la potencia en la porción del espectro comprendida por su ancho de banda. Eligiendo las frecuencias centrales y el ancho de banda de modo que las respuestas en frecuencia se solapen adecuadamente, se puede caracterizar completamente el rango del espectro cubierto por el conjunto de filtros, como muestra la Fig. B.4(b). El número de filtros necesarios para cubrir el espectro depende de consideraciones económicas: para detectar líneas espectrales arbitrariamente próximas, debería utilizarse un elevado número de pasabanda muy angostos. El costo de cada filtro

[1]Por "salida" se entiende la unidad de medición del instrumento, y no la forma de presentación del espectro o unidad de visualización (usualmente un tubo de reyos catódicos).

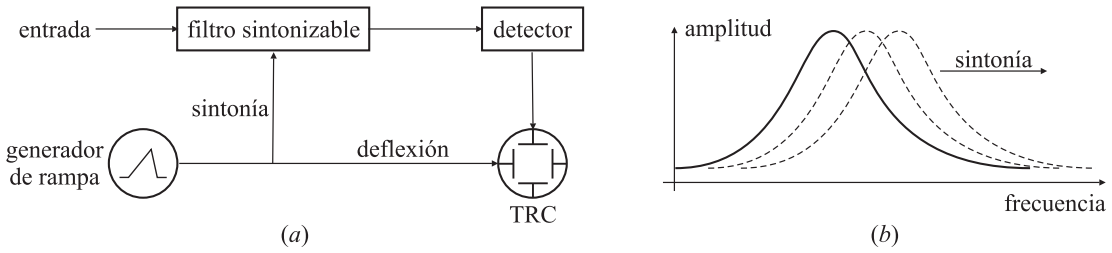


Fig. B.5. Analizador espectral analógico de barrido: (a) esquema simplificado; (b) respuesta del filtro sintonizable.

crece a medida que disminuye su ancho de banda, de modo que un analizador de alta resolución resulta muy oneroso. Los analizadores espectrales analógicos simultáneos o de bancos de filtros suelen utilizarse en aplicaciones de audio, donde es habitual utilizar 32 filtros, cada uno cubriendo un ancho de banda de un tercio de octava.

B.1.2. Analizador espectral de barrido

Una manera de evitar el empleo de un banco de filtros costosos es utilizando un único filtro pasabanda cuya frecuencia central pueda desplazarse dentro del rango de frecuencias de interés. Si, tal como se muestra en la Fig. B.5, se grafica la amplitud de la salida de estado estacionario del filtro en función de la frecuencia a la que está sintonizado, se obtiene el espectro de la señal de entrada. Este tipo de analizador se utiliza preferentemente para el análisis de espectros de RF y microondas.

Para asegurar el funcionamiento correcto, la señal bajo análisis no debe cambiar durante el tiempo que demanda el barrido del analizador. Si aparece una señal con componentes de frecuencia que no coinciden con la frecuencia a la que el filtro está sintonizado en ese momento, el analizador será incapaz de medirla. Una forma de solucionar este inconveniente es aumentando la velocidad de barrido. Aunque todavía podrían perderse algunos eventos, las posibilidades sería menores; sin embargo, no se puede hacer el barrido arbitrariamente rápido debido al tiempo de respuesta del filtro, que depende fundamentalmente de la longitud de su respuesta impulsiva. De acuerdo a lo postulado por el teorema del ancho de banda, un filtro estrecho tendrá una respuesta impulsiva de mayor duración, y en consecuencia, un mayor tiempo de establecimiento. Si el filtro se desplaza por el rango de frecuencias de interés muy rápidamente su salida puede no alcanzar el estado estacionario: la medición de la amplitud del espectro será errónea (en general, menor que la real) como sugiere la Fig. B.6.

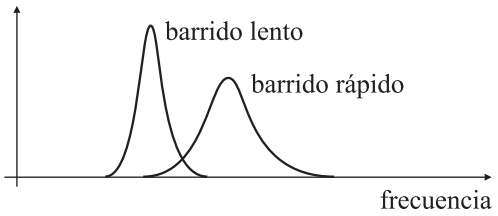


Fig. B.6. Error de amplitud debido a un barrido rápido.

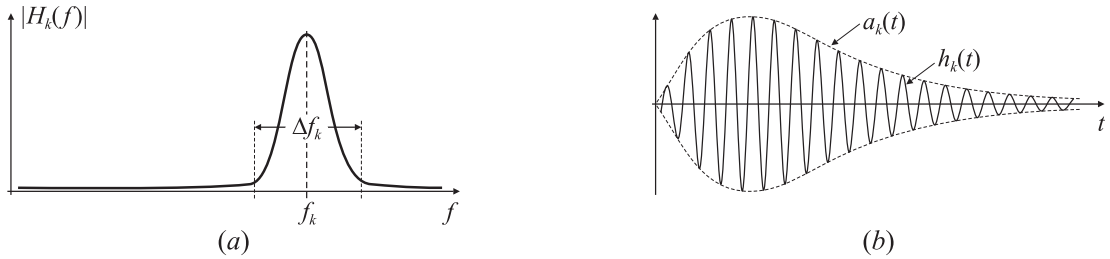


Fig. B.7. (a) Respuesta en frecuencia y (b) impulsiva del k-ésimo filtro pasabanda.

B.1.3. Comparación de los analizadores simultáneos y de barrido

El problema de la velocidad de barrido no está presente en el analizador espectral paralelo, ya que los filtros están *siempre* conectados a la señal de entrada. Por lo tanto con este tipo de analizador se pueden analizar eventos transitorios cuya duración sea mayor que el tiempo de establecimiento del filtro más selectivo[2].

Ambos tipos de analizadores son soluciones de compromiso: si bien que los analizadores paralelos o simultáneos son rápidos, tienen resolución limitada y son costosos. Por otra parte, los analizadores de barrido son más económicos pero la medición demanda más tiempo, sobre todo si se requiere alta resolución, y no pueden analizar eventos transitorios.

Otro analizador importante es aquel que digitaliza la señal, y calcula su espectro aplicando la transformada rápida de Fourier (FFT), como se estudiará más adelante. El analizador por FFT permite estudiar fenómenos transitorios, y además puede medir amplitud y fase. Aunque muy desarrollados, los analizadores de FFT aún no alcanzan a superar el rango de frecuencia de trabajo, sensitividad y rango dinámico de los analizadores de barrido superheterodinos, pero sin duda han desplazado a los analizadores simultáneos o por banco de filtros. Los analizadores comerciales suelen combinar alguno de estos tres tipos de funcionamiento según sea el rango de frecuencia de operación elegido.

A continuación se describirá el funcionamiento del analizador de barrido, y en particular del analizador de barrido tipo superheterodino, de uso habitual en análisis de sistemas de comunicaciones.

B.2. Analizador simultáneo ante excitaciones transitorias

La señal $x(t)$ a analizar se inyecta a un banco de filtros pasabanda como el de la Fig. B.4(a). La respuesta en frecuencia del filtro k-ésimo se indica con $H_k(f)$, y su respuesta impulsiva con $h_k(t)$, como se muestra en las Figs. B.7(a) y B.7(b), respectivamente. Si $H_k(f)$ es simétrica, se encuentra que, eligiendo apropiadamente el origen de la escala temporal,

$$h_k(t) = a_k(t) \cos 2\pi f_k t$$

[2]Si cada uno de los filtros tienen un ancho de banda de, por ejemplo, 1/3 de octava, el ancho de banda en Hz es distinto para cada uno de ellos; sin embargo, el "Q" (cociente entre la frecuencia central y el ancho de banda) es constante, y por lo tanto, todos los filtros tienen el mismo tiempo de establecimiento.

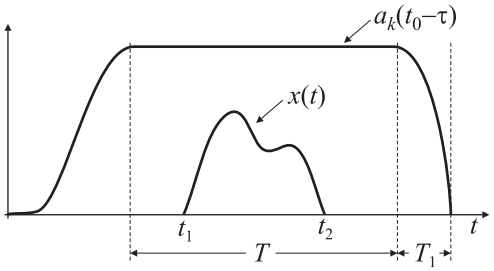


Fig. B.8. Señal $x(t)$ de longitud finita y respuesta impulsiva $a_k(t)$ del filtro pasabajos prototipo.

donde $a_k(t)$ es el doble la respuesta impulsiva del filtro pasabajos prototipo del filtro pasabanda. En un tiempo t_0 la salida $y_k(t)$ del k-ésimo filtro es

$$\begin{aligned} y_k(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_k(t_0-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) a_k(t_0-\tau) \cos\left[2\pi f_k(t_0-\tau)\right] d\tau. \end{aligned}$$

Notando

$$g_{k,t_0}(t) = x(t) a_k(t_0-t), \tag{B.1}$$

reemplazando $\cos\left[2\pi f_k(t_0-\tau)\right] = \left(e^{j2\pi f_k(t_0-\tau)} + e^{-j2\pi f_k(t_0-\tau)}\right)/2$ y operando, se encuentra que

$$y_k(t_0) = e^{j2\pi f_k t_o} \int_{-\infty}^{\infty} g_{k,t_0}(\tau) e^{-j2\pi f_k \tau} d\tau + e^{-j2\pi f_k t_o} \int_{-\infty}^{\infty} g_{k,t_0}(\tau) e^{j2\pi f_k \tau} d\tau.$$

Como $x(t)$ y $a_k(t)$ son reales, $g_{k,t_0}(t)$ es real, y en consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{k,t_0}(\tau) e^{-j2\pi f_k \tau} d\tau = G_{k,t_0}(f_k), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g_{k,t_0}(\tau) e^{j2\pi f_k \tau} d\tau = \bar{G}_{k,t_0}(f_k),$$

donde $(\bar{\cdot})$ indica complejo conjugado. Luego de algunas manipulaciones algebraicas, $y_k(t_0)$ puede escribirse como

$$y_k(t_0) = |G_{k,t_0}(f_k)| \cos(2\pi f_k t_0 - \phi_{k,t_0})$$

donde ϕ_{k,t_0} es la fase de $G_{k,t_0}(f_k)$. Teniendo en cuenta (B.1) y el teorema de convolución frecuencial,

$$G_{k,t_0}(f_k) = X(f) * \bar{A}_k(f) e^{j2\pi f_k t_0},$$

y entonces,

$$|G_{k,t_0}(f_k)| = \left|X(f_k) * \bar{A}_k(f_k)\right|.$$

Sintetizando, la salida del filtro k-ésimo en un tiempo t_0 es

$$y_k(t_0) = \left|X(f_k) * \bar{A}_k(f_k)\right| \cos(2\pi f_k t_0 - \phi_{k,t_0}).$$

Esto es, la salida del filtro en un instante t_0 es proporcional a la magnitud del espectro de $x(t)\, a_k(t_0-t)$, evaluado a la frecuencia f_k

Si la señal $x(t)$ es de longitud finita, una elección apropiada de la respuesta impulsiva $a_k(t)$ del pasabajos prototipo permite conocer exactamente $X(f)$. Si la señal $x(t)$ es no

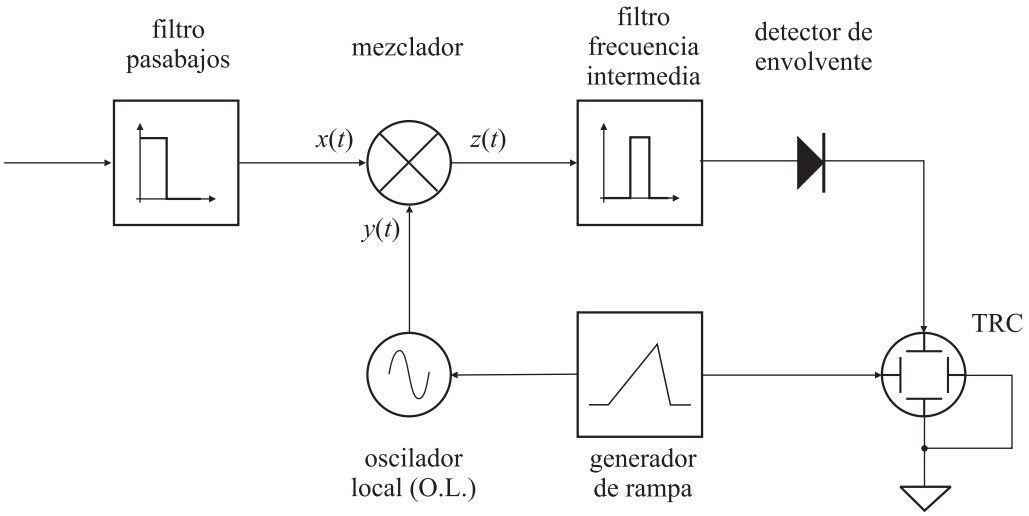


Fig. B.9. Analizador de espectros de barrido tipo superheterodino.

nula en el intervalo (t_1, t_2) , como se muestra en la Fig. B.8, se elige la respuesta impulsiva $a_k(t)$ de manera que sea constante en un intervalo T bastante mayor que $t_2 - t_1$;

$$a_k(t) \approx a_k = \text{constante} \qquad \text{para } T_1 < t < T + T_1.$$

De esta forma,

$$x\,(t)\,a_k(t_0 - t) \approx a_k x(t) \qquad \text{para } t_2 + T_1 < t < t_1 + T_1 + T.$$

Por lo tanto, en este intervalo de tiempo la envolvente del espectro de $G_{k,t_0}(f_k)$ de $g_{k,t_0}(t) = x\,(t)\,a_k(t_0 - t)$ es igual al espectro de $a_k x(t) = a_k X(f)$. Las respuestas impulsivas de los distintos filtros que forman el banco del analizador pueden ser arbitrarias, siempre que sus envolventes $a_k(t)$ permanezcan constantes durante un intervalo de tiempo mayor que la duración de la señal que se desean analizar. Este resultado es compatible con el teorema del ancho de banda, pues una respuesta impulsiva de mayor longitud se asocia a un espectro más angosto y concentrado. En otras palabras, $A_k(f)$ "se parece más" a un impulso, y entonces $G_{k,t_0}(f_k) = X\,(f) * \bar{A}_k(f)e^{j2\pi f_k t_0}$ se asemeja a $X(f)$.

El valor de la constante a_k puede elegirse para compensar las ganancias o atenuaciones del sistema de visualización.

B.3. Analizador de barrido superheterodino

Aún cuando para un determinado ancho de banda de análisis el analizador espectral de barrido es más económico que el analizador de banco de filtros, también es extremadamente costoso debido a que es difícil diseñar un filtro pasabanda selectivo, de alta calidad cuya frecuencia central pueda ajustarse a voluntad sobre un amplio rango de frecuencias manteniendo un "Q" constante. Sin embargo, este inconveniente puede solucionarse en base a la propiedad de modulación de la transformada de Fourier.

La Fig. B.9 muestra un diagrama bloque simplificado de un analizador espectral superheterodino. "Heterodinar" significa mezclar, y "super" se refiere a frecuencias superiores

a las de la señal a analizar. El diagrama bloque indica que la señal de entrada después de atravesar un filtro pasabajos entra a un mezclador, donde se multiplica con la señal proveniente de un oscilador local.

De acuerdo a la propiedad de modulación de la transformada de Fourier, al multiplicar la señal de entrada $x(t)$ por una señal cosinusoidal $y(t)$, cuya frecuencia f_y es mucho mayor que el ancho de banda Δf de $X(f)$, su espectro se desplaza y queda centrado en $\pm f_y$. Si la frecuencia del oscilador local se varía continua y lentamente $f_y = f_0 + \rho \Delta f$, $0 \leq \rho \leq 1$, la envolvente de la salida del filtro de análisis (pasabanda angosto) centrado en f_0 da una idea de la magnitud del espectro de $X(f)$ a la frecuencia $\rho\, \Delta f$.

El mezclador es esencialmente un multiplicador, de modo que a la salida no sólo hay componentes correspondientes a la suma y la diferencia de las frecuencias de la señal de entrada y del oscilador local, sino también sus armónicas, que son removidas por el filtro de frecuencia intermedia. Las señales útiles atacan un detector de envolvente, encargado de medir la magnitud de la salida. En los analizadores modernos, esta señal es digitalizada y procesada para luego aplicarla a las placas verticales de un tubo de rayos catódicos (TRC) y producir una deflexión vertical proporcional a la amplitud. Un generador de rampa sintoniza la frecuencia del oscilador local, de modo que su frecuencia cambie proporcionalmente con la tensión de la rampa, y también es el encargado de deflexionar horizontalmente el haz del TRC de izquierda a derecha.

El diagrama bloque de la Fig. B.9 es muy similar al de una radio de AM convencional. Las diferencias radican en que la salida del analizador espectral es una pantalla en lugar de un parlante, y que el oscilador local se sintoniza electrónicamente –y varía periódicamente en el tiempo– en lugar de sintonizarse manualmente a la frecuencia de la emisora de interés.

B.3.1. El mezclador

El mezclador es un dispositivo no lineal, y a su salida se encuentran presentes componentes de frecuencia que no existen en las señales de entrada. El mezclador ideal es un multiplicador, pero frecuentemente se construyen aprovechando las características no lineales de distintos componentes electrónicos, como la relación exponencial entre la corriente de colector y la tensión base emisor de los transistores de juntura, o la característica cuadrática entre la corriente de drenaje y la tensión de compuerta de los transistores de efecto de campo. Para este análisis basta suponer que la salida del mezclador es una cierta función polinomial de la suma de las señales de entrada

$$z(t) = a_1 [x(t) + y(t)] + a_2 [x(t) + y(t)]^2 + a_3 [x(t) + y(t)]^3 + \ldots$$

donde $x(t)$ representa la señal a analizar, e $y(t)$ es la salida sintonizable del oscilador local. En general, el término de potencia k da lugar a la aparición de componentes de frecuencia $f_s = m\, f_x + n\, f_y$, donde $|m| + |n| = k$, $m, n \in \mathbb{Z}$ y f_x, f_y son las frecuencias de las señales $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. En consecuencia, las componentes de frecuencia

a la salida del mezclador serán

$$\left.\begin{array}{r} f_x \\ f_y \end{array}\right\} \rightarrow \text{debido al término lineal,}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2f_x \\ 2f_y \\ f_x + f_y \\ \boxed{+f_x - f_y} \\ \boxed{-f_x + f_y} \\ -f_x - f_y \end{array}\right\} \rightarrow \text{debido al término cuadrático,}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3f_x \\ 3f_y \\ f_x + 2f_y \\ f_x - 2f_y \\ 2f_x + f_y \\ 2f_x - f_y \\ -f_x + 2f_y \\ -f_x - 2f_y \\ -2f_x + f_y \\ -2f_x - f_y \end{array}\right\} \rightarrow \text{debido al término cúbico.}$$

De todas estas combinaciones, las únicas que interesan para el funcionamiento del analizador son las diferencias de frecuencia debido al término cuadrático, resaltadas en la lista. Las demás son fuente de distorsión, y deben tenerse en cuenta en el diseño del equipo: la elección del rango admisible de frecuencias de entrada, las frecuencias entre las que se "barre" el oscilador local, y la frecuencia central y el ancho de banda del filtro pasabanda de frecuencia intermedia deben garantizar que las frecuencias espurias no alcancen al detector de envolvente.

B.3.2. El filtro de frecuencia intermedia

Este filtro es un pasabanda que se comporta como una "ventana" a través de la cual se observa parte del espectro de la señal que se desea analizar. El ancho de banda de este filtro se denomina "ancho de banda de resolución", y en general puede alterarse desde el panel frontal del equipo. Los filtros de ancho de banda estrechos tienen una respuesta impulsiva de mayor duración, lo que requiere que la velocidad de barrido sea suficientemente lenta como para dar tiempo a que se atenúe el transitorio antes de efectuar la medición. La disponibilidad de filtros con diferentes anchos de banda permiten optimizar el comportamiento del instrumento, seleccionando mejor resolución a costa de un mayor tiempo de medición o viceversa.

B.3.3. El detector de envolvente

Este bloque se encarga de convertir la señal de salida del filtro de frecuencia intermedia a una tensión continua proporcional a la energía de la señal, que se utilizará para deflexionar el haz de electrones de la pantalla en el sentido del eje y. Tradicionalmente el detector de envolvente era un circuito relativamente sencillo. En la actualidad, se prefiere

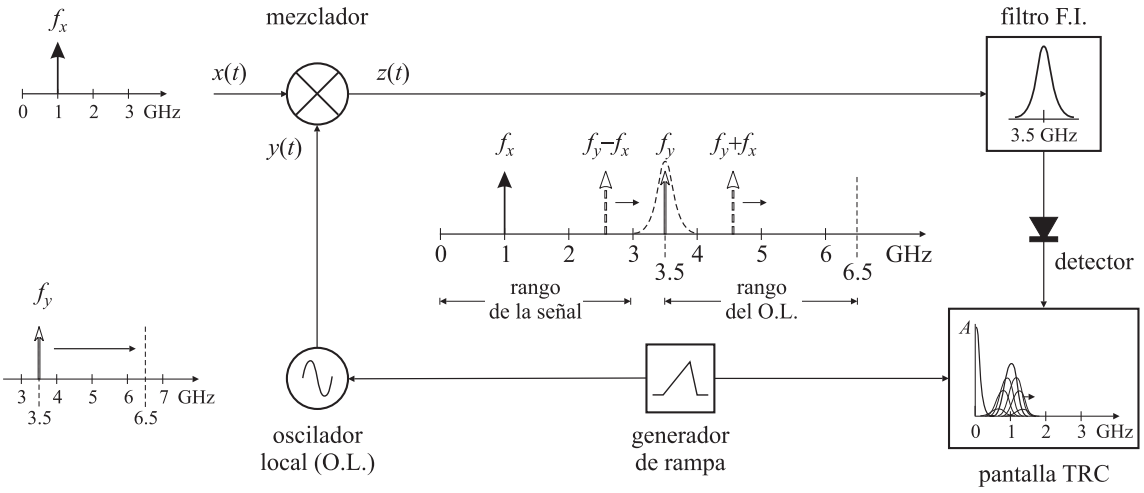


Fig. B.10. Esquema de operación de un analizador espectral de barrido.

digitalizar la señal a la salida del filtro de F.I., y de esta forma el detector de envolvente puede implementarse por software, lo que permite una mayor flexibilidad en el procesado y representación gráfica.

B.3.4. Análisis del funcionamiento

La Fig. B.10 repite el esquema básico de la Fig. B.9; las flechas horizontales en los espectros indican el desplazamiento de algunas componentes frecuenciales debido al barrido del analizador. La salida del mezclador tiene tres componentes de frecuencia de interés: la suma y la diferencia de las frecuencias de la señal f_x y del oscilador local f_y, que son $-f_x + f_y$, $f_x + f_y$ y la frecuencia del oscilador local f_y. Esta última componente no debería aparecer si el multiplicador es ideal; sin embargo, se permite una pequeña fuga desde el puerto del oscilador local hacia la salida del mezclador para tener una referencia o "marca" conocida en la representación gráfica del espectro. También estarán presentes las correspondientes frecuencias negativas y el resto de las armónicas espurias generadas por el mezclador, que no se grafican para no complicar el esquema.

En este ejemplo, se supone que el rango de frecuencias de entrada está comprendido entre 0 Hz y 3 GHz; la señal de entrada tiene una única componente de frecuencia f_x ubicada dentro de este rango. El oscilador local (O.L.) se puede barrer desde 3.5 GHz hasta 6.5 GHz, y el filtro pasabanda de frecuencia intermedia está centrado en 3.5 GHz.

El funcionamiento del analizador puede comprenderse con la ayuda de la Fig. B.11. Al comienzo del barrido [Fig. B.11(a)] la frecuencia del oscilador local es de 3.5 GHz. La única componente frecuencial que queda comprendida dentro del ancho de banda del filtro pasabanda es la de frecuencia f_y. El detector de envolvente detecta la amplitud de esta señal, y en la pantalla gráfica se observa un punto de altura proporcional a esta amplitud.

Cuando aumenta la frecuencia del oscilador local, por ejemplo a 3.75 GHz [Fig. B.11(b)], las componentes de frecuencia f_y y $-f_x + f_y$, $f_x + f_y$ se desplazan hacia la derecha en el espectro. Nuevamente, sólo la señal de frecuencia f_y (el oscilador local) queda dentro del

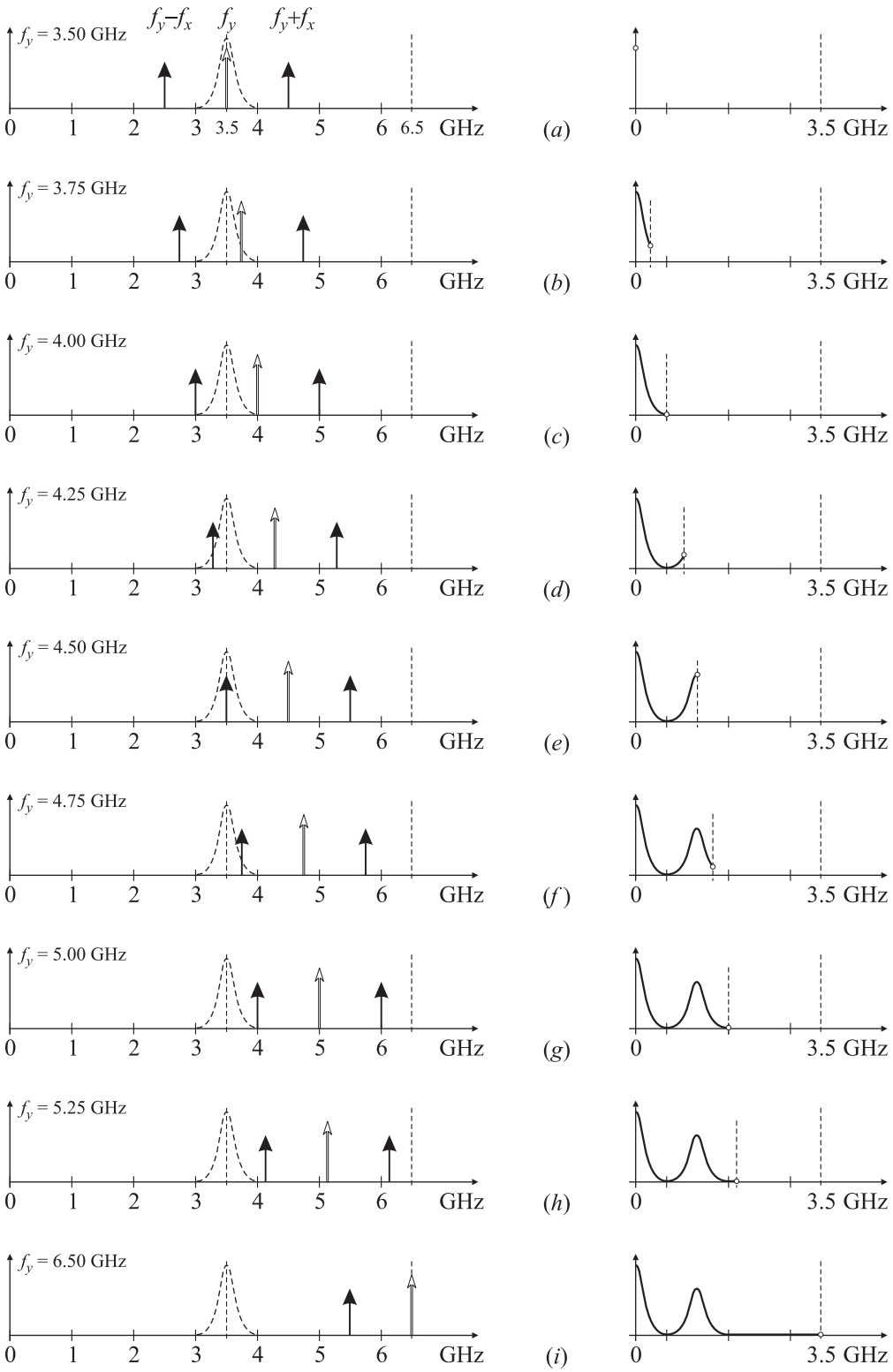


Fig. B.11. Distintas etapas en el barrido del oscilador local

ancho de banda del filtro de análisis. Sin embargo, a esta frecuencia el filtro presenta cierto nivel de atenuación, y por lo tanto en la pantalla gráfica el trazo tiene menor magnitud.

Cuando la frecuencia del oscilador local es $f_y = 4$ GHz la respuesta del filtro de análisis es prácticamente nula, como se muestra en la Fig. B.11(c) . En la pantalla se observa una "marca" o referencia que indica la posición de la frecuencia cero para la representación gráfica; el "ancho" de la marca es directamente proporcional al ancho de banda del filtro de análisis.

A esta frecuencia del O.L. la componente $-f_x + f_y$ comienza a quedar comprendida dentro del ancho de banda del filtro. A la frecuencia $-f_x + f_y$ la respuesta del filtro es casi nula, pero cuando la frecuencia del oscilador local aumenta a $f_y = 4{,}25$ GHz la componente de frecuencia $-f_x + f_y$ produce una salida significativa, como se observa en la Fig. B.11(d). La máxima salida del filtro ocurre cuando la frecuencia del oscilador local es $f_y = 4{,}5$ GHz, para la cual la frecuencia diferencia $-f_x + f_y = 3{,}5$ GHz coincide con el pico de resonancia del filtro de frecuencia intermedia [Fig. B.11(e)]. Mientras se incrementa la frecuencia del oscilador local la componente de frecuencia $-f_x + f_y$ recorre todo el ancho de banda del filtro de análisis, y en la pantalla se observa un segundo pico, como ilustran las Fig. B.11$(f) - (i)$.

En síntesis, a medida que la frecuencia del oscilador local varía linealmente, se aplica una señal de frecuencia $-f_x + f_y$ a la entrada al filtro pasabanda; la amplitud de su salida depende de la ganancia del filtro a esa frecuencia particular. Como la misma señal que se usa para variar la frecuencia del oscilador local controla la deflexión horizontal de un tubo de rayos catódicos (TRC) va quedando registrada en la pantalla del analizador la gráfica de la variación del contenido frecuencial de la señal de entrada para diferentes frecuencias.

Aún en el caso en que la señal de entrada fuese una senoidal perfecta, cuyo espectro es un par de impulsos, la pantalla del analizador espectral mostrará una gráfica que corresponde a la respuesta en frecuencia del filtro pasabanda, centrada en la frecuencia correspondiente a la de la señal senoidal de entrada. Por lo tanto el ancho de banda del filtro de frecuencia intermedia o filtro de análisis determina la resolución del instrumento.

B.4. Descripción de un analizador de barrido comercial

En la Fig. B.12 se muestra el diagrama bloque de un analizador espectral comercial con finalidades didácticas, el LabVolt 9405. Observe que salvo algunos agregados, el esquema es básicamente el mismo que el de la Fig. B.10. Esta analizador ha sido diseñado para el estudio de señales de audio y de radiofrecuencia. Utiliza como elemento visualizador un osciloscopio convencional, o un registrador de papel. El analizador tiene dos rangos de frecuencias admisibles de entrada: desde 0 MHz a 30 MHz, y desde 85 MHz a 115 MHz. La impedancia de entrada es seleccionable entre 50 Ω y 1 MΩ. Además, las señales de entrada pueden atenuarse en cinco pasos, desde 0 dB a 40 dB. El eje de frecuencias puede ajustarse en cinco rangos, desde 2 kHz a 10 MHz por volt. De acuerdo al rango elegido, el ancho de banda de resolución se ajusta automáticamente entre 100 Hz y 50 kHz. La amplitud de la señal puede llegar hasta 10 dB por volt, con un máximo rango dinámico en pantalla de 60 dB. Para permitir una imagen estable, el analizador cuenta con una memoria digital donde almacena el gráfico a mostrar en el osciloscopio.

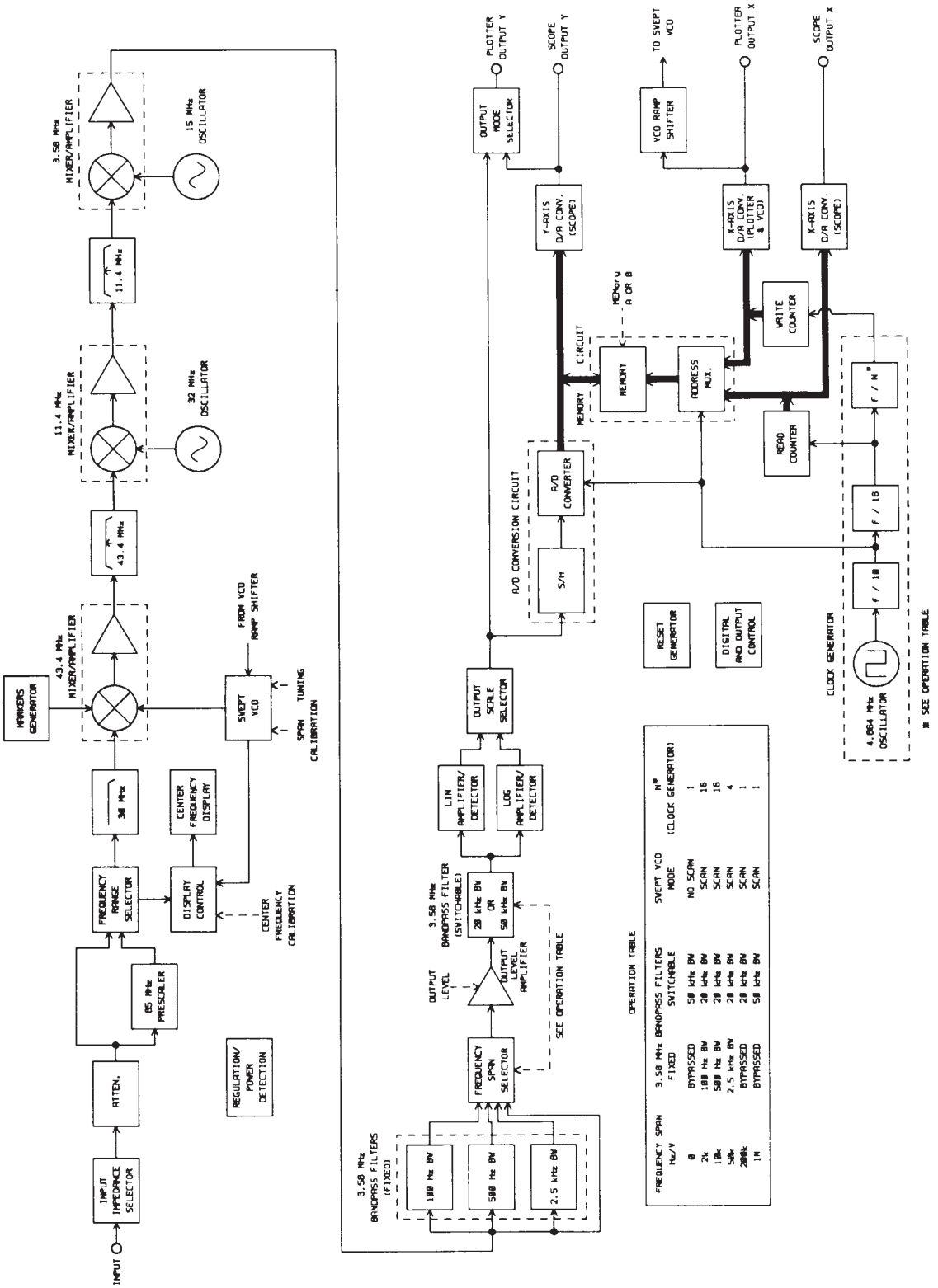


Fig. B.12. Diagrama bloque del analizador espectral de barrido LabVolt 9405.

Una llave a la entrada del analizador permite seleccionar la impedancia de entrada entre 50 Ω y 1 MΩ. En la posición de alta impedancia, la entrada del analizador es similar a la de un osciloscopio, de modo que se pueden medir señales en circuitos electrónicos sensibles sin afectar su operación. Cualquiera sea el valor de la impedancia de entrada seleccionado, la señal es dirigida a un atenuador de RF de 0 a 40 dB, ajustable en pasos de 10 dB.

Si se elige el rango de frecuencias entre 0 MHz y 30 MHz, la salida del atenuador se envía a un filtro pasabajos con frecuencia de corte de 30 MHz. Si en cambio se elige el rango entre 85 MHz y 115 MHz, la señal se envía previamente a un conversor de frecuencia ("prescaler" en la Fig. B.12) que la convierte a la banda de 0 a 30 MHz, antes de pasarla por el filtro pasabajos de 30 MHz.

La salida del filtro pasabajos y la salida de un oscilador controlado por tensión ("sweep vco" en la Fig. B.12 o el oscilador local O.L. de la Fig. B.10), barrido por una rampa, se combinan en el mezclador/amplificador de 43,4 MHz, de modo que se traslada el espectro de la señal de entrada a la región de 43,4 MHz. En este punto, pueden inyectarse señales ("markers"), que aparecen como líneas en el espectro y sirven de referencia para efectuar mediciones precisas.

La salida del mezclador/amplificador se pasa por un filtro pasabanda de cuarto orden, centrado en 43,4 MHz. Este filtro elimina las frecuencias espurias (también conocidas como "frecuencias imágenes") antes de atacar la segunda etapa de mezcla. Este segundo mezclador opera a una frecuencia de 32 MHz, trasladando el espectro al rango de 11,4 MHz $(= 43{,}4\text{ MHz} - 32\text{ MHz})$. A la salida de este mezclador, otro filtro pasabanda se encarga de eliminar las frecuencias imágenes antes de atacar la tercera etapa de mezcla, la que, al usar un oscilador de 15 MHz, traslada la frecuencia de modo que caiga en el rango de una red de filtros pasabanda angostos centrados en 3,58 MHz $(\approx 15\text{ MHz} - 11{,}4\text{ MHz})$. Esta sección del analizador contiene varios filtros conectados en serie y en paralelo, que se seleccionan de acuerdo a la tabla de operación que se muestra en la misma Fig. B.12. La primera etapa está formada por tres filtros diferentes, con anchos de banda de 100 Hz, 500 Hz, y 2,5 kHz, respectivamente, y la segunda etapa por un único filtro cuyo ancho de banda puede ajustarse a 20 kHz o 50 kHz. Entre ambas etapas de filtrado se ubica el amplificador de nivel de salida, cuya ganancia puede controlarse con un control en el panel frontal, lo que permite ajustar la magnitud del espectro que se muestra en la pantalla del osciloscopio tanto en el modo lineal como logarítmico.

La salida de la red de filtros centrados en 3,58 MHz se envía a un detector de video lineal o logarítmico, según el modo de operación elegido, y a un circuito de muestreo y retención, para su almacenamiento en memoria digital, o directamente a un par de bornes de salida donde puede conectarse un registrador gráfico de papel.

Para que la imagen en la pantalla del osciloscopio sea estable, la señal demodulada se muestrea y convierte a un formato digital apto para ser almacenado en una memoria. La escritura de los datos en memoria puede ser muy lenta, dependiendo de la velocidad de barrido que a su vez es función del rango elegido para el eje de frecuencias. Además, los datos son leídos a una velocidad mayor para poder presentar una imagen estable en la pantalla del osciloscopio. Osciladores auxiliares y una serie de divisores de frecuencia generan las señales necesarias para las operaciones de escritura y lectura de la memoria, y el manejo de la pantalla.

La unidad de salida del analizador produce tres señales. La primera señal contiene la

información vertical necesaria para graficar el espectro, y puede ser enviada tanto al osciloscopio como a un registrador gráfico. Esta señal se produce leyendo los contenidos de la memoria, y convirtiendo cada valor con un conversor digital/analógico. La segunda señal de salida es una rampa cuya frecuencia es diferente según sea la escala de frecuencias seleccionada para el eje horizontal. Esta señal es la encargada de "barrer" el oscilador local y controlar el proceso de escritura en memoria, y se genera conectado un conversor digital/analógico a la salida del contador de 10 bits que se usa como generador de direcciones para la *escritura* en la memoria. Esta rampa es también la señal de salida para el eje horizontal del registrador. Finalmente, la tercera señal generada es una rampa rápida (30 Hz) que provee la señal para el eje horizontal del osciloscopio; esta señal proviene de la salida de un conversor digital analógico conectado al contador de 10 bits encargado de generar las direcciones para la *lectura* de la memoria.

B.5. Experiencias

En las siguientes secciones se muestran los espectros de distintas señales tal como se observan en un analizador espectral analógico. En las gráficas obtenidas con el analizador espectral debe tenerse en cuenta que la componente correspondiente a la frecuencia de 0 Hz no representa el valor de continua de la señal, y es solamente una marca o referencia para ubicar fácilmente la frecuencia origen. En algunos casos, se comparan con los espectros derivados matemáticamente.

Espectro de señales senoidales de distinta frecuencia

En el Ejemplo 2.15 se derivó el espectro de una señal senoidal $x(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \phi)$:

$$X(f) = -j\tfrac{1}{2}Ae^{j\phi}\delta(f - f_0) + j\tfrac{1}{2}Ae^{-j\phi}\delta(f + f_0),$$

cuyo módulo, dado por

$$|X(f)| = \tfrac{1}{2}A\delta(f - f_0) + \tfrac{1}{2}A\delta(f + f_0),$$

está formado por un par de impulsos ubicados en la frecuencia $f = f_0$ y en $f = -f_0$. En la columna izquierda de la Fig. B.13 se muestran la forma de onda temporal y el módulo de espectro de señales sinusoidales reales medidas con un osciloscopio y el analizador espectral estudiado en la Sección B.4. En la columna de la derecha de la misma figura estas señales y espectros se comparan con los calculados analíticamente. La similitud entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas es evidente. La diferencia más notable es que el espectro medido exhibe un pulso de ancho finito centrado en las frecuencias $f = \pm f_0$ en lugar del impulso teórico. Este pulso frecuencial es la respuesta del filtro pasabanda, de frecuencia intermedia o de análisis del analizador espectral, cuyo ancho de banda limita el ancho de banda de resolución del analizador. El pulso de mayor amplitud localizado en el origen del eje de frecuencias no necesariamente indica la presencia de una componente de continua, y su finalidad principal es indicar el punto $f = 0$.

En las imágenes temporales la escala del eje de tiempos es de 0,5 ms/div, y en los espectros la escala del eje de frecuencias es de 1 kHz/div. La escala de amplitud de los

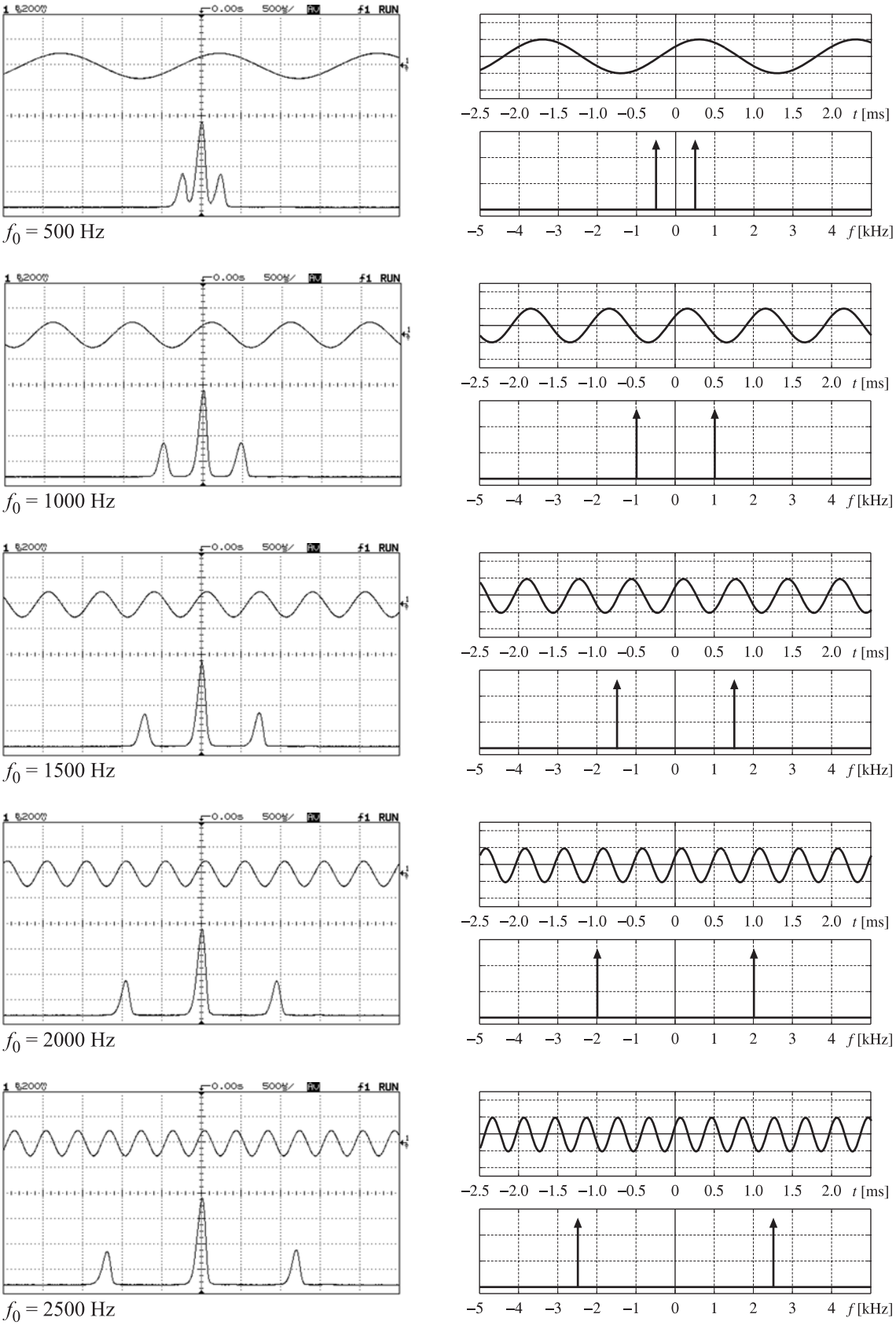


Fig. B.13. Señales sinusoidales de distintas frecuencias y sus espectros.

espectros no se especifica porque en general no interesa el valor absoluto de la amplitud, sino el valor relativo entre diferentes componentes espectrales.

Espectro de ondas cuadradas de distinta frecuencia

El espectro de una onda cuadrada de período $T_0 = 1/f_0$ y ciclo de trabajo $d = \tau/T_0$, definida como

$$r(t) = \begin{cases} 1, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ 0, & \text{para el resto del período,} \end{cases}$$

está dado por (Ejemplo 2.16)

$$R(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d\,\text{sinc}(d\,k)\;\delta(f - k f_0)\,. \tag{B.2}$$

Para un ciclo de trabajo $d = 1/2$ el módulo del espectro resulta

$$|R(f)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2}\,|\text{sinc}(k/2)|\;\delta(f - k f_0)\,,$$

que está formado por impulsos ubicados en frecuencias múltiplos de $\pm f_0$, cuya amplitud está modulada por una función sinc(·). La expresión anterior revela que, debido a la simetría de media onda, se anulan todas las armónicas pares del espectro.

En la Fig. B.14 se comparan las formas de onda temporales y los espectros medidos y calculados de ondas cuadradas de diferentes frecuencias. Nuevamente, la similitud entre los resultados experimentales y los cálculos teóricos es notable, siempre teniendo en cuenta que los pulsos de ancho finito que aparecen en los espectros medidos en lugar de los impulsos teóricos se deben al ancho de banda del filtro de análisis del analizador. En los espectros es evidente la presencia de componentes armónicas, y la separación relativa entre ellas revela la ausencia de las armónicas pares. Además, a medida que cambia la frecuencia fundamental de la señal, varía la ubicación de los picos pero la amplitud relativa se mantiene constante.

En las imágenes temporales la escala del eje de tiempos es de 0,5 ms/div, y en los espectros la escala del eje de frecuencias es de 1 kHz/div.

Espectro de una onda cuadrada con diferentes ciclos de trabajo

El espectro de una onda cuadrada de período $T_0 = 1/f_0$ y ciclo de trabajo $d = \tau/T_0$ tiene la expresión indicada en la ecuación (B.2). Está formado por impulsos separados f_0 unidades de frecuencia, y su amplitud está modulada por una función tipo sinc(·) que depende del ciclo de trabajo d.

En la Fig. B.15 se muestran ondas cuadradas de período $T_0 = 0{,}1$ ms (frecuencia fundamental de $f_0 = 1/T_0 = 10$ kHz) con ciclos de trabajo comprendidos entre el 10 % y el 50 %, y sus espectros. En la columna de la izquierda se reportan las mediciones realizadas con un osciloscopio y el analizador espectral de la Sección B.4, y en la columna de la derecha se muestran las señales y sus espectros derivados analíticamente.

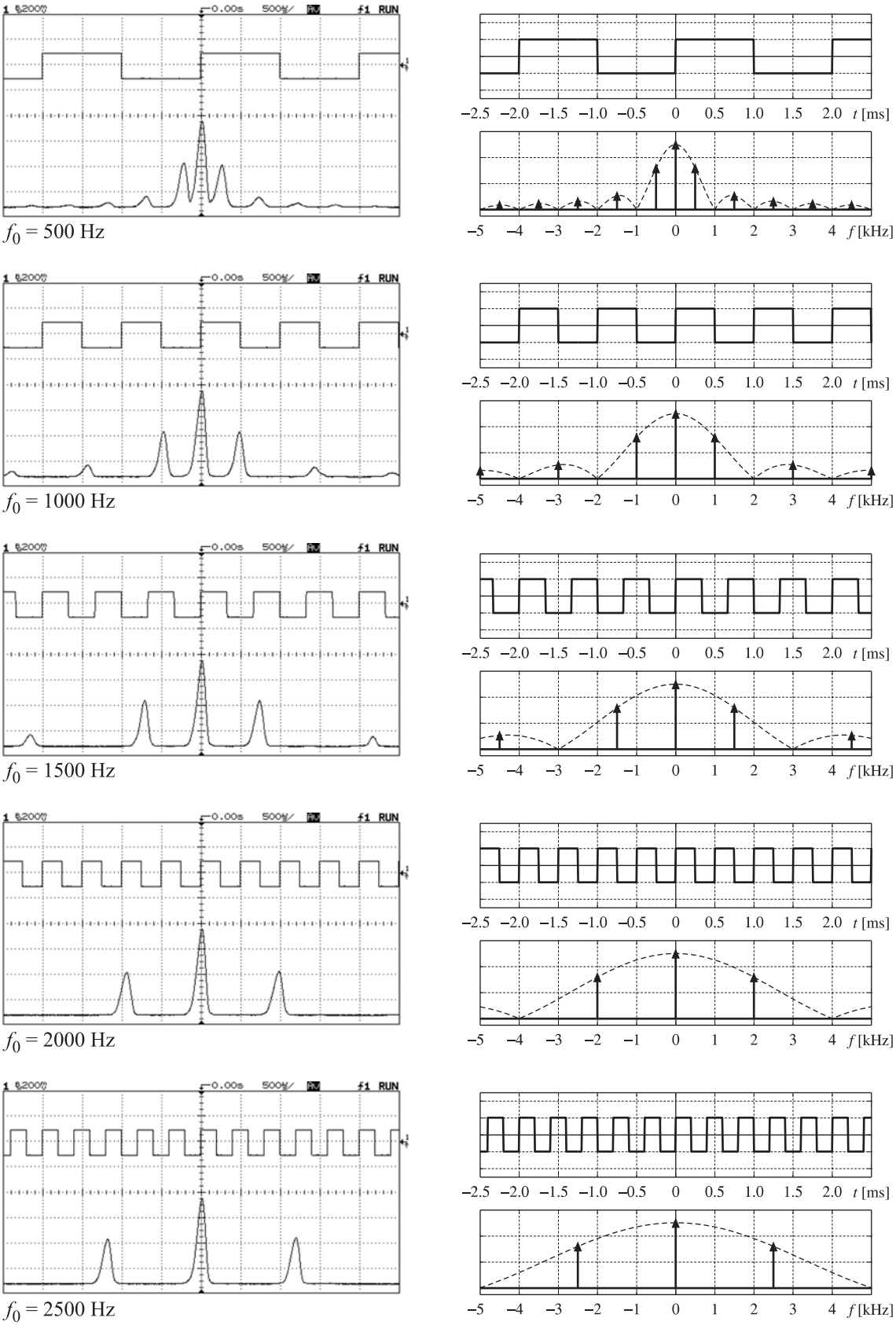


Fig. B.14. Ondas cuadradas de distintas frecuencias y sus espectros.

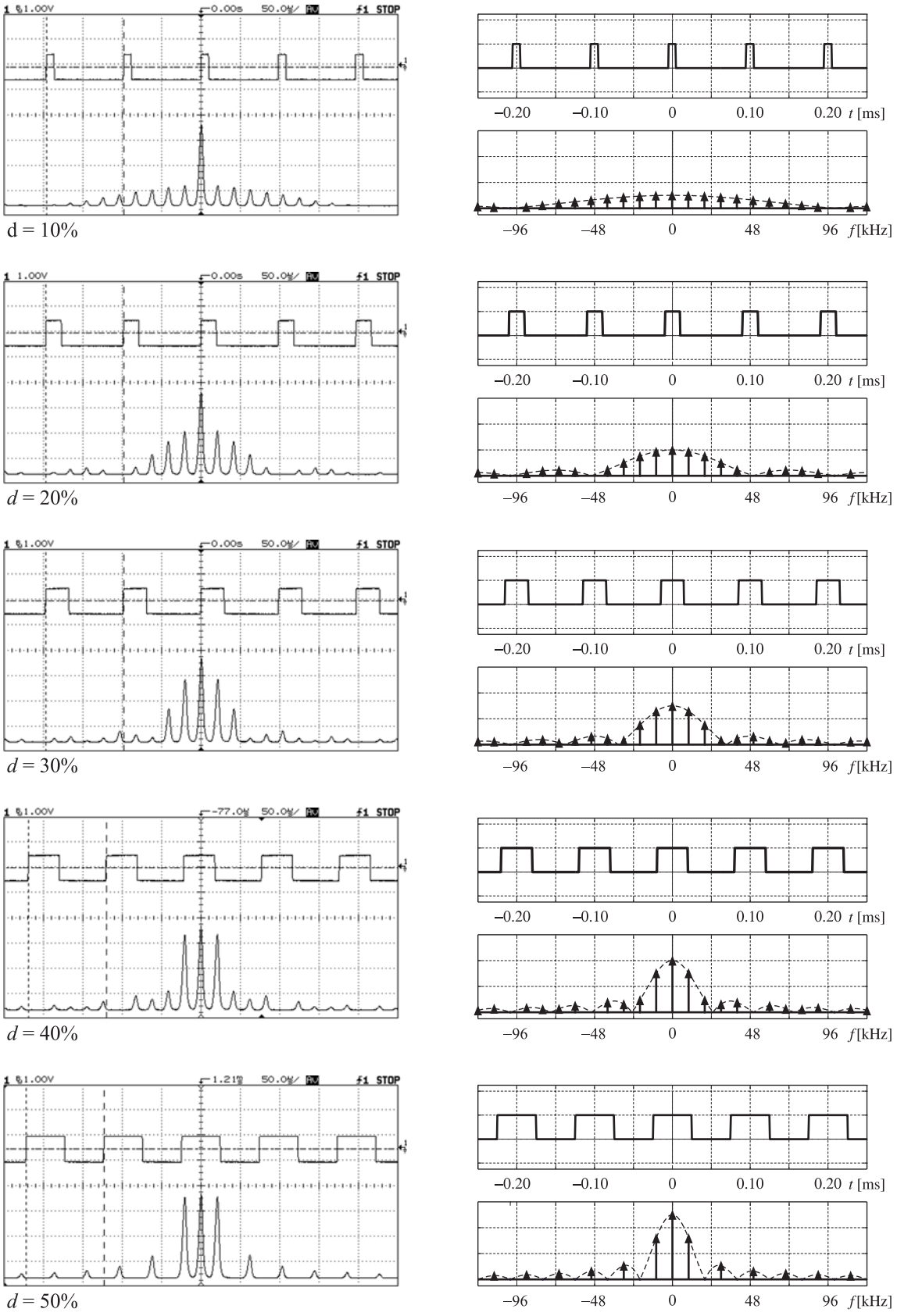


Fig. B.15. Onda cuadrada de 10 kHz y su espectro, para distintos ciclos de trabajo.

Los espectros medidos y teóricos tienen gran similitud, aunque en las gráficas del analizador espectral los "impulsos" correspondientes a las distintas armónicas tienen un ancho finito, debido al ancho de banda del filtro de análisis del instrumento. Los equipos de mayor calidad tienen filtros de ancho de banda ajustable para mejorar la resolución frecuencial.

Las gráficas espectrales muestran la influencia del ciclo de trabajo d en la amplitud de los impulsos. Para valores de d pequeños la envolvente tipo sinc$(\cdot)$ decae lentamente, y la amplitud de todos los "impulsos" es pequeña. A medida que aumenta el ciclo de trabajo, disminuye la relación de amplitud entre las armónicas adyacentes porque le envolvente decae más rápidamente, y cobran más importancia los armónicos de baja frecuencia. El ciclo de trabajo condiciona la aparición o no de algunas armónicas: para la señal con ciclo de trabajo50 % están ausentes las armónicas pares, y para las señales con ciclo de trabajo de 20 % y 40 % no se observan las armónicas de orden quinto, y sus múltiplos. A pesar que el analizador espectral utilizado no es de muy buena calidad, se pueden detectar fácilmente armónicas de hasta de orden 12.

La escala del eje de tiempos es de 50 μs/div, y la del eje de frecuencias de 24 kHz/div.

Espectro de un tren de tonos (ráfaga o "burst")

Un tren de tonos o ráfaga $b(t)$ está formada por una onda senoidal o portadora $x_p(t)$ modulada por una onda cuadrada $r(t)$. Esta modulación puede pensarse como el producto de la onda senoidal de la frecuencia del tono por la onda cuadrada que fija la duración y tasa de repetición. En consecuencia, el espectro de esta señal es la *convolución* de los espectros de la señal senoidal, y de la onda cuadrada.

El espectro de una señal senoidal $x_p(t) = A\cos\left(2\pi f_p t\right)$, de frecuencia f_p, es

$$X_p(f) = \frac{A}{2}\delta\left(f + f_p\right) + \frac{A}{2}\delta\left(f - f_p\right). \tag{B.3}$$

El espectro de una señal cuadrada de período $T_0 = 1/f_0$ y ciclo de trabajo $d = \tau/T_0$ está dado por (B.2). Por lo tanto, si el tren de tonos $b(t)$ es $b(t) = r(t) \times x_p(t)$, su espectro será $B(f) = R(f) * X_p(f)$, y según las ecuaciones (B.2) y (B.3),

$$B(f) = \frac{A}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d\,\mathrm{sinc}(d\,k)\,\left[\delta\left(f - f_p - k\,f_0\right) + \delta\left(f + f_p - k\,f_0\right)\right].$$

El espectro es discreto, y su envolvente es la de dos sinc$(\cdot)$, centradas en las frecuencia $\pm f_p$, respectivamente.

En la Fig. B.16 se muestran diferentes trenes de tonos de $f_p = 100$ kHz, con duraciones desde $\tau = 10$ μs hasta $\tau = 50$ μs. En este caso, la señal portadora tiene una frecuencia de $f_p = 100$ kHz y la onda cuadrada moduladora es de frecuencia de $f_0 = 1/T_0 = 10$ kHz, con ciclos de trabajo τ/T_0 que van del 10 % al 50 %.

En las figuras de la izquierda se observan dos trazos, que corresponden a la señal temporal (trazo superior), y el espectro del tren de tonos (trazo inferior). El espectro de esta señal corresponde efectivamente a la convolución del espectro de una señal sinusoidal (un par de impulsos en $\pm$100 kHz) con el espectro de una señal cuadrada de 10 kHz

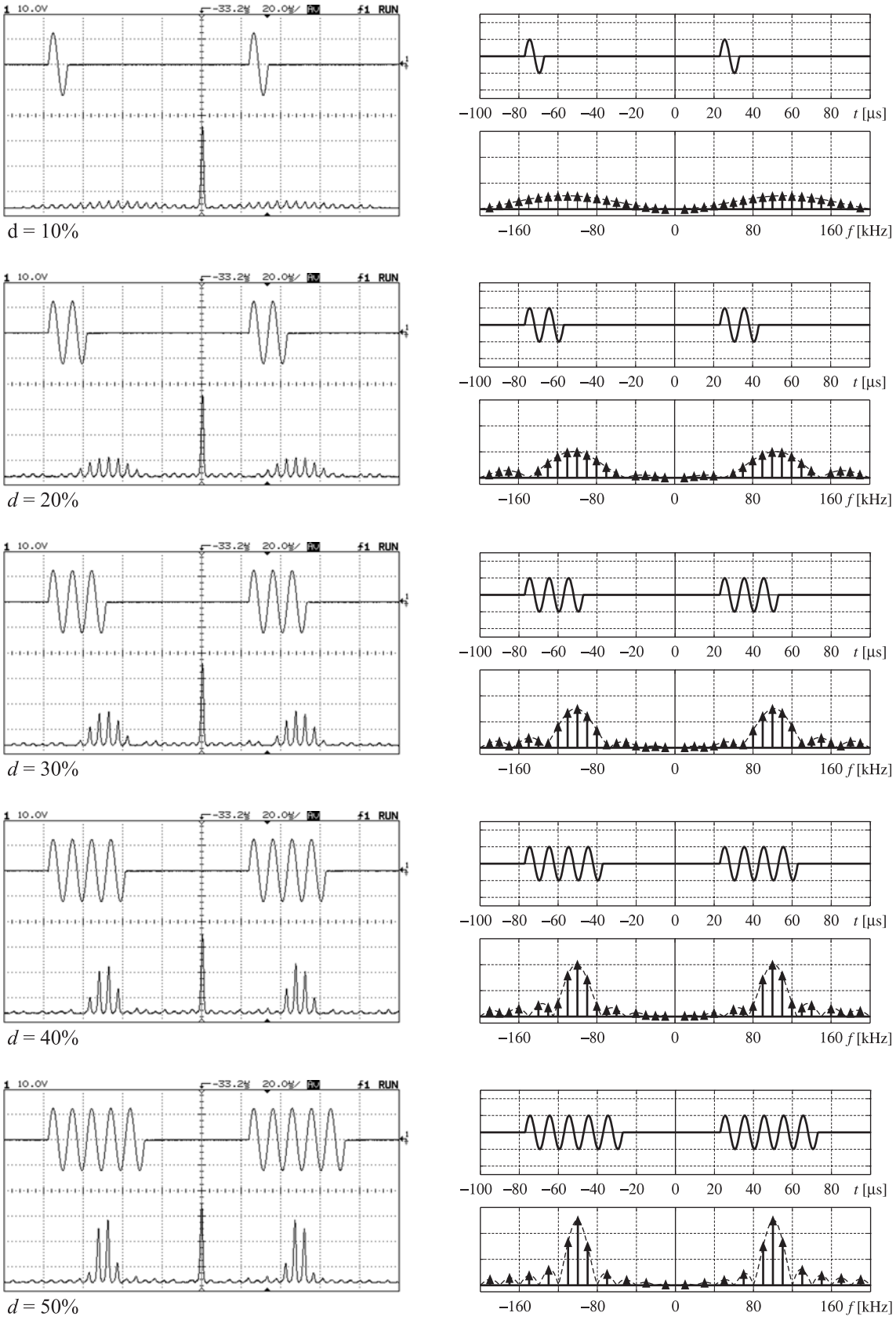


Fig. B.16. Trenes de pulsos con distintos ciclos de trabajo y sus espectros.

(impulsos en las frecuencias múltiplos de 10 kHz, modulados por un sinc(·) cuya amplitud y extensión depende del ciclo de trabajo de la onda cuadrada). De esta forma se pueden comprender algunos fenómenos que serían difíciles de interpretar a partir de una derivación puramente matemática. Por ejemplo, la ausencia de las armónicas pares de la onda cuadrada de 10 kHz para la señal con ciclo de trabajo de 50 % (fila inferior).

La relación entre la frecuencia portadora y la moduladora puede obtenerse en base a la distancia entre las distintas armónicas y el pico correspondiente a 100 kHz. La frecuencia de la moduladora está dada por la separación entre los picos del espectro. A medida que disminuye la duración de la ráfaga o "burst" (o bien el ciclo de trabajo de la señal moduladora) la envolvente de los pulsos disminuye en amplitud, pero se hacen más relevantes las componentes de frecuencias superiores. La forma de la envolvente tipo sinc(·) es evidente.

En los espectros, la falta de simetría de los impulsos vecinos a la frecuencia de la portadora de 100 kHz se explica por la influencia que las "colas" de uno de los sinc(·) ejerce sobre el otro. En los espectros medidos la influencia es mayor porque los sinc(·) se convolucionan con la respuesta impulsiva del filtro del analizador que tiene un ancho de banda finito.

En la columna de la derecha de la Fig. B.16 se muestra el módulo de los espectros calculados matemáticamente. Nuevamente, la similitud entre ambos resultados es notoria. La escala del eje de tiempos es de 20 μs/div, y la del eje de frecuencias de 40 kHz/div.

Espectro de una señal ASK

Una de las maneras más sencillas de transmitir información digital es utilizando una modulación de amplitud, representando el "1" lógico con un tono de una frecuencia determinada, y el "0" lógico con ausencia de señal. Este protocolo se conoce como ASK (*Amplitude Shift Keying* en inglés), y tiene buenas características para bajos volúmenes de tráfico. Una aplicación típica son los modems por onda portadora utilizados, por ejemplo, para automatización hogareña, donde distintos dispositivos intercambian información a baja velocidad por el cableado de la línea eléctrica con el propósito de controlar de manera remota sistemas de iluminación, accionamientos, sensores, etc.

La señal ASK es muy similar al tren de tonos comentado en la sección anterior, y por lo tanto el espectro tiene las mismas características. En la Fig. B.17(a) se muestra una portadora de 115.2 kHz modulada por una onda cuadrada de 300 Hz, y en la Fig. B.17(b) una parte de su espectro en el rango de frecuencias comprendido entre 105 kHz y 125 kHz. Se distingue claramente la portadora, y las bandas laterales formadas por las armónicas de la señal de 300 Hz. Como el ciclo de trabajo de la moduladora es del 50 %, no se observan las armónicas pares; en la figura se aprecia la distinta separación entre la portadora y las primeras frecuencias laterales de 300 Hz, y entre los armónicos de la moduladora. La escala vertical es de 5 dB por división, y debido a la modulación con onda cuadrada los armónicos decaen muy lentamente, a razón de 2 dB/kHz, ocupando una porción significativa del espectro. En aplicaciones como la descripta más arriba, esto puede dar lugar a interferencias indeseadas con otros equipos, y para evitar inconvenientes las normas internacionales reglamentan el contenido espectral admisible para este tipo de señales.

Para disminuir la ocupación espectral se modifica ligeramente el flanco del pulso siguiendo un perfil tipo "coseno elevado", como se observa en la Fig. B.17(c). Esta transi-

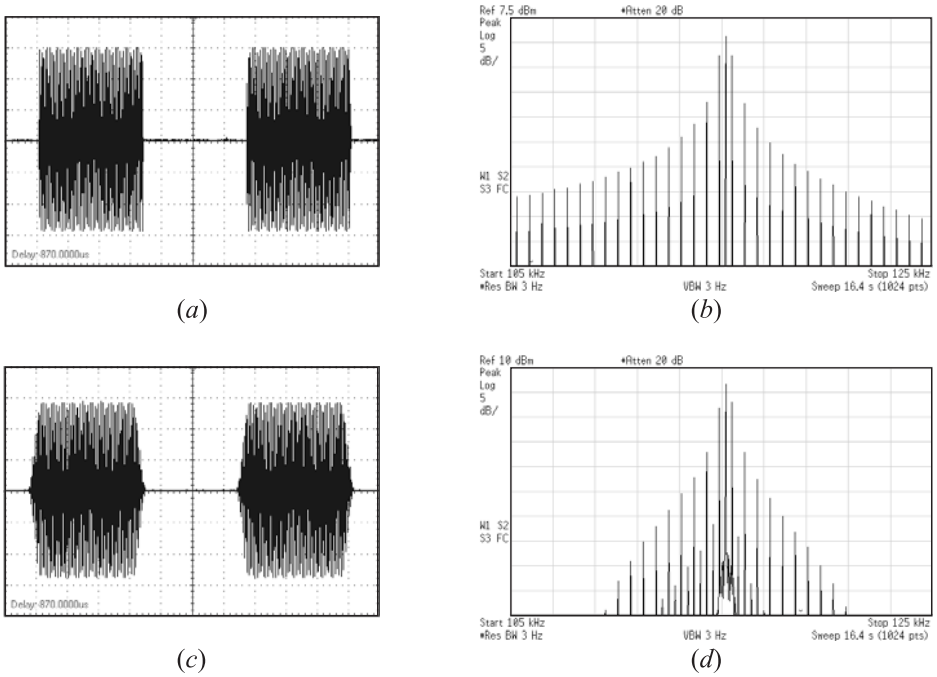


Fig. B.17. Señales y espectros de un modem ASK. Forma de onda de una portadora sinusoidal modulada por una onda cudrada (a) y su espectro (b). Forma de onda ASK con flancos suavizados (c) y su espectro (d).

ción suavizada ocasiona que las bandas laterales decaigan más rápidamente, a razón de 10 dB/kHz, como se muestra en el espectro de la Fig. B.17(d). Estas formas de ondas están generadas por un integrado diseñado para implementar modems por onda portadora, el TDA5051A de Philips.

Espectro de una suma de sinusoides

En este caso se muestra el espectro de una suma de sinusoides de diferente amplitud y frecuencia, tal como se aprecia en la Fig. B.18. La traza superior muestra una señal de 5 kHz, con una amplitud de 1.562 Vpp (traza 1), a la que se suma una señal de 20 kHz, con una amplitud de 20.94 Vpp (traza 2). El canal 3 muestra la suma de las dos señales; salvo por una ligera ondulación, en esta representación temporal es prácticamente imposible distinguir la componente de baja frecuencia.

En la Fig. B.19(a) se aprecia el espectro de esta señal obtenido con un espectrógrafo digital. En este caso, la amplitud de cada pico está relacionada con la potencia en dB de cada señal. La relación entre la amplitud de los picos es un poco más de 2 divisiones (22.81 dB, según el marcador), que se corresponde con la relación de amplitud de $20{,}98/1{,}562 = 13{,}42$ ($= 22{,}56$ dB). En la parte inferior de la figura se observa la posición de los marcadores, que indican que los picos del espectro corresponden a frecuencias de 20.02 kHz y de 4.785 kHz.

En la Fig. B.19(b) se muestra el mismo espectro, pero esta vez obtenido con un espectrógrafo analógico. El eje de frecuencias está ajustado a 5 kHz por división, siendo notorio el pico correspondiente a la señal de 20 kHz. En este caso, como la relación entre las

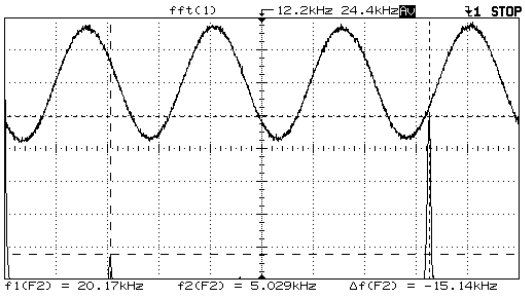
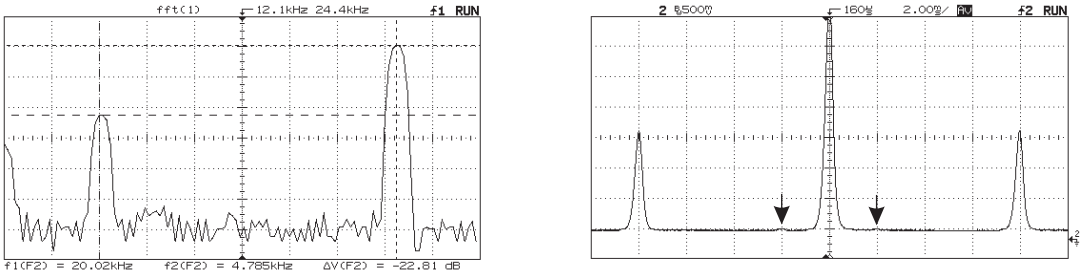


Fig. B.18. Gráfica temporal de señales sinusoidales. Trazo 1: 1.562 Vpp, 5 kHz. Trazo 2: 20.94 Vpp, 20 kHz. Trazo 3: suma de las dos señales anteriores.



(a) (b)

Fig. B.19. Espectro de la suma de sinusoides de la Fig. B.18: imagen de un espectrógrafo digital (a); imagen de un espectrógrafo analógico (b).

amplitudes se representa en forma lineal, es difícil detectar el tono de 5 kHz, que está ubicado en las posiciones indicadas con las flechas. Sin embargo, una observación atenta permite distinguir una ondulación de pequeña amplitud. De todos modos, este tono es indistinguible en la representación temporal de la figura de la Fig. B.18.

Espectro de una señal modulada por un tono

En el trazo superior de la Fig. B.20(a) se muestra una señal de 10 kHz, que modula a una portadora de 100 kHz. Si la señal moduladora es

$$x_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t),$$

y la portadora está dada por

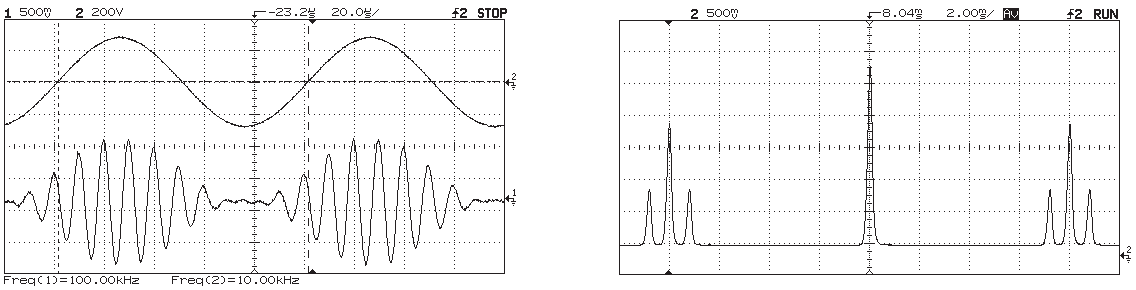
$$x_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t),$$

la señal modulada es

$$x_{MA}(t) = [1 + k_a\, x_m(t)]\; x_p(t)\,,$$

donde k_a es la *sensibilidad de amplitud* del modulador. Si se define el *factor de modulación* (adimensional) $\mu = k_a A_m$, $x_{MA}(t)$ puede escribirse

$$\begin{aligned} x_{MA}(t) &= [1 + \mu \cos(2\pi f_m t)]\, A_p \cos(2\pi f_p t) \\ &= A_p \cos(2\pi f_p t) + \\ &\quad \tfrac{1}{2}\mu A_p \cos\left[2\pi\left(f_p + f_m\right) t\right] + \tfrac{1}{2}\mu A_p \cos\left[2\pi\left(f_p - f_m\right) t\right]. \end{aligned}$$



(a) (b)

Fig. B.20. Modulación con un tono. Señal moduladora (trazo superior) y señal modulada (trazo inferior) (a); Espectro de la señal modulada (b).

Para evitar distorsiones (sobremodulación) debe verificarse que $k_a A_m < A_p$, o bien, que $\mu < 1$. Este tipo de modulación se denomina *modulación de amplitud* (MA). Como el producto de las señales en tiempo se corresponde con la convolución de los espectros en frecuencia, el espectro de la señal modulada $x_{MA}(t)$ será la convolución de los espectros de las señales $x_m(t)$ y $x_p(t)$, sumado al propio espectro de $x_p(t)$. El espectro de $x_m(t)$ es

$$X_m(f) = \tfrac{1}{2} A_m \delta(f - f_m) + \tfrac{1}{2} A_m \delta(f + f_m),$$

y el espectro de $x_p(t)$ está dado por

$$X_p(f) = \tfrac{1}{2} A_p \delta(f - f_p) + \tfrac{1}{2} A_p \delta(f + f_p),$$

por lo que el espectro de $x_{MA}(t)$ será

$$\begin{aligned} X_{MA}(f) \;=\; & \tfrac{1}{2} A_p \delta(f - f_p) + \tfrac{1}{2} A_p \delta(f + f_p) + \\ & \tfrac{\mu}{4} A_p \delta(f - f_p - f_m) + \tfrac{\mu}{4} A_p \delta(f - f_p + f_m) + \\ & \tfrac{\mu}{4} A_p \delta(f + f_p - f_m) + \tfrac{\mu}{4} A_p \delta(f + f_p + f_m). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Los tonos que aparecen en las frecuencias $\pm(f_p + f_m)$ se denominan *bandas laterales superiores*, y los que aparecen en $\pm(f_p - f_m)$, *bandas laterales inferiores.*

La señal modulada se observa en la traza inferior de la Fig. B.20(a). El espectro de esta señal se observa en la Fig. B.20(b). Es claramente visible la componente de ± 100 kHz, y las "bandas laterales" ubicadas en -110 kHz, -90 kHz, 90 kHz y 110 kHz. Nuevamente, el espectro medido en el analizador es muy similar al que resulta de la convolución de los espectros de dos señales sinusoidales. Es sencillo determinar el índice de modulación μ a partir del espectro, ya que de la ecuación (B.4) μ es el doble de la relación entre las amplitudes de las bandas laterales y de la portadora. En efecto, si la amplitud de la banda lateral es A_{BL}, y la de la portadora es A_P, resulta

$$\frac{A_{BL}}{A_P} = \frac{\frac{\mu}{4} A_p}{\frac{1}{2} A_p} = \frac{\mu}{2} \Rightarrow \mu = 2 \frac{A_{BL}}{A_P}.$$

Para el caso de la figura, $\mu \approx 0{,}88$.

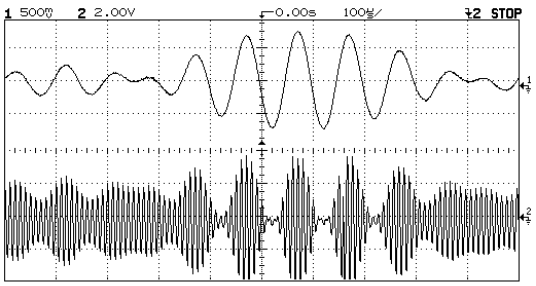
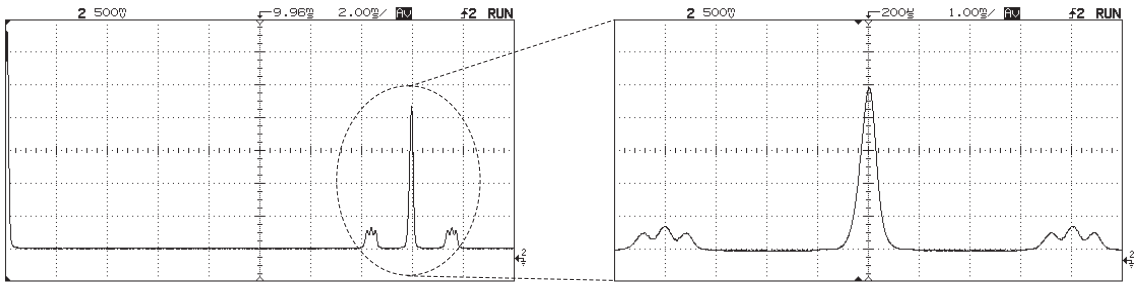


Fig. B.21. Señal moduladora (traza superior) y señal modulada (traza inferior). La señal moduladora es, a su vez, una señal modulada!



(a) (b)

Fig. B.22. Espectro para frecuencias positivas de la señal de la traza inferior de la Fig. B.21 (a). Detalle de la portadora y las bandas laterales (b).

Espectro de una señal modulada por dos tonos

Finalmente, en la traza superior de la Fig. B.21 se muestra una señal modulada por dos señales sinusoidales de 1 kHz y 10 kHz, respectivamente, la que a su vez se utiliza para modular una portadora de 100 kHz. Esta señal se aprecia en la traza inferior de la Fig. B.21.

La parte positiva del espectro de la señal modulada se muestra en la Fig. B.22(a). Se observa la portadora de 100 kHz y las dos bandas laterales a ± 10 kHz de la portadora, cada una de las cuales presenta tres picos, correspondientes a las componentes de la modulación de 1 kHz. En la Fig. B.22(b) se muestra un detalle de la portadora y las bandas laterales, donde se aprecia con más claridad el efecto de la modulación de la señal de 1 kHz.

Estudio de generadores de señales senoidales

El análisis espectral es útil para analizar la calidad de generadores de señales sinusoidales, como los que se utilizan en los laboratorios de electrónica. Estos generadores se construyen de distintas maneras; los más antiguos se basan en osciladores tipo puente de Wien, Colpitts u otro. Algunos más modernos y de bajo costo generan la señal senoidal a partir de la deformación de una onda triangular con circuitos de diodos o transistores; la onda triangular se obtiene por integración de la onda cuadrada generada por un os-

cilador de relajación, basado en la comparación de la carga y descarga de un circuito RC. Cuando se necesita mayor precisión de frecuencia se recurre a generadores que usan lazos de enganche de fase. Otra clase de generadores sintetizan la señal sinusoidal a partir de muestras almacenadas en una memoria barrida repetidamente según la frecuencia de operación requerida.

Cada uno de los métodos de generación tienen sus ventajas e inconvenientes. Por ejemplo, los generadores basados en osciladores tipo puente de Wien o Colpitts exhiben componentes armónicas debido al mecanismo de control de amplitud; lo mismo ocurre con los generadores en que la señal de salida se obtiene a partir del recorte de una onda triangular. En los generadores de lazo de enganche de fase pueden aparecer componentes no armónicas debido a la intermodulación de los distintos osciladores patrones necesarios para barrer todo el rango de frecuencia, etc.

En la Fig. B.23 se muestran algunos de los generadores de señales disponibles en los distintos laboratorios. Para cada modelo se grafica la forma de onda temporal y el espectro de dicha señal. En todos los casos se ha seleccionado una señal de salida sinusoidal con una amplitud aproximada de 10 V pico a pico. Si bien hay algunas pequeñas diferencias entre las distintas formas de onda, es muy difícil deducir la distorsión presente en cada una de ellas a partir de la representación temporal, y menos aún medirla. En cambio, el espectro revela no sólo el nivel de distorsión, sino que también brinda indicios del principio de funcionamiento o compromisos de diseño del generador.

Todos los generadores presentados en la primera parte de la Fig. B.23 (en la página 267) generan la onda senoidal a partir del recorte de una onda triangular. Esto se pone de evidencia en los gráficos de los espectros, que exhiben armónicas importantes (los "picos" ubicados en los múltiplos de 10 kHz), ya que es difícil generar una sinusoidal perfecta utilizando esta técnica. En particular, en la forma de onda temporal del generador Goldstar GF2002C de la Fig. B.23(e) se puede apreciar un pequeño quiebre en el segundo pico de la señal. En el espectro aparecen además tanto las armónicas pares como impares, lo que indica una falta de simetría de la forma de onda.

El resto del espectro es indicativo del nivel de ruido presente a la salida. El generador GW GFG8015 de la Fig. B.23(b) es uno de los que tiene menor piso de ruido, mientras que en el Krohn-Hite 1200A de la Fig. B.23(a) el nivel de ruido es superior. Una comparación detallada de estos dos espectros revela otra característica interesante: mientras el ruido del generador GW GFG8015C es prácticamente plano, en función de la frecuencia, en el generador Krohn-Hite 1200A este piso de ruido se incrementa en cercanías de la frecuencia fundamental. Este efecto se debe a pequeñas variaciones en la frecuencia del oscilador, como también se pone de manifiesto en el mayor ancho de las armónicas de 10 kHz.

También son de interés los espectros de los generadores BK Precision 2030 de la Fig. B.23(c), y el Goldstar GF2002C de la Fig. B.23(e) , ya que sus espectros exhiben gran cantidad de armónicas de menor amplitud y frecuencia entre las armónicas de 10 kHz. Para el caso del generador BK Precision 2030 de la Fig. B.23(c) estas armónicas de aproximadamente 1 kHz pueden deberse a fugas del oscilador local utilizado para generar modulación de amplitud. En el caso de generador Goldstar, que cuenta con una pantalla digital para indicar la frecuencia de la señal, podría deberse a los relojes de la lógica digital necesaria para comandar el frecuencímetro.

Por último, el generador Topward GF8140 la Fig. B.23(d) presenta algunos efectos extraños, como los picos en el piso de ruido ubicados en los 40 kHz, 50 kHz y 90 kHz, como

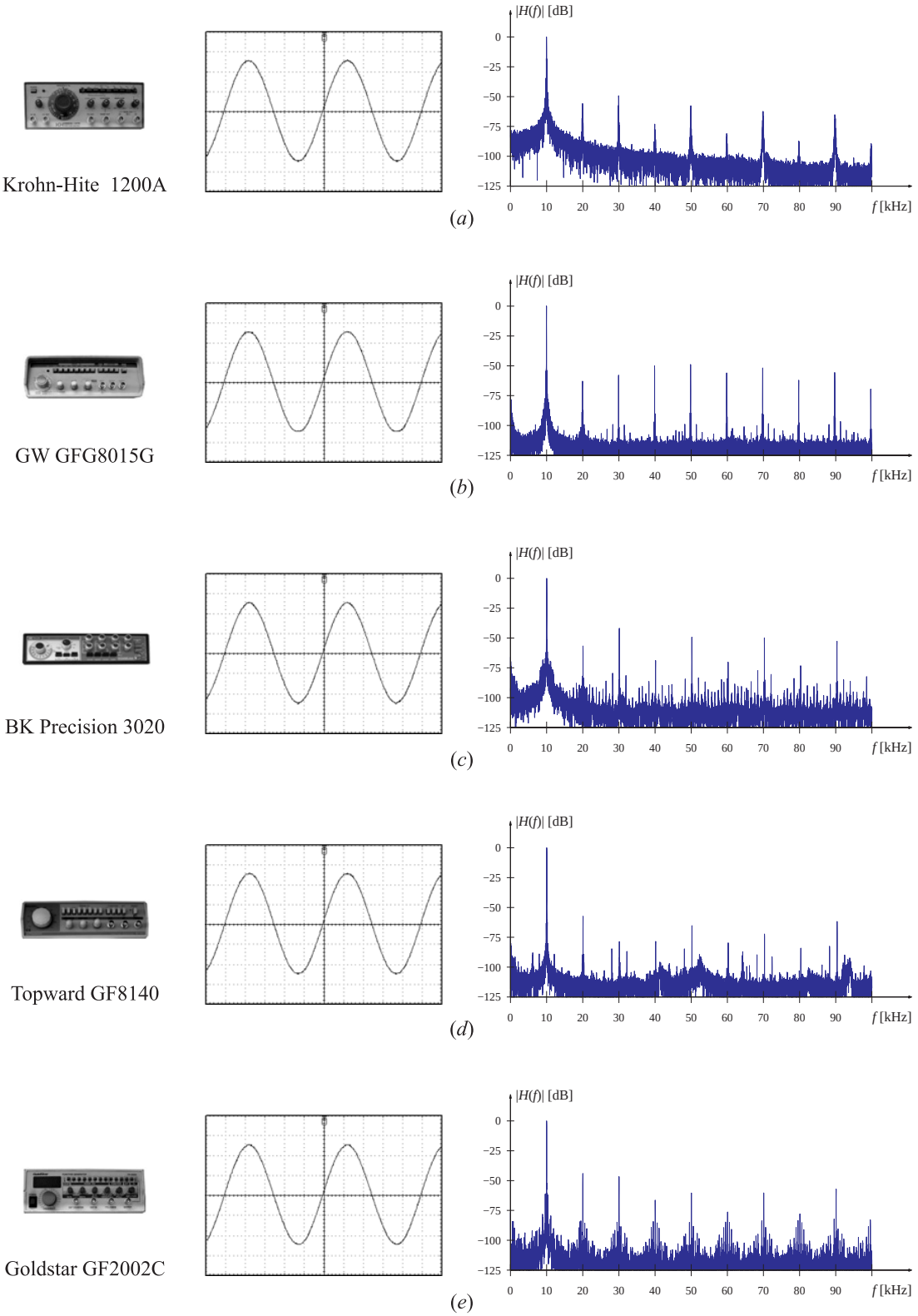
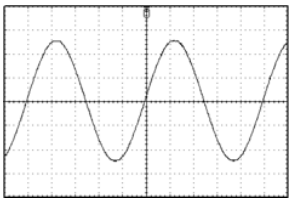
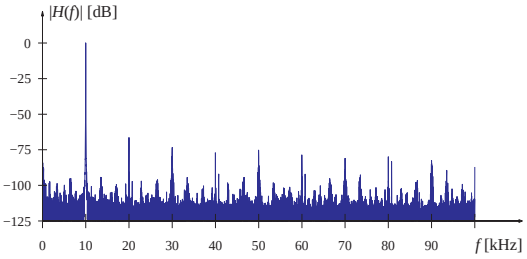


Fig. B.23. Algunos generadores comerciales, ajustados para una señal de salida senoidal de 10 kHz, mostrando la forma de onda temporal y su espectro.



GW Instek SFG2004

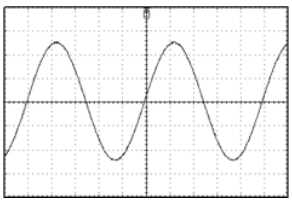


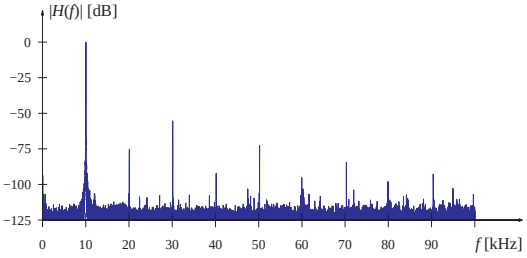


(*f*)



HP 200CD

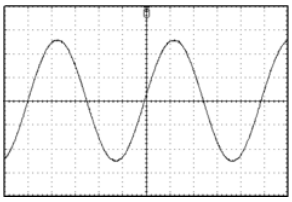


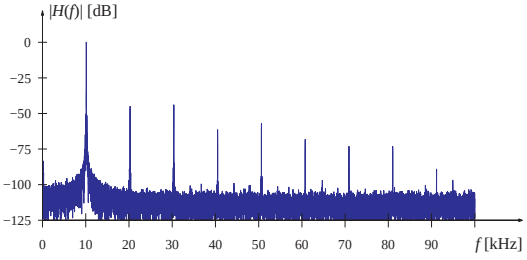


(*g*)



HP 8116A

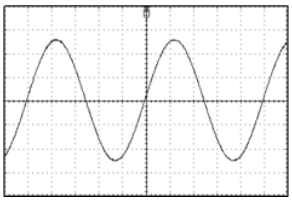


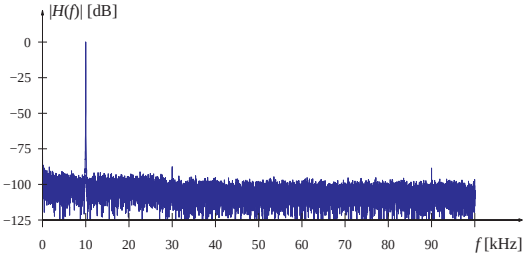


(*h*)



HP 3326A

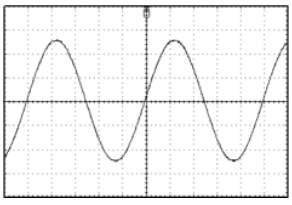


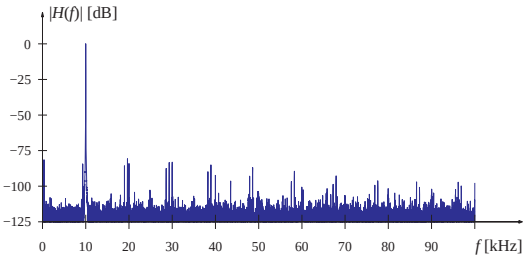


(*i*)



Agilent 33220A





(*j*)

Fig. B.23 (continuación).

así también algunas componentes de frecuencias espurias entre medio de las armónicas de 10 kHz.

En conclusión, de este lote de generadores el que tiene mejor desempeño respecto al nivel de ruido es el GW GFG 8015C de la Fig. B.23(b) , aunque tiene algunas componentes armónicas de amplitud importante.

En la continuación de la Fig. B.23 (en la página 268) se muestra el desempeño de otro conjunto de generadores de señales. Con la excepción del generador Hewlett-Packard 200 CD la Fig. B.23(g), los demás son equipos mucho más avanzados y elaborados que los listados en la página 267: su funcionamiento está basado en la síntesis digital de frecuencia, y por lo tanto son muy estables en el tiempo. Además tienen mayor pureza espectral (menor cantidad de componentes frecuenciales fuera de las armónicas) o armónicas de menor amplitud. En particular, éste es el caso del generador GW Instek SFG 2004, que si bien tiene un nivel de ruido importante, las armónicas de la fundamental tienen amplitudes relativas cercanas a -75 dB. Sin embargo, hay algunas componentes de frecuencias extrañas, por ejemplo cerca de los 45 kHz y cerca de los 65 kHz.

Un generador interesante es el Hewlett Packard 200CD en la Fig. B.23(g). Este es un equipo valvular, de alrededor de 1952, basado en un oscilador tipo puente de Wien. Se destaca por su bajo nivel de ruido, y armónicas de pequeña amplitud, que se ocasionan en el sistema de control de amplitud. Por otra parte, las líneas espectrales muy angostas revelan una buena estabilidad en frecuencia, comparado, por ejemplo, con el generador Krohn-Hite la Fig. B.23(a) . Es notable que un instrumento de esta antigüedad conserve un nivel de desempeño tan destacado, lo que es indicativo de la calidad de su construcción.

El generador Hewlett Packard 8116A la Fig. B.23(h) es de mediados de la década del 70. Es uno de los primeros generadores sintetizados programable. Si bien el espectro muestra unas componentes armónicas de amplitud importante, el piso de ruido es más uniforme, aunque no necesariamente menor, que los generadores listados en la página 267.

En la Fig. B.23(i) se muestra el desempeño del generador Hewlett Packard 3326A. También es un equipo de la década del 70, y en realidad consta de un par de generadores acoplados que se pueden barrer simultáneamente manteniendo constante una diferencia de frecuencia, o variar con extremada precisión la fase de una de las salidas respecto de la otra. Si bien tiene un piso de ruido no menor, de alrededor de los -100 dB, es el generador de mayor pureza espectral, y casi no se observan armónicas de la señal.

El generador Agilent 33220A, que se muestra en la Fig. B.23(j) es el más moderno de todos los presentados, de mediados de la década del 80. Es un generador sintetizado con muy bajo nivel de ruido, aunque tiene algunas componentes frecuenciales espurias, además de las armónicas de la señal, pero de muy pequeño nivel.

Para facilitar la comparación de los distintos generadores se calculó la distorsión y el nivel de ruido de la salida. Aunque en los gráficos de los espectros es sencillo distinguir qué es ruido y qué es distorsión, algorítmicamente esto es un poco más complejo. Por simplicidad se calculó la distorsión en base a la contribución de los armónicos de la frecuencia fundamental. El índice d de distorsión armónica, también conocido como distorsión armónica total (DAT), se define como

$$d = \frac{x_{ef} - y_{ef}}{x_{ef}},$$

Tabla B.1: Características distintivas de algunos generadores de señales.

Generador	Tipo	Rango	Distorsión %	Distorsión dB	Ruido dB
Krohn-Hite 1200A	recorte	0.200 Hz a 3.0 MHz	0,412	−47,70	−91,87
GW GFG8015G	recorte	0.200 Hz a 2.0 MHz	0,536	−45,41	−115,64
BK Precision 3020	recorte	0.020 Hz a 2.0 MHz	0,955	−40,40	−104,09
Topward G8149	recorte	0.100 Hz a 10.0 MHz	0,170	−55,39	−109,58
Goldstar FG2002C	recorte	0.020 Hz a 2.0 MHz	0,823	−41,70	−113,58
GW Instek SFG2004	sintetizado	0.100 Hz a 4.0 MHz	0,055	−65,14	−115,24
Hewlett Packard 200CD	puente	5.000 Hz a 0.6 MHz	0,169	−55,42	−120,72
Hewlett Packard 8116A	sintetizado	0.001 Hz a 50.0 MHz	0,785	−42,10	−108,96
Hewlett Packard 3326A	sintetizado	0.001 Hz a 13.0 MHz	0,007	−82,67	−103,44
Agilent 33220A	sintetizado	1.000 μHz a 20.0 MHz	0,013	−77,69	−120,14

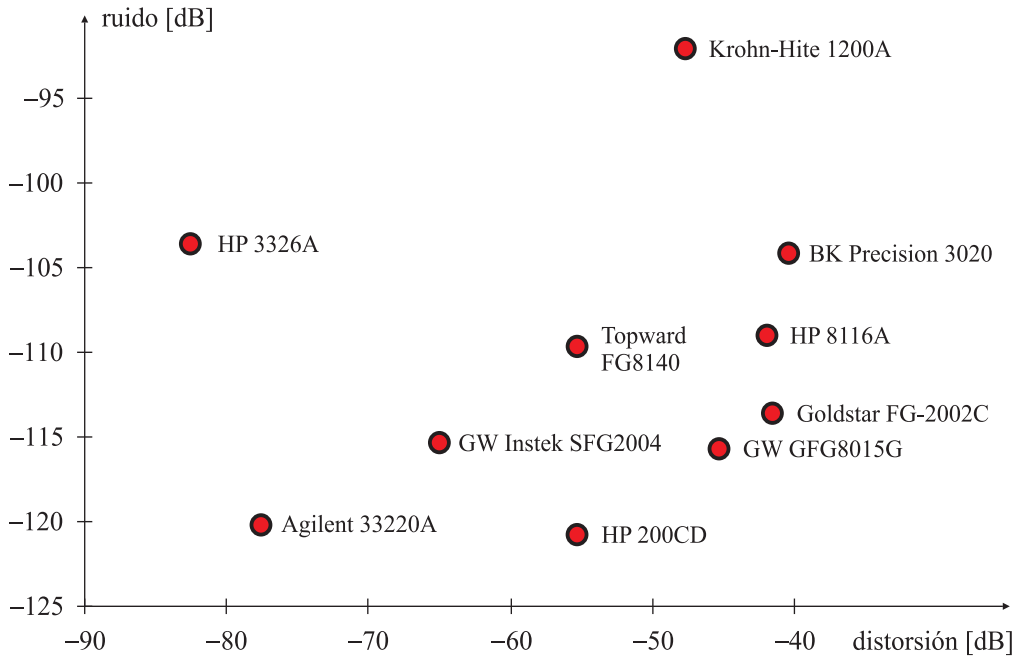


Fig. B.24. Caracterización de los generadores en función del nivel de ruido y del índice de distorsión. Los "mejores generadores" son los ubicados en el extremo inferior izquierdo del gráfico.

donde x_{ef} es el valor eficaz de la señal pura e y_{ef} el valor eficaz de la señal con distorsión. Para el caso de señales sinusoidales donde la distorsión está generada únicamente por los armónicos de la señal, en base a la identidad de Parseval se puede escribir este índice como

$$d = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{c_k}{c_1} \right|^2}$$

donde los c_k son los coeficientes de Fourier de la señal, y se ha despreciado la contribución del armónico c_0 que es el nivel de continua o valor medio de la señal. Esta última expresión permite calcular el índice de distorsión directamente a partir de los gráficos de la Fig. B.23, ya que cada uno de los armónicos observados es la expresión en dB del cociente $|c_k/c_1|$.

El piso de ruido se calculó en base al promedio del resto de las componentes del espectro..

La Tabla B.1 resume los cálculos del valor de distorsión d (en porcentaje y en dB) y el piso de ruido de cada generador. Estos mismos resultados se sintetizan en la Fig. B.24. En esta figura, los generadores con menor nivel de ruido y menor distorsión se ubican en el extremo inferior izquierdo del gráfico. Se evidencian los generadores Hewlett Packard 200CD [Fig. B.23(g)] y Agilent 33220A [Fig. B.23(j)] como aquellos con menor nivel de ruido, y el Hewlett Packard 3326A [Fig. B.23(i)] como el generador con menor nivel de distorsión. Por otra parte, los generadores Krohn-Hite 1200A [Fig. B.23(a)] y BK Precision 3020 [Fig. B.23(c)] son los que tienen desempeño más pobre.

Las mediciones Los espectros de la Fig. B.23(c) se calcularon muestreando la señal temporal con una tarjeta adquisidora Agilent U2353 de 16 bits de resolución, con una frecuencia de muestreo de 500 kHz. Los datos fueron ponderados con una ventana de von Hann, y el espectro calculado con una transformada rápida de Fourier de 65536 puntos. Los detalles de este tipo de implementación se estudiarán más adelante.

B.6. Bibliografía

1. Agilent Technologies, *Spectrum Analysis Basics*, Application Note AN150 (HP publication number 5952-0292), Nov. 1, 1989.

2. Agilent Technologies, *The Fundamentals of Signal Analysis*, Application Note AN243 (HP publication number 5952-8898E), 2000.

3. Brown, C. *Spectrum Analysis Basics*, 1998 Back to Basics Seminar, Hewlett-Packard Co., 1998.

4. Papoulis, A. *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw Hill, 1962.

5. Randall, R. B. *Application of B&K Equipment to Frequency Analysis*, Bruel & Käer, Naerum, Dinamarca, 1977.

C

Demostración experimental del efecto Gibbs

El enfoque de la sección anterior, que considera la expresión de las sumas parciales como resultado de filtrar una onda cuadrada $x(t)$ con un filtro pasabajos (Fig. 2.79) puede reproducirse experimentalmente utilizando un filtro real. La Fig. C.1 muestra el esquema de la experiencia de laboratorio. El filtro es un pasabajos tipo elíptico de orden 8, con ganancia unitaria y una ondulación de 0,1 dB en la banda de paso, y una atenuación mayor a 50 dB en la banda de rechazo, cuya frecuencia de corte puede ajustarse entre 44 Hz y 22 kHz. La experiencia consiste en excitar el sistema con una onda cuadrada de período $T_0 = 10$ ms (frecuencia fundamental $f_0 = 1/T_0 = 100$ Hz), y observar la salida del filtro para distintas frecuencias de corte f_c del filtro pasabajos.

Los resultados del experimento se resumen en la Fig. C.2. En la Fig. C.2(a) se representa la onda cuadrada $x(t)$ que es la entrada al sistema; la escala de tensión es de 400 mV/div, y la escala temporal es de 1 ms/div. En la Fig. C.2(b) se grafica el espectro de esta señal, obtenido con un analizador espectral. La escala de amplitud es de 5 dB/div, y el eje de frecuencias se extiende desde 0 Hz hasta 4.88 kHz. Como la escala vertical es logarítmica no se distingue la envolvente tipo sinc $(\cdot)$. Por otra parte, como la señal $x(t)$ tiene simetría de media onda, no aparecen las armónicas pares. En el espectro se observan componentes armónicas de hasta 4.7 kHz, es decir se puede detectar hasta la 47ma armónica de la frecuencia fundamental $f_0 = 100$ Hz.

Las Figs. C.2(c)-(e) muestran la forma de onda de salida, el espectro y la respuesta impulsiva del filtro cuando la frecuencia de corte se ajusta en $f_c = 600$ Hz. La Fig. C.2(c) revela que la forma de onda de salida presenta un sobrepico del 17 % de la amplitud de la señal de entrada. El filtro anula las componentes frecuenciales superiores a la 5ta armónica, como se aprecia en el espectro de la Fig. C.2(d). El período de las ondulaciones de la señal de salida es similar al de las ondulaciones de la respuesta impulsiva del filtro,

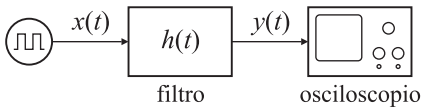


Fig. C.1. Demostración experimental del efecto Gibbs.

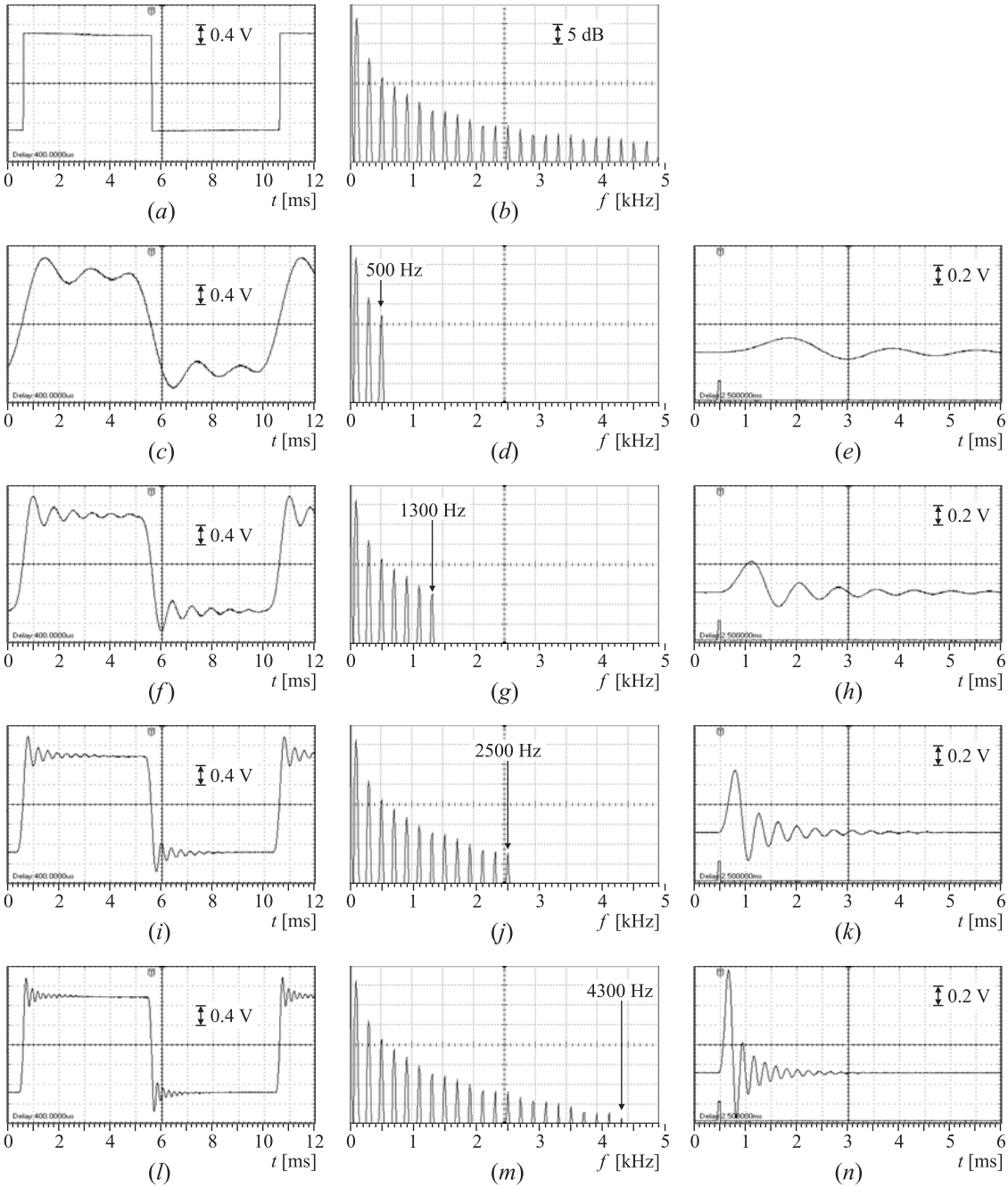


Fig. C.2. Efecto Gibbs en un filtro pasabajos. Señal de exitación $x(t)$ (a). Espectro $X(f)$ (b). Señal de salida $y(t)$, espectro $Y(f)$ y respuesta impulsiva $h(t)$ para el filtro con $f_c = 600\,\text{Hz}$ (c)-(e). Ídem para $f_c = 1400$ Hz (f)-(h). Ídem para $f_c = 2600$ Hz (i)-(k). Ídem para $f_c = 4400$ Hz (l)-(n).

que se representa en la Fig. C.2(e), con una diferente escala temporal (5 ms/div).

El efecto del incremento de la frecuencia de corte del filtro a $f_c = 1400$ Hz se ilustra en las Figs. C.2(f)-(h). La señal de salida está compuesta por las primeras 13 componentes armónicas de la onda cuadrada $x(t)$ de entrada, como revela la Fig. C.2(g). El sobrepico de la salida se mantiene prácticamente de la misma amplitud [Fig. C.2(f)], pero las

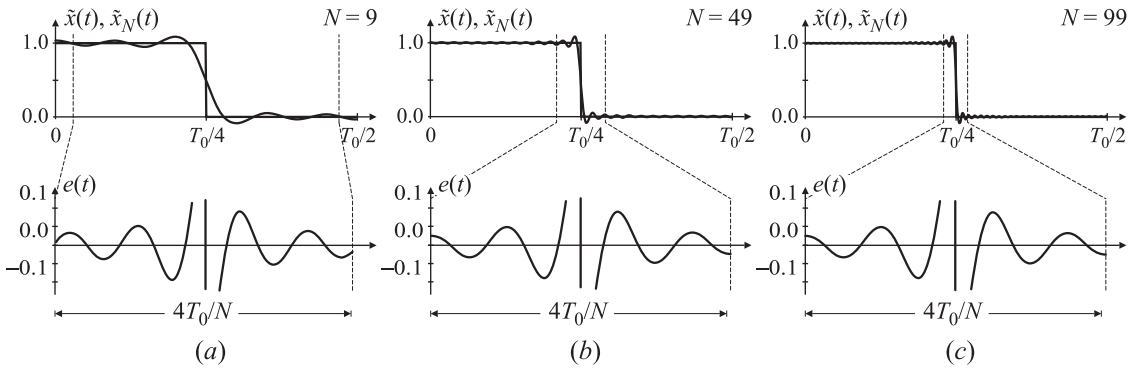


Fig. C.3. Cálculo de la salida $y(t)$ del filtro causal por convolución entre $\tilde{x}(t)$ y $h_c(t)$.

ondulaciones son de menor período, que, nuevamente, coincide con el mostrado por la respuesta impulsiva del filtro, representada en la Fig. C.2(h).

A medida que se aumenta el ancho de banda del filtro pasabajos a $f_c = 2600$ Hz [Figs. C.2(i)-(k)] y a $f_c = 4400$ Hz [Figs. C.2(l)-(n)], la señal de salida incluye la contribución de mayor número de armónicos de la señal de entrada (25 y 43 armónicos, respectivamente). Si bien aumenta la frecuencia de las ondulaciones de la señal de salida, en correspondencia con la forma de onda de la respuesta impulsiva [Figs. C.2(k), C.2(n)], la amplitud del sobrepico queda constante [Figs. C.2(i), C.2(l)].

La sucesión de las formas de onda de la señal de salida $y(t)$ representadas en las Figs. C.2(c), (f), (i), (l) es muy similar a la sucesión de respuestas temporales de la Fig. 2.77. La diferencia más significativa es la ocurrencia del sobrepico *antes* del cambio de amplitud en la señal de entrada en las respuestas de la Fig. 2.77, efecto que está ausente en las formas de onda temporales de la Fig. C.2. Otra diferencia es la amplitud del sobrepico, que para las respuestas de la Fig. 2.77 es de alrededor del 9 %, mientras que para las de la Fig. C.2 es casi el doble (17 %). El motivo de estas discrepancias es que la truncación de la serie de Fourier a una suma finita de $\pm N$ términos es equivalente a un filtrado ideal *no causal*, mientras que la experiencia descrita en esta sección es, necesariamente, el resultado de un filtrado *causal*. Este hecho puede comprobarse comparando las respuestas impulsivas de uno y otro filtro: mientras que la respuesta impulsiva del filtro ideal es una función tipo sinc$(\cdot)$, como se representa en la Fig. 2.79, y por lo tanto no nula para $t < 0$ (esto es, no causal), la respuesta del filtro elíptico de la experiencia es causal, como se observa en las Figs. C.2(e), (h), (k), (n) , que se anulan para $t < 0$. La referencia temporal en estas figuras está dada por el origen del pulso que se observa en la parte inferior de los oscilogramas.

El efecto de "filtrar" la onda cuadrada con un filtro ideal se representa en la Fig. 2.80, donde se muestra la convolución entre $x(t)$ y la respuesta impulsiva del filtro ideal $h(t)$. El sobrepico que ocurre antes del cambio de amplitud de la señal de entrada se debe al efecto anticipatorio causado por la parte no causal de la respuesta impulsiva $h(t)$ del filtro ideal; un ejemplo claro es el cálculo para $t = t_2$ o $t = t_3$ que se muestra en la Fig. 2.80(e), (f). El cálculo de la salida cuando se filtra la señal con un filtro causal se representa esquemáticamente en la Fig. C.3. En este caso, como $h_c(t) = 0$ para $t < 0$, el filtro no puede prever el cambio de amplitud de la señal de entrada.

Reproducir estos resultados de manera analítica es difícil porque la respuesta impulsiva



Fig. C.4. Respuesta impulsiva de un sistema causal (a) y anticausal (b).

$h_c(t)$ del filtro elíptico de orden 8 es matemáticamente complicada. Por este motivo, para analizar el efecto de la causalidad del filtro sobre el fenómeno de Gibbs, se obtendrán las respuestas que resultan de filtrar una onda cuadrada con dos filtros de bajo orden cuya respuesta en frecuencia tenga el mismo módulo pero distinta fase, de modo que sus respuestas impulsivas resulten causales y no causales, respectivamente.

C.1. Filtros causales y no causales con idéntica respuesta de amplitud

El propósito de esta sección es construir sistemas continuos, causales y no causales, cuyas respuestas en frecuencia tengan igual módulo. Una forma posible es a partir de un sistema prototipo causal con respuesta impulsiva real $h_p(t)$ y respuesta en frecuencia $H_p(f)$, es decir que $h_p(t)$ y $H_p(f)$ forman un par transformado

$$h_p(t) \quad \Longleftrightarrow \quad H_p(f). \tag{C.1}$$

Como $h_p(t)$ es causal, $h_p(t) = 0$ para $t < 0$, como se muestra en la Fig. C.4(a). Por lo tanto, $h_p(-t)$ es la respuesta impulsiva de un sistema anticausal, es decir $h_p(-t) = 0$ para $t > 0$ [Fig. C.4(a)] y su respuesta en frecuencia está dada por

$$\mathcal{F}\{h_p(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(-t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(s)e^{-j2\pi f(-s)}ds = H_p(-f) = H_p^*(f),$$

donde la última igualdad es válida sólo si $h(\,\cdot\,)$ es real. Se tiene entonces el par transformado de Fourier

$$h_p(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad H_p^*(f). \tag{C.2}$$

A partir de las relaciones (C.1) y (C.2) se pueden definir tres tipos de sistemas cuya respuesta en frecuencia tiene el mismo módulo:

- un sistema *causal* con respuesta impulsiva $h_c(t) = h_p(t) * h_p(t)$;
- un sistema *anticausal* con respuesta impulsiva $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t)$;
- un sistema *no causal* (bilátero) con respuesta impulsiva $h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t)$.

A continuación se estudian las principales características de estos sistemas derivados del sistema prototipo con respuesta impulsiva $h_p(t)$ y respuesta en frecuencia $H_p(f)$.

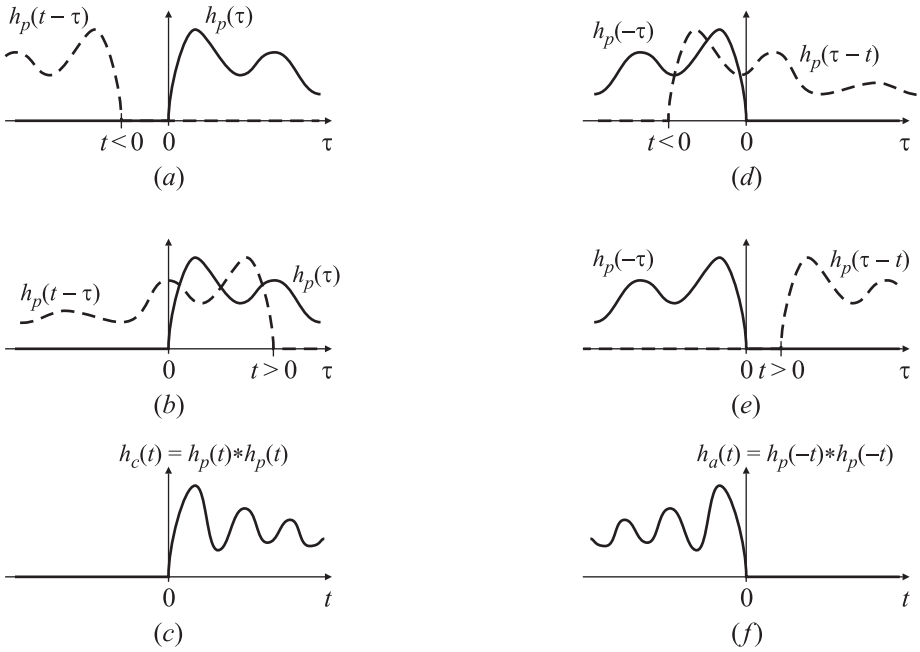


Fig. C.5. Etapas del calculo de la convolución $h_p(t) * h_p(t)$ para derivar el filtro causal $h_c(t)$ $[(a)\text{-}(c)]$ y de $h_p(-t) * h_p(-t)$ para obtener el filtro anticausal $[(d)\text{-}(f)]$.

C.1.1. El sistema causal

El sistema $h_c(t)$ definido por la convolución de la respuesta impulsiva $h_p(t)$ del sistema prototipo con sí misma es causal, porque $h_c(t) = 0$ para $t < 0$. En la Fig. C.5(a) se representa una etapa del cálculo de la convolución, indicando las respuestas $h(\tau)$ y $h(t-\tau)$ para $t < 0$. Como no hay solapamiento, la convolución es nula para todo $t < 0$. Por otra parte, la Fig. C.5(b) muestra la misma etapa para $t > 0$. En este caso sí hay solapamiento, lo que indica que la convolución no es necesariamente nula para $t \geq 0$. De manera que $h_c(t) = h_p(t) * h_p(t)$ es nula para $t < 0$, como se indica en la Fig. C.5(c) , y por lo tanto es causal. En particular, la respuesta impulsiva del sistema $h_c(t)$ se puede calcular como

$$h_c(t) = h_p(t) * h_p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t h_p(\tau) h_p(t-\tau)\, d\tau, & t \geq 0. \end{cases} \tag{C.3}$$

En base al par transformado (C.1) y la propiedad de convolución temporal, se observa que este sistema satisface el par transformado de Fourier

$$h_c(t) = h_p(t) * h_p(t) \quad \Longleftrightarrow \quad H_c(f) = H_p(f) H_p(f) = |H_p(f)|^2 e^{j2\arg\{H_p(f)\}}. \tag{C.4}$$

C.1.2. El sistema anticausal

Se puede obtener un sistema anticausal definiendo sus respuesta impulsiva como $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t)$. Para evitar confusiones se notará $\hat{h}_p(t) = h_p(-t)$. Como $h_p(t) = 0$ para $t < 0$, entonces $h_p(-t) = \hat{h}_p(t) = 0$ para $t > 0$, y por lo tanto también $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t) = \hat{h}_p(t) * \hat{h}_p(t) = 0$ para $t > 0$. En la Fig. C.5(c) se muestra una etapa del cálculo de la convolución para $t < 0$. En este caso, $\hat{h}_c(\tau)$ y $\hat{h}_c(t-\tau) = h_c(-t+\tau)$

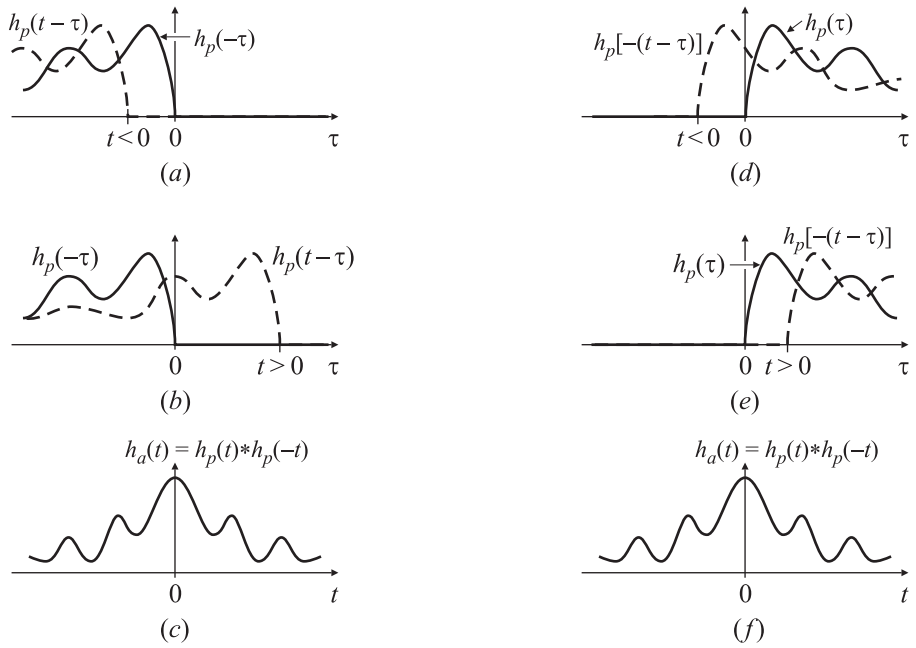


Fig. C.6. Etapas del cálculo de la convolución entre $h_p(t)$ y $h_p(-t)$ para calcular $h_{nc}(t)$, reflejando $h_p(t)$ [(a)-(c)] o $h_p(-t)$ [(e)-(f)].

se solapan siempre para cualquier $t < 0$. Para el caso en que $t > 0$, como se muestra en la Fig. C.5(d) , nunca se produce solapamiento entre $\hat{h}_c(\tau)$ y $\hat{h}_c(t-\tau)$ para $t > 0$. En síntesis, la respuesta impulsiva $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t) = \hat{h}_p(t) * \hat{h}_p(t) = 0$ para $t > 0$, y el sistema es anticausal, como se muestra en la Fig. C.5(e) . En particular, la respuesta impulsiva del sistema $h_a(t)$ se puede calcular como

$$h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t) = \begin{cases} \int_t^0 h_p(-\tau)h_p(\tau - t)\,d\tau, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{C.5}$$

y comparando las ecuaciones (C.3) y (C.5) se observa que

$$h_a(t) = h_c(-t). \tag{C.6}$$

En base al par transformado (C.1) y la propiedad de convolución temporal, se observa que este sistema satisface el par transformado de Fourier

$$h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad H_a(f) = H_p^*(f)^* H_p(f) = H_c^*(f) = |H_p(f)|^2 e^{-j2\arg\{H_p(f)\}}. \tag{C.7}$$

C.1.3. El sistema no causal (bilátero)

Por otra parte, la convolución entre $h_p(t)$ y $h_p(-t)$ no es causal, pero tampoco anticausal, tal como se ilustra en la Fig. C.6(a)-(c) . La Fig. C.6(a) muestra una etapa de la convolución entre $h_p(-\tau)$ y $h_p(\sigma)\big|_{\sigma=t-\tau} = h_p(t-\tau)$, para $t < 0$. Ambas señales se solapan, y por lo tanto el resultado de la convolución, para $t < 0$, no es idénticamente nula. Para el caso $t \geq 0$, ilustrado en la Fig. C.6(b) las señales también se solapan de modo que

tampoco la convolución es necesariamente nula para $t > 0$. Otro punto de vista se representa en la Fig. C.6(d), donde se muestra una etapa de la convolución entre $h_p(\tau)$ y $h_p(-\sigma)\big|_{\sigma=t-\tau} = h_p[-(t-\tau)]$, para $t < 0$, y en la Fig. C.6(e) para $t \geq 0$. En cualquiera de los dos casos hay solapamiento, y en consecuencia, el sistema $h_{nc}(t)$ definido por $h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t)$ no es idénticamente nulo para $t < 0$ o para $t \geq 0$, como se grafica en la Fig. C.6(c) y (f). En otras palabras el sistema no es causal ni anticausal, lo que justifica la denominación *bilátero.* Además, teniendo en cuenta que

$$h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(t-\tau)h_p(-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_p[-(t-\tau)]h_p(\tau)\,d\tau = h_{nc}(-t),$$

resulta que $h_{nc}(t) = h_{nc}(-t)$, es decir, el sistema no causal tiene una respuesta impulsiva simétrica. Por lo tanto, para calcular $h_{nc}(t)$ basta calcular la convolución sólo para $t > 0$, por ejemplo. Se tiene entonces que

$$h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t) = \int_{s}^{\infty} h_p[-(s-\tau)]h_p(\tau)\,d\tau\Big|_{s=|t|}.$$

Aplicando el teorema de la convolución temporal y teniendo en cuenta el par transformado (C.2) se puede establecer que el sistema no causal $h_{nc}(t)$ satisface la relación

$$h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t) \Longleftrightarrow \quad H_{nc}(f) = H_p(f)H_p^*(f) = |H_p(f)|^2. \tag{C.8}$$

Los sistemas $H_c(f)$, $H_a(f)$ y $H_{nc}(f)$ con respuestas impulsivas $h_c(t) = h_p(t) * h_p(t)$ (causal), $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t)$ y $h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t)$ (no causal) definidos en (C.4), (C.7) y (C.8), respectivamente, tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia. Como el sistema no causal $H_{nc}(f)$ tiene fase nula, esta relación y la propiedad de las funciones pares de la Sección 2.5.7 también muestran que $h_{nc}(t)$ debe ser real y simétrica.

Los sistemas $H_c(f)$, $H_a(f)$ y $H_{nc}(f)$ generados de esta forma tienen un orden igual al doble del orden de $H_p(f)$, de modo que siempre resultan de orden par.

EJEMPLO **C.1. Sistema de segundo orden**
Si se parte del par transformado (filtro prototipo de primer orden)

$$h_p(t) = ae^{-2\pi f_c t}u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad H_p(f) = \frac{a}{2\pi f_c + j2\pi f},$$

donde $a > 0$ y $f_c > 0$, se encuentra que el sistema *causal* está caracterizado por la respuesta impulsiva

$$h_c(t) = h_p(t) * h_p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \displaystyle\int_0^t ae^{-\alpha\tau}ae^{-2\pi f_c(t-\tau)}d\tau = a^2te^{-2\pi f_c t} & 0 \leq t, \end{cases}$$

que puede escribirse de manera más compacta como

$$h_c(t) = a^2te^{-2\pi f_c t}u(t).$$

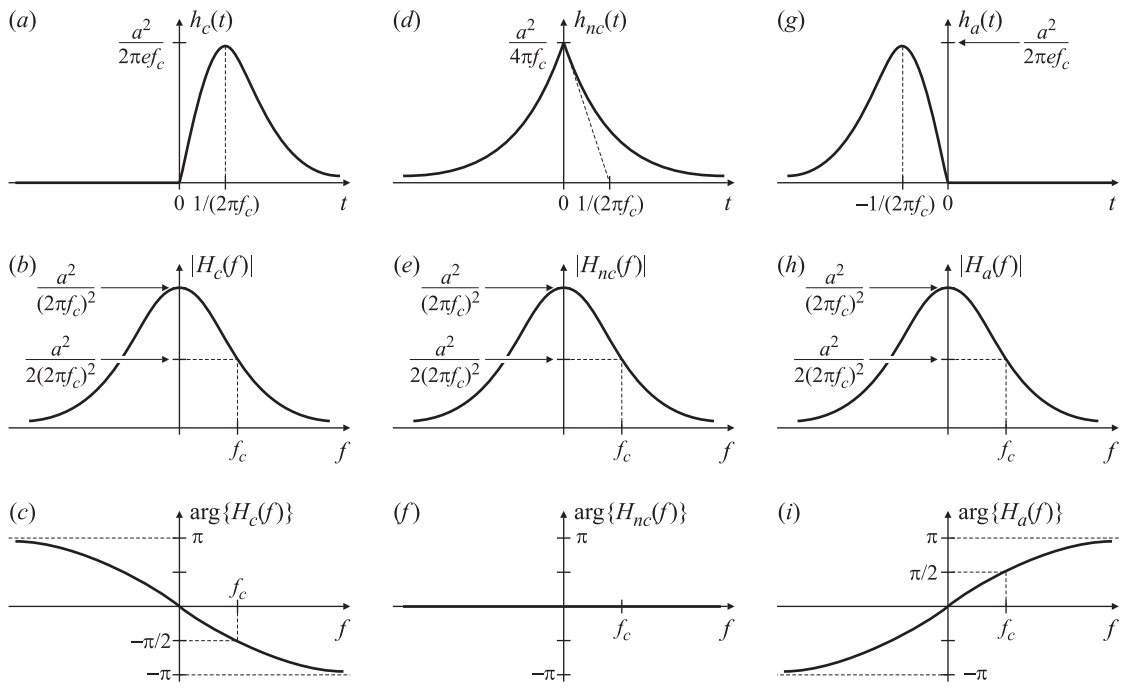


Fig. C.7. Respuesta impulsiva y respuesta en frecuencia de los filtros de segundo orden causales (a)-(c), no causales (d)-(f) y anticausales (g)-(i).

La forma de onda de esta respuesta se representa en la Fig. C.7(a). Tiene un valor máximo de $a^2/(2\pi e f_c)$, que se alcanza en $t = 1/(2\pi f_c)$. Su transformada de Fourier está dada por

$$H_c(f) = \left(\frac{a}{2\pi f_c + j2\pi f}\right)^2 = \frac{a^2}{(2\pi f_c)^2 - (2\pi f)^2 + j4\pi^2 f_c f} = \frac{a^2}{(2\pi f_c)^2 + (2\pi f)^2} e^{-j2\arctan(f/f_c)}. \tag{C.9}$$

Esta respuesta en frecuencia tiene un máximo en $f = 0$, donde vale $a^2/(2\pi f_c)^2$; en $f = f_c$ la amplitud cae a la mitad. El módulo y fase de esta respuesta se muestran en las Figs. C.7(b) y (c), respectivamente.

Por otra parte, el sistema *no causal* (bilátero) está definido por

$$h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t) = \int_s^\infty a e^{-2\pi f_c \tau} a e^{2\pi f_c (s-\tau)} d\tau \Big|_{s=|t|} = \frac{a^2}{4\pi f_c} e^{-2\pi f_c |t|}$$

cuya respuesta temporal, que tiene un máximo en $t = 0$ donde alcanza $a^2/(4\pi f_c)$, se grafica en la Fig. C.7(d). Su transformada de Fourier es

$$H_{nc}(f) = \left|\frac{a}{2\pi f_c + j2\pi f}\right|^2 = \frac{a^2}{(2\pi f_c)^2 + (2\pi f)^2}, \tag{C.10}$$

que se representa en módulo y fase en las Figs. C.7(e) y (f), respectivamente.

Finalmente, de acuerdo con las relaciones (C.6) y (C.7), la respuesta impulsiva del sistema *anticausal* es

$$h_a(t) = h_c(-t) = -a^2 t e^{2\pi f_c t} u(-t)$$

cuya respuesta en frecuencia está dada por

$$H_a(f) = \frac{a^2}{(2\pi f_c)^2 + (2\pi f)^2} e^{j2\arctan(f/f_c)}.$$

Los tres sistemas tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia, $|H_c(f)| = |H_{nc}(f)| = |H_a(f)|$, y sólo difieren de la respuesta de fase. □

EJEMPLO **C.2. Sistema de cuarto orden**
El sistema con respuesta impulsiva (filtro prototipo de segundo orden)

$$h_p(t) = \frac{a}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-2\pi f_c \xi t} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) u(t)$$

tiene transformada de Fourier

$$H_p(f) = \frac{a^2}{(j2\pi f)^2 + j2\xi(2\pi f_c)2\pi f + (2\pi f_c)^2},$$

cuyo módulo y fase están dados por

$$|H_p(f)| = \frac{a^2}{2\pi\sqrt{({f_c}^2 - f^2)^2 + (2\xi f_c f)^2}}, \quad \arg\{H_p(f)\} = -\arctan\left(\frac{2\xi f_c f}{f_c^2 - f^2}\right).$$

El sistema causal de cuarto orden derivado de este sistema prototipo tiene respuesta impulsiva

$$\begin{aligned} h_c(t) &= h_p(t) * h_p(t) \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{t\, e^{-2\pi f_c \xi t}}{\left(1-\xi^2\right)^2} \left[\operatorname{sinc}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) - \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\right] u(t), \end{aligned}$$

para $t > 0$, tal como se muestra en la Fig. C.8(a). La envolvente[1] tiene un máximo en $t = 1/(2\pi f_c \xi)$, donde alcanza el valor $a^2/[4\pi f_c e \xi(1-\xi^2)]$. La respuesta en frecuencia está dada por

$$|H_c(f)| = \frac{a^4/(2\pi)^4}{({f_c}^2 - f^2)^2 + (2\xi f_c f)^2}, \quad \arg\{H_c(f)\} = -2\arctan\left(\frac{2\xi f_c f}{f_c^2 - f^2}\right). \tag{C.11}$$

Esta respuesta en módulo y fase se representa en las Figs. C.8(b) y (c), respectivamente. Tiene un sobrepico en $f = f_c$, donde alcanza $a^4/[(2\xi)^2(2\pi f_c)^4]$; en $f = 0$ el módulo de la respuesta en frecuencia es $a^4/(2\pi f_c)^4$.

La respuesta impulsiva del sistema *no causal* (bilátero) de cuarto orden generado a partir del sistema prototipo es

$$\begin{aligned} h_{nc}(t) &= h_p(t) * h_p(-t) \\ &= \frac{1}{4} \frac{a^2}{2\pi f_c} e^{-2\pi f_c \xi |t|} \left[\frac{1}{\xi} \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, |t|\right)\right]. \end{aligned}$$

La evolución de esta respuesta en función del tiempo se ilustra en la Fig. C.8(d); la envolvente aproximada $a^2 e^{-2\pi f_c \xi |t|}/(8\pi f_c \xi)$ alcanza el máximo en el origen. La respuesta en frecuencia asociada está dada por

$$H_{nc}(f) = \frac{a^4/(2\pi)^4}{({f_c}^2 - f^2)^2 + (2\xi f_c f)^2}, \quad \arg\{H_{nc}(f)\} = 0, \tag{C.12}$$

[1] Por simplicidad, se considera que la envolvente es $a^2 t\, e^{-2\pi f_c \xi t}/[2(1-\xi^2)^2]$, que no es exacta pues $\operatorname{sinc}(\cdot) - \cos(\cdot)$ puede ser mayor que la unidad. La envolvente exacta es $e_c(t) = \frac{a^2}{4\pi f_c} \frac{e^{-2\pi f_c \xi t}}{(1-\xi^2)^{3/2}} \sqrt{4\pi^2 f_c^2 (1-\xi^2) t^2 - 1}$, y alcanza su máximo $e_{\text{máx}} = \frac{a^2}{2\pi f_c \sqrt{2}(1-\xi^2)} \frac{e^{2\xi^2/(1-\xi^2+\sqrt{1-6\xi^2+5\xi^4})}}{\sqrt{-\xi^2+\sqrt{1-6\xi^2+5\xi^4}}}$ en $t_{\text{máx}} = \frac{\xi}{\pi f_c} \left(1-\xi^2+\sqrt{1-6\xi^2+5\xi^4}\right)^{-1}$. Esta simplificación no afecta el argumento principal del desarrollo.

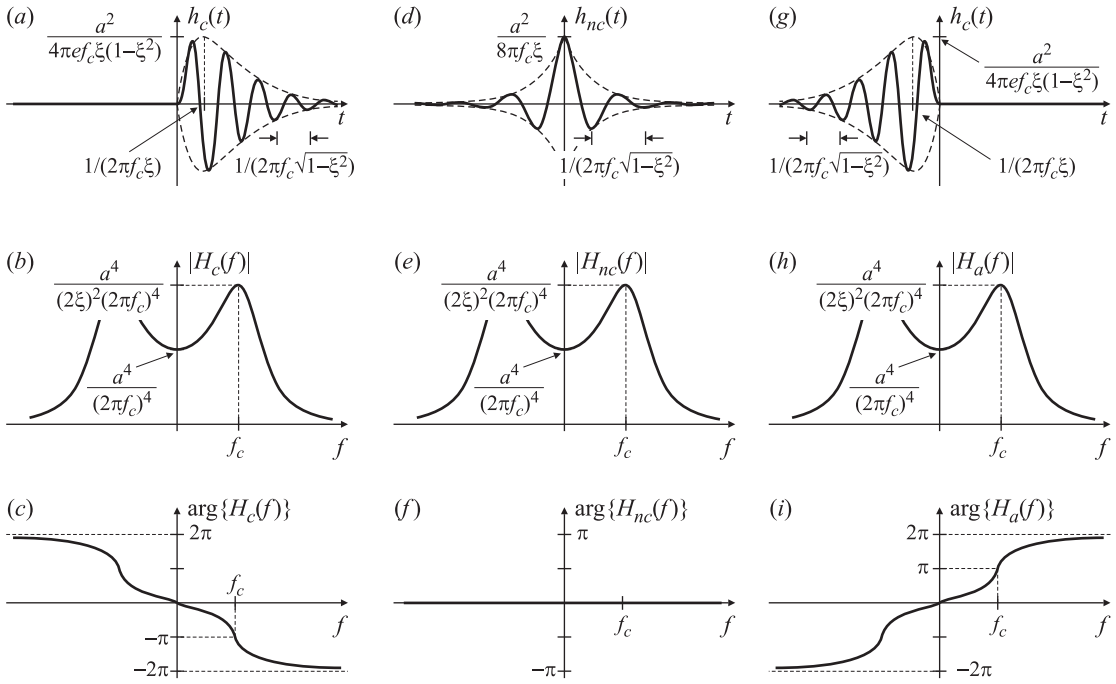


Fig. C.8. Respuesta impulsiva y respuesta en frecuencia de los fitros de cuarto orden causales (a)-(c), no causales (d)-(f), y anticausales (g)-(i).

y su módulo y fase se muestran en las Figs. C.8(e) y (f), respectivamente.

Finalmente, la respuesta impulsiva del sistema anticausal es, de acuerdo con (C.6)

$$h_a(t) = \frac{a^2}{2} \frac{-t\, e^{2\pi f_c \xi t}}{\left(1-\xi^2\right)^2} \left[\operatorname{sinc}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) - \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\right] u(-t),$$

para $t < 0$, como se representa en la Fig. C.8(g). Además, según (C.7),

$$|H_a(f)| = |H_c^*(f)| = \frac{a^4/(2\pi)^4}{({f_c}^2 - f^2)^2 + (2\xi f_c f)^2}, \quad \arg\{H_a(f)\} = 2\arctan\left(\frac{2\xi f_c f}{f_c^2 - f^2}\right),$$

tal como se grafica en la Fig. C.8(h) e (i).

Nuevamente, los módulos de las respuestas en frecuencia $H_c(f)$, $H_a(f)$ y $H_{nc}(f)$ son iguales, y las respuestas sólo difieren en la fase. □

C.2. Determinación de las respuestas temporales

La salida de los filtros causales o no causales cuando son excitados una onda cuadrada de amplitud unitaria y período $T_0 = 1/f_0$ se puede calcular en tiempo aplicando la convolución entre la señal $\tilde{x}(t)$ y la respuesta $h(t)$ del filtro, o en frecuencia, afectando los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$ por la respuesta de los filtros a cada frecuencia armónica. Ambos puntos de vista se exploran en esta sección. En primer lugar se estudia el filtro de segundo orden con respuesta sobreamortiguada analizado en el Ejemplo C.1, y posteriormente el filtro de cuarto orden con respuesta subamortiguada del Ejemplo C.2.

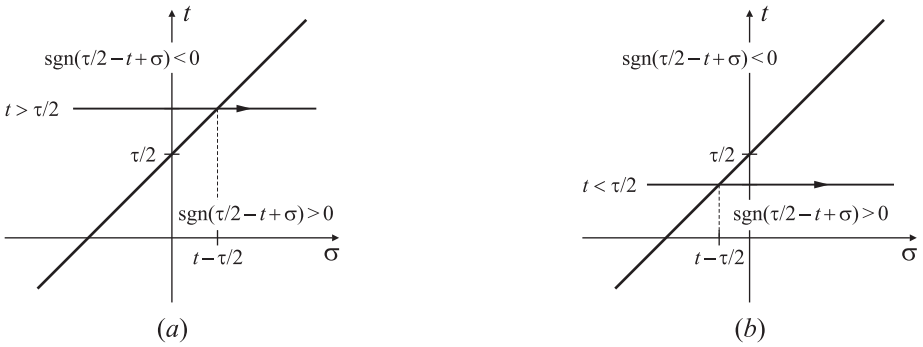


Fig. C.9. Construcción para determinar el valor de $\mathrm{sgn}(\tau/2 - t + \sigma)$.

C.2.1. Cálculo en el dominio tiempo

En primer lugar se calculan los resultados usando la convolución. De manera similar al desarrollo de la Sección anterior, para calcular analíticamente el comportamiento en cercanías de los puntos de discontinuidad de $\tilde{x}(t)$, se aproxima $\tilde{x}(t)$ por la función $\mathrm{sgn}(t)$:

$$\tilde{x}(t) \approx \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t)\,.$$

EJEMPLO **C.3. Filtro causal de segundo orden con respuesta sobreamortiguada**
Como se desea que el filtro tenga ganancia unitaria, se adopta $a = 2\pi f_c$, de modo que la respuesta impulsiva es

$$h_c(t) = (2\pi f_c)^2 t e^{-2\pi f_c t} u(t).$$

Por lo tanto,

$$y_c(t) = \tilde{x}(t) * h_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-\sigma) * h_c(\sigma)\, d\sigma \approx \int_0^{\infty} \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)\right] h_c(\sigma)\, d\sigma.$$

El límite inferior de la última integral es 0 porque $h_c(\sigma) = 0$ para $\sigma < 0$. Desarrollando, se encuentra que

$$y_c(t) = \int_0^{\infty} \tfrac{1}{2} h_c(\sigma)\, d\sigma + \int_0^{\infty} \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)\, h_c(\sigma)\, d\sigma = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)\, h_c(\sigma)\, d\sigma.$$

En el cálculo de la primera integral se tiene en cuenta que el área bajo la respuesta impulsiva $h_c(t)$ es unitaria, pues $H_c(f)|_{f=0} = 1$. Para el cálculo de la segunda integral es conveniente tener en cuenta el valor de $\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)$. Como se observa en la construcción de la Fig. C.9(a), si $t > \tau/2$ es conveniente partir el intervalo de integración en dos subintervalos: $(0, t - \tau/2)$, donde $\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma) = -1$, y $(t - \tau/2, \infty)$, donde $\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma) = 1$. Por otra parte, si $t < \tau/2$, como se ilustra en la Fig. C.9(b) , $\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma) = 1$ para $\sigma > 0$. En consecuencia,

$$\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 1, & \text{si } \tau/2 - t + \sigma > 0, \text{ i.e. } \sigma > t - \tau/2, \\ -1, & \text{si } \tau/2 - t + \sigma < 0, \text{ i.e. } \sigma < t - \tau/2, \end{array}\right\} & \text{si } t > \tau/2 \\ 1, \quad \text{si } \tau/2 - t + \sigma > 0, \text{ i.e. } \sigma > t - \tau/2, & \text{si } t < \tau/2 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)\, h_c(\sigma)\, d\sigma = \begin{cases} \int_0^{\infty} h_c(\sigma)\, d\sigma = 1, & \text{si } t < \tau/2, \\ -\int_0^{(t-\tau/2)} h_c(\sigma)\, d\sigma + \int_{(t-\tau/2)}^{\infty} h_c(\sigma)\, d\sigma, & \text{si } t > \tau/2. \end{cases}$$

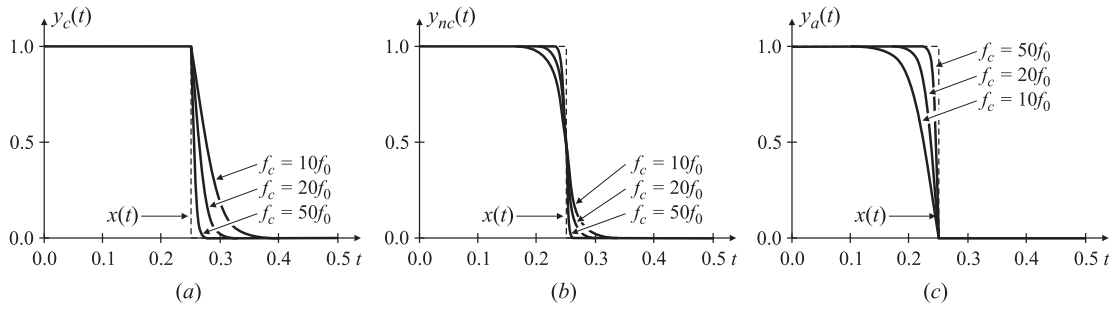


Fig. C.10. Respuestas temporales de la salida $y(t)$ del filtro de segundo orden causal (a), no causal bilátero (b) ,y anticausal (c) para distintos valores de f_c.

Como

$$-\int_0^{(t-\tau/2)} h_c(\sigma)\,d\sigma + \int_{(t-\tau/2)}^{\infty} h_c(\sigma)\,d\sigma = -1 + 2[1 + 2\pi f_c(t-\tau/2)]e^{-2\pi f_c(t-\tau/2)},$$

recolectando resultados se encuentra que

$$y_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < \tau/2, \\ [1 + 2\pi f_c(t-\tau/2)]e^{-2\pi f_c(t-\tau/2)}, & \text{si } t > \tau/2. \end{cases} \tag{C.13}$$

Esta expresión muestra que la respuesta no tiene sobrepicos, y que a medida que aumenta el ancho de banda del filtro crece la magnitud de la pendiente durante el transitorio. La variación temporal de $y_c(t)$ en cercanías de la discontinuidad se representa en la Fig. C.10(a) para distintos valores de f_c. □

EJEMPLO **C.4. Filtro no causal de segundo orden con respuesta sobreamortiguada**
En este caso, para que la respuesta en frecuencia del filtro tenga ganancia unitaria para frecuencia cero (corriente continua), la respuesta impulsiva está dada por

$$h_{nc}(t) = \pi f_c e^{-2\pi f_c|t|},$$

y entonces,

$$\begin{aligned} y_{nc}(t) &= \tilde{x}(t) * h_{nc}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-\sigma) * h_{nc}(\sigma)\,d\sigma \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)\right] h_{nc}(\sigma)\,d\sigma \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h_{nc}(\sigma)\,d\sigma + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)\,h_{nc}(\sigma)\,d\sigma. \end{aligned}$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} h_{nc}(\sigma)d\sigma = 1$, partiendo la segunda integral en dos intervalos se tiene que

$$y_{nc}(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{(t-\frac{\tau}{2})} \mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)\,h_{nc}(\sigma)\,d\sigma + \tfrac{1}{2}\int_{(t-\frac{\tau}{2})}^{\infty} \mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)\,h_{nc}(\sigma)\,d\sigma.$$

Tomando en cuenta el valor de $\mathrm{sgn}\,(\tau/2 - t + \sigma)$ en cada intervalo, para $t > \tau/2$, como se muestra en la Fig. C.9(a), resulta

$$y_{nc}(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{(t-\frac{\tau}{2})} h_{nc}(\sigma)\,d\sigma + \tfrac{1}{2}\int_{(t-\frac{\tau}{2})}^{\infty} h_{nc}(\sigma)\,d\sigma = \tfrac{1}{2}e^{-2\pi f_c(t-\frac{\tau}{2})}.$$

Por otra parte, si $t < \tau/2$, según la Fig. C.9(b), se tiene que

$$y_{nc}(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{(t-\frac{\tau}{2})} h_{nc}(\sigma)\,d\sigma + \tfrac{1}{2}\int_{(t-\frac{\tau}{2})}^{\infty} h_{nc}(\sigma)\,d\sigma = 1 - \tfrac{1}{2}e^{2\pi f_c(t-\frac{\tau}{2})}.$$

y por lo tanto

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\left(1 - e^{-2\pi f_c\left|t-\frac{\tau}{2}\right|}\right). \tag{C.14}$$

La respuesta temporal para distintos valores de f_c se muestra en la Fig. C.10(b) . Nuevamente, no se observan sobrepicos, pero sí la respuesta "anticipativa" de la salida, que empieza a decrecer *antes* que cambie la entrada. □

EJEMPLO **C.5. Filtro anticausal de segundo orden con respuesta sobreamortiguada**
Como la respuesta impulsiva $h_a(t)$ del filtro anticausal satisface $h_a(t) = h_c(-t)$, se puede calcular que

$$y_a(t) = \begin{cases} 1 - [1 - 2\pi f_c(t-\tau/2)]e^{2\pi f_c(t-\tau/2)}, & \text{si } t < \tau/2, \\ 0, & \text{si } t > \tau/2. \end{cases} \tag{C.15}$$

que se representa en la Fig. C.10(c) para distintos valores de f_c. □

EJEMPLO **C.6. Filtro causal de cuarto orden con respuesta subamortiguada**
Para que el filtro tenga ganancia unitaria en la banda de paso, se elige $a = 2\pi f_c$, por lo que la respuesta impulsiva del filtro prototipo es

$$h_c(t) = \frac{(2\pi f_c)^2}{2}\frac{t\,e^{-2\pi f_c\xi t}}{\left(1-\xi^2\right)^2}\left[\mathrm{sinc}\left(2\pi f_c\sqrt{1-\xi^2}t\right) - \cos\left(2\pi f_c\sqrt{1-\xi^2}t\right)\right]u(t)$$

El método de cálculo de la salida $y_c(t)$ para esta respuesta es similar al del Ejemplo C.3. En este caso,

$$\begin{aligned} &-\int_0^{(\tau/2-t)} h_c(\sigma)\,d\sigma + \int_{(\tau/2-t)}^{\infty} h_c(\sigma)\,d\sigma = \\ &\quad = -1 + \frac{e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}}{2\left(1-\xi^2\right)}\left\{\left[2(1-\xi^2) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta\right]\cos\theta + \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + 2\xi\sqrt{1-\xi^2} + \theta\right)\mathrm{sen}\,\theta\right\}, \end{aligned}$$

donde $\theta = 2\pi f_c\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau/2)$. Por lo tanto,

$$y_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta < 0, \\ \dfrac{e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}}{2\left(1-\xi^2\right)}\left\{\left[2(1-\xi^2) - \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta\right]\cos\theta + \left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + 2\xi\sqrt{1-\xi^2} + \theta\right)\mathrm{sen}\,\theta\right\}, & \text{si } \theta > 0. \end{cases} \tag{C.16}$$

La Fig. C.11 muestra la respuesta temporal de la salida $y_c(t)$ en un entorno de la discontinuidad para distintos valores de ξ y f_c. □

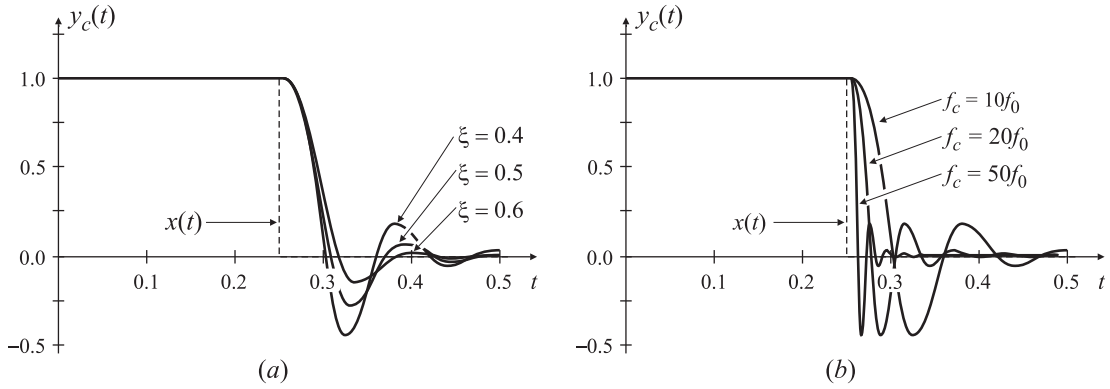


Fig. C.11. Respuestas temporales de la salida $y_c(t)$ del filtro causal de cuatro orden, para distintos valores de ξ (a) y de f_c (b).

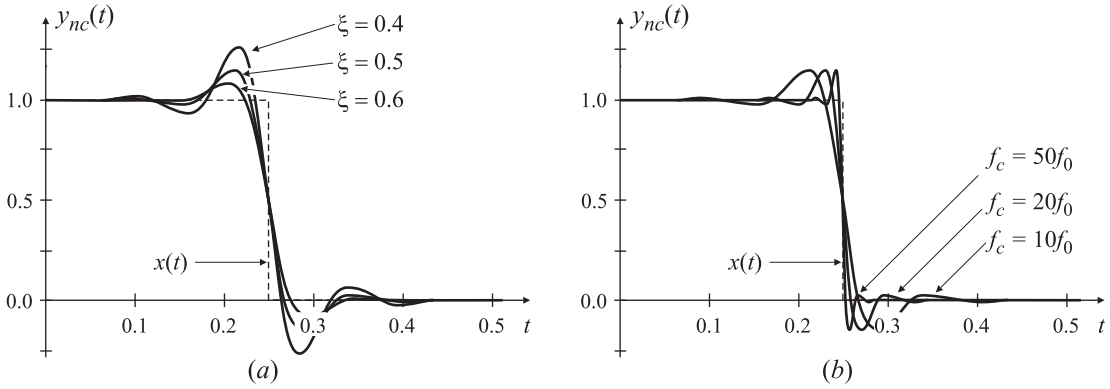


Fig. C.12. Respuestas temporales de la salida $y_c(t)$ del filtro causal de cuatro orden, para distintos valores de ξ (a) y de f_c (b).

EJEMPLO **C.7. Filtro no causal de cuarto orden con respuesta subamortiguada**
La salida del sistema puede calcularse siguiendo un esquema de cálculo similar al del Ejemplo C.4.

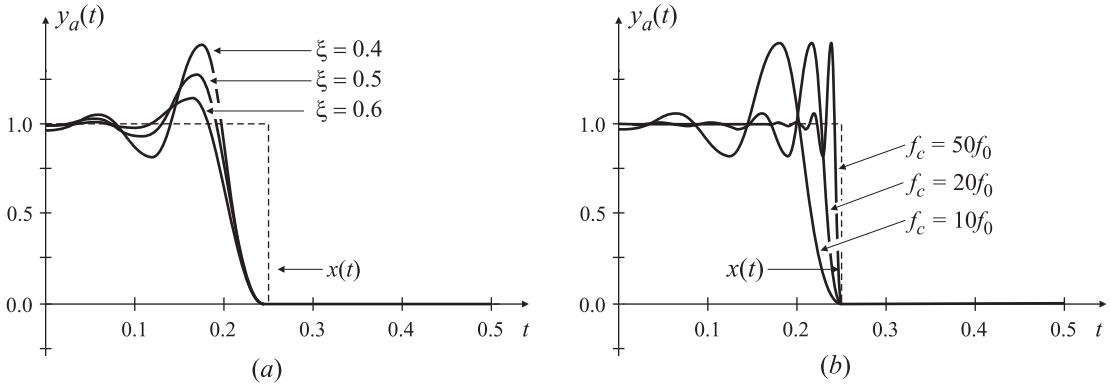


Fig. C.13. Respuestas temporales de la salida $y_a(t)$ del filtro anticausal de cuarto orden, para distintos valores de ξ (a) y de f_c (b).

En este caso, $a = 2\pi f_c$ para que el filtro tenga ganancia unitaria, y entonces,

$$h_{nc}(t) = \frac{\pi f_c}{2} e^{-2\pi f_c \xi |t|} \left[\frac{1}{\xi} \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, |t|\right) \right].$$

Tomando en cuenta el valor de $\operatorname{sgn}(\tau/2 - t + \sigma)$ en cada intervalo, para $t < \tau/2$ resulta [Fig. C.9(a)]

$$\begin{aligned} y_{nc}(t) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{(t-\frac{\tau}{2})} h_a(\sigma)\, d\sigma + \tfrac{1}{2} \int_{(t-\frac{\tau}{2})}^{\infty} h_a(\sigma)\, d\sigma \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\pi f_c \xi \left|t-\frac{\tau}{2}\right|} \left[\cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) - \frac{1-2\xi^2}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) \right] \end{aligned}$$

y para $t < \tau/2$,

$$y_{nc}(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2\pi f_c \xi \left|t-\frac{\tau}{2}\right|} \left[\cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) - \frac{1-2\xi^2}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) \right]$$

de modo que

$$\begin{aligned} y_{nc}(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right) \Bigg\{ & 1 - e^{-2\pi f_c \xi \left|t-\frac{\tau}{2}\right|} \times \\ & \left[\cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, \left|t-\tfrac{\tau}{2}\right|\right) - \frac{1-2\xi^2}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, \left|t-\tfrac{\tau}{2}\right|\right) \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{C.17}$$

La Fig. C.12 muestra la evolución temporal de la salida del filtro no causal $y_{nc}(t)$ para distintos valores de ξ y f_c. □

EJEMPLO **C.8. Filtro anticausal de cuarto orden con respuesta subamortiguada**
La respuesta impulsiva de este filtro puede escribirse en función de la respuesta impulsiva del filtro causal, y resulta

$$h_a(t) = h_c(-t) = -\frac{(2\pi f_c)^2}{2} \frac{t\, e^{2\pi f_c \xi t}}{\left(1-\xi^2\right)^2} \left[\operatorname{sinc}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) - \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) \right] u(-t),$$

y por lo tanto la expresión de la salida del filtro puede escribirse como

$$y_a(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{e^{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}}{2(1-\xi^2)} \left\{ \left[2(1-\xi^2) + \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta \right] \cos\theta - \left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + 2\xi\sqrt{1-\xi^2} - \theta \right) \operatorname{sen}\theta \right\}, & \text{si } \theta < 0, \\ 0, & \text{si } \theta > 0. \end{cases} \tag{C.18}$$

donde $\theta = 2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}(t - \tau/2)$. La Fig. C.13 muestra la evolución temporal de la salida del filtro anticausal $y_a(t)$ para distintos valores de ξ y f_c. □

EJEMPLO **C.9. Cálculo de los sobrepicos**
La salidas del filtro causal $y_c(t)$ [ecuación (C.16)], del filtro no causal $y_{nc}(t)$ [ecuación (C.17)] y la del filtro anticausal [ecuación (C.18)] presentan sobrepicos, como se observa en las Figs. C.11, C.12 y C.13. A continuación se detalla el cálculo de estos sobrepicos en función de los parámetros del circuito (ξ y f_c).

- **Filtros causal y anticausal:** Debido a la similitud entre los filtros causal $H_c(f)$ y anticausal $H_a(f)$, los sobrepicos tienen la misma magnitud, pero cambia la ubicación de los mismos: mientras que en el filtro causal ocurren para $t > \tau/2$, en la salida del filtro anticausal se ubicanen $t < \tau/2$. Por ello de aquí en más se detallan sólo los cálculos para la salida del filtro causal. La envolvente de la salida $y_c(t)$ es

$$e_c(t) = \frac{e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}}{2(1-\xi^2)^{3/2}}\sqrt{4+\theta^2-3\xi^2+2\xi\theta\sqrt{1-\xi^2}},$$

que alcanza su máximo cuando

$$\theta^* = \frac{1}{2\xi}\left[(1-2\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}+\sqrt{1-17\xi^2+16\xi^4-4\xi^6}\right], \tag{C.19}$$

siempre que

$$0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{6}}\left(8-\frac{13}{(73-6\sqrt{87})^{1/3}}-(73-6\sqrt{87})^{1/3}\right)^{1/2} \approx 0{,}24987.$$

Los extremos relativos ocurren donde $dy_c(\theta)/d\theta = y'(\theta) = 0$; para $\theta > 0$, la derivada es

$$y_c'(\theta) = -\frac{e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}}{2\left(1-\xi^2\right)^2}(\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta),$$

que se anula cuando $\theta = \tan\theta$. Esta ecuación trascendente tiene múltiples soluciones; las primeras cinco ocurren en

$$\theta_1 = 4{,}49341,\ \theta_2 = 7{,}2525,\ \theta_3 = 10{,}9041,\ \theta_4 = 14{,}0662,\ \theta_5 = 17{,}2208.$$

El máximo de y_c ocurre en la solución más próxima a θ^* dada por (C.19). El valor del sobrepico en estos instantes está dado por

$$\Delta y_{c,k} = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}\left[1+\theta_k\left(\frac{\theta_k+2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{2(1-\xi^2)}\right)\right]\cos\theta_k.$$

A medida que $\xi \to 0$ el máximo sobrepico se alcanza en valores crecientes de θ_k. En las variables originales, los sobrepicos ocurren en

$$t_k = \frac{\theta_k}{2\pi f_c\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\tau}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

En cualquier caso, el sobrepico es independiente del ancho de banda del filtro f_c, y sólo depende del factor de amortiguamiento ξ.

- **Filtro no causal:** Para $t > \tau/2$, la derivada de la salida $y_{nc}(t)$ se anula cuando

$$\sqrt{1-\xi^2}\cos\left(2\pi f_c\sqrt{1-\xi^2}\left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right)+\xi\operatorname{sen}\left(2\pi f_c\sqrt{1-\xi^2}\left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) = 0,$$

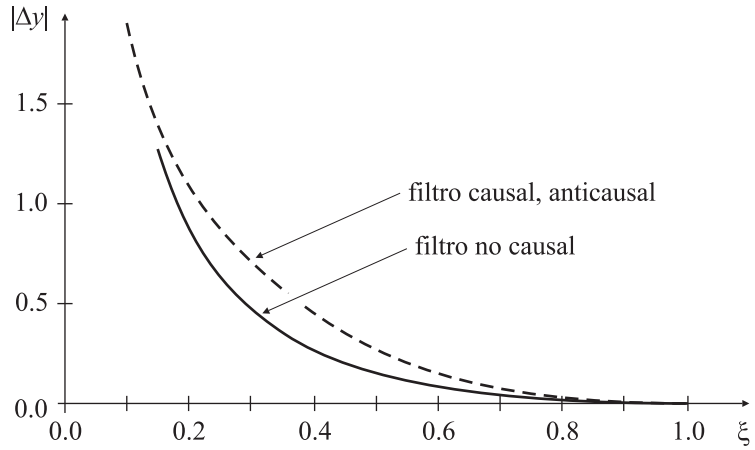


Fig. C.14. Sobrepicos de las respuestas de los filtros causales/anticausales y no causales de cuarto orden cuando se los excita con una onda cuadrada.

de donde resulta que los extremos relativos ocurren cuando

$$t = \frac{\tau}{2} + \frac{2\pi k - \arccos\xi}{2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}}$$

para $k \geq 1$. El sobrepico en estos puntos está dado por

$$|\Delta y_{nc}| = \frac{1}{4\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}(\arccos\xi - k\pi)} .$$

La comparación de los sobrepicos en función de ξ se representa en la Fig. C.14. Los filtros causal o anticausal tienen sobrepicos de mayor magnitud que el filtro no causal ya que, si bien las áreas bajo las respuestas impulsivas $h_c(t)$, $h_a(t)$, $h_{nc}(t)$ son unitarias, las *variaciones* son mayores para $h_c(t)$ o $h_a(t)$ que para $h_{nc}(t)$ porque las primeras ocurren sólo en el rango $t > 0$ o $t < 0$, mientras que la respuesta no causal $h_{nc}(t)$ está definida para $-\infty < t < \infty$. □

C.2.2. Cálculo en el dominio frecuencia

La salida de los filtros también puede calcularse en el dominio frecuencial, antitransformando el producto en frecuencia las transformadas $X(f)$ de la entrada $x(t)$ con las respuestas en frecuencia de cada filtro, $H_c(f)$ o $H_{nc}(f)$, o $H_a(f)$ según corresponda. Como la entrada $x(t)$ es una onda cuadrada con un ciclo de trabajo del 50 % y amplitud unitaria, definida por

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & kT < t < kT + T/2, \\ 0, & kT + T/2 < t < (k+1)T, \end{cases}$$

la transformada de Fourier de un período es

$$X(f) = \tfrac{T}{2} \operatorname{sinc}\left(\tfrac{T}{2} f\right),$$

por lo que sus coeficientes de Fourier son de la forma

$$c_k = \frac{1}{T} X(f)|_{f=k/T} = \tfrac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\tfrac{1}{2} k\right).$$

Como la señal de entrada tiene simetría de media onda, los coeficientes correspondientes a k pares se anulan. Por lo tanto, la transformada de Fourier de la onda cuadrada es

$$X(f) = \sum_k c_k \delta(f - kf_0) = \sum_k \tfrac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\tfrac{1}{2}k\right) \delta[f - kf_0].$$

Si esta entrada excita un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta en frecuencia $H(f) = |H(f)|\, e^{j\phi(f)}$, la transformada de Fourier $Y(f)$ de la salida $y(t)$ es

$$Y(f) = X(f)H(f) = H(f) \sum_k c_k \delta(f - kf_0) = \sum_k c_k H(kf_0) \delta(f - kf_0)$$

y por lo tanto,

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \sum_k c_k H(kf_0) e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_k c_k \, |H(kf_0)| \, e^{j[2\pi k f_0 t + \phi(kf_0)]}.$$

En particular, como los c_k son simétricos ($c_k = c_{(-k)}$), y los filtros tienen respuesta impulsiva real, $\phi(kf_0) = -\phi(-kf_0)$, de modo que $y(t)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, |H(kf_0)| \left[e^{j[2\pi k f_0 t + \phi(kf_0)]} + e^{-j[2\pi k f_0 t + \phi(kf_0)]} \right] \\ &= c_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_k \, |H(kf_0)| \cos[2\pi k f_0 t + \phi(kf_0)]. \end{aligned}$$

Los filtros pasabajos analizados en esta sección tienen ganancia unitaria en la banda de paso, de modo que $H(0) = 1$, y $c_0 = 1/2$. Además, los filtros causales, anticausales y no causales difieren sólo en la fase, y los filtros no causales tienen fase nula, de modo que las salidas $y_c(t)$, $y_{nc}(t)$ e $y_a(t)$ de los filtros causales, no causales y anticausales pueden escribirse como

$$y_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{k} \, |H_c(kf_0)| \cos[2\pi k f_0 t + \phi(kf_0)], \tag{C.20}$$

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{k} \, |H_{nc}(kf_0)| \cos[2\pi k f_0 t], \tag{C.21}$$

$$y_a(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{k} \, |H_a(kf_0)| \cos[2\pi k f_0 t - \phi(kf_0)], \tag{C.22}$$

donde se ha supuesto, como anteriormente que $H_a(f) = H_c^*(f)$. En general, por efecto de los filtros estas series son absolutamente convergentes, pero es complicado encontrar una expresión matemática cerrada para $y(t)$. A continuación se calcula la salida para los filtros causales y no causales de segundo y cuarto orden analizados previamente.

EJEMPLO **C.10. Filtro de segundo orden**

- **Filtro causal**: La respuesta en frecuencia del filtro causal de segundo orden está dada por la ecuación (C.9). Si la relación entre la frecuencia de corte del filtro y la frecuencia fundamental de la onda cuadrada se designa con ρ, $\rho = f_c/f_0$, se encuentra que

$$H_c(kf_0) = \frac{1}{1 + (k/\rho)^2} e^{-j2\arctan(k/\rho)}.$$

Por lo tanto,

$$y_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k[1 + (k/\rho)^2]} \cos[2\pi k f_0 t - 2 \arctan(k/\rho)]. \tag{C.23}$$

Es sencillo demostrar que la serie es absolutamente convergente para cualquier valor de t. En efecto,

$$|y_c(t)| < \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{k[1 + (k/\rho)^2]} < \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{1 + (k/\rho)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2} \tanh\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) < \infty.$$

La expresión matemática en forma cerrada resulta en una expresión muy complicada. Sin embargo es posible encontrar el resultado numérico en función de ρ y f_0. Utilizando MATHEMATICA se puede calcular el valor numérico de la salida para cualquier valor de t. Los comandos necesarios son:

```
yct[t_,f0_,r_] := (1/2)+
          (2/Pi)NSum[Sin[Pi k/2]/(k(1+(k/r)^2)) Cos[2 Pi f0 t - 2 ArcTan[k/r]]];
Yc = Table[{t, yct[t, 1, 5]}, {t, 0, 3, 0.005}];
ListPlot[Yc, PlotJoined -> True];
```

Una gráfica de la suma de la serie se muestra en la Fig. C.15(a).

- **Filtro no causal**: La respuesta en frecuencia del filtro no causal de segundo orden se calculó en (C.10). Utilizando la notación anterior, resulta

$$H_{nc}(kf_0) = \frac{1}{1 + (k/\rho)^2}.$$

La salida del filtro es

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k[1 + (k/\rho)^2]} \cos(2\pi k f_0 t). \tag{C.24}$$

La serie comparte la cota de la serie del filtro causal. Nuevamente, la expresión en forma cerrada es muy complicada. La comparación de las expresiones (C.23) y (C.24) revela que la única diferencia está en el *atraso* de fase que agrega el filtro causal. Una gráfica de la forma de onda temporal se representa en la Fig. C.15(b).

- **Filtro anticausal**: La respuesta en frecuencia del filtro anticausal es

$$H_a(kf_0) = \frac{1}{1 + (k/\rho)^2} e^{+j2\arctan(k/\rho)},$$

que es la expresión conjugada de $H_c(kf_0)$ y por lo tanto la salida del filtro es

$$y_a(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k[1 + (k/\rho)^2]} \cos[2\pi k f_0 t + 2 \arctan(k/\rho)], \tag{C.25}$$

que coincide con (C.23) salvo por el signo de la suma en el argumento del coseno: en este caso la salida del filtro *adelanta* en fase a la entrada. La forma de onda temporal de (C.25) se representa en la Fig. C.15(c).

Comparación de las respuestas: La diferencia entre las respuestas (C.13)-(C.14)-(C.15), calculadas en el dominio tiempo, y las respuestas (C.23)-(C.24)-(C.25) calculadas en el dominio frecuencia, es que las primeras son aproximaciones válidas sólo en cercanías de la discontinuidad $t = \tau/2$ [porque la entrada $x(t)$ se aproximó por $\text{sgn}(t - \tau/2)$] mientras que las segundas son válidas *para todo* t. Una inspección cuidadosa de ambas respuestas en un entorno de $\tau/2$ no revela diferencias. □

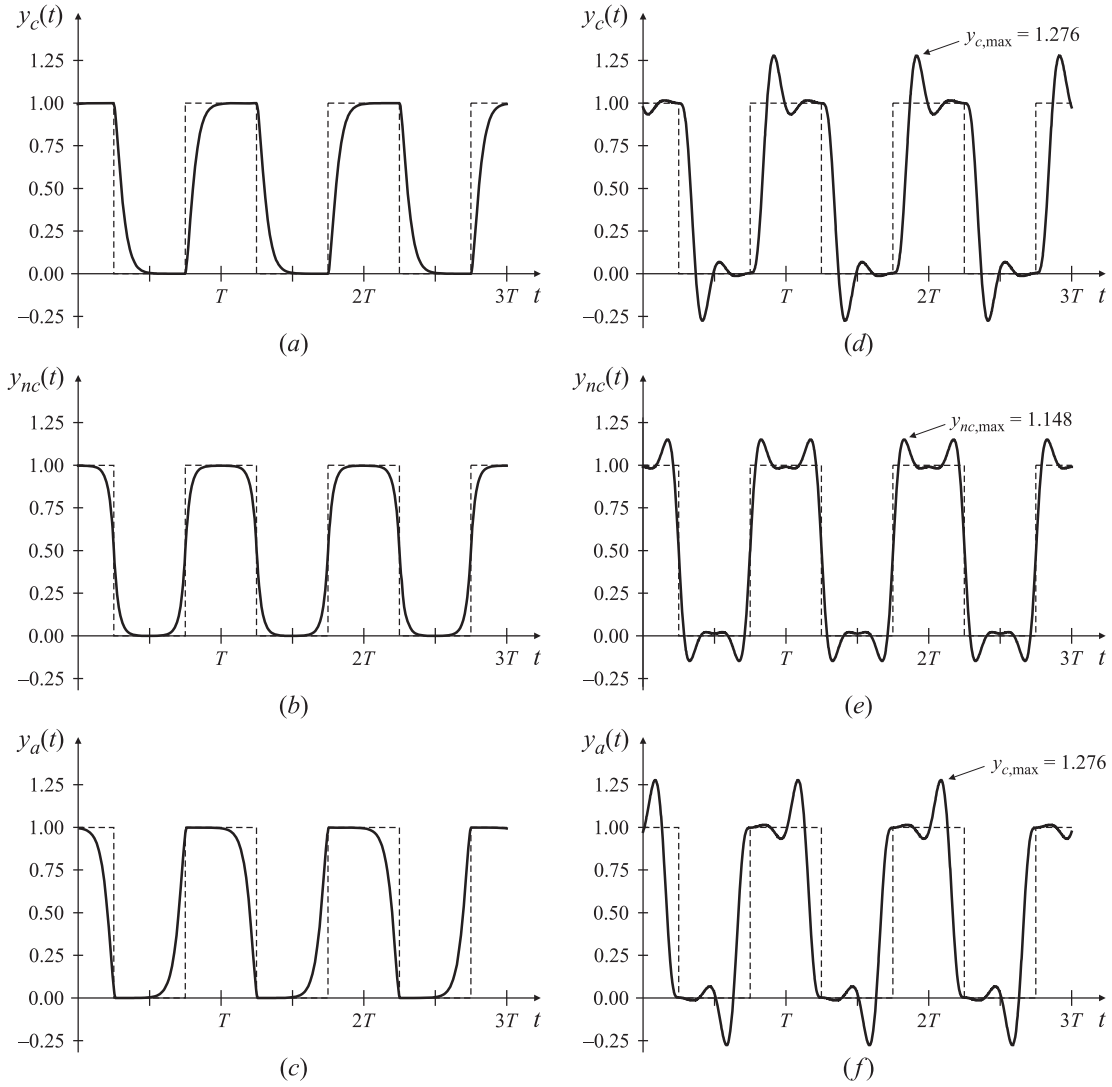


Fig. C.15. Respuesta de los filtros causales, no causales (biláteros) y anticausales de segundo orden (a)-(c), y de cuarto orden (d)-(f), respectivamente. En todos los casos, $\rho = f_c/f_0 = 5$, y para el filtro de cuarto orden, $\xi = 0{,}5$.

EJEMPLO **C.11. Filtro de cuarto orden con respuesta subamortiguada**

- **Filtro causal**: La respuesta del filtro causal de cuarto orden, calculada en (C.11), puede escribirse como

$$H_c(kf_0) = \frac{1}{(1-k^2/\rho^2)^2 + (2\xi k/\rho)^2}, \quad \phi(kf_0) = \arg\{H_c(kf_0)\} = -2\arctan\left[\frac{2\xi k/\rho}{1-(k/\rho)^2}\right].$$

La salida del filtro, calculada en base a la expansión en series de Fourier de $x(t)$, resulta

$$y_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{k[(1-k^2/\rho^2)^2 + (2\xi k/\rho)^2]} \cos\left[2\pi k f_0 t - 2\arctan\left(\frac{2\xi k/\rho}{1-k^2/\rho^2}\right)\right] \tag{C.26}$$

Esta serie también es absolutamente convergente, es decir que

$$|y_c(t)| < \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-k^2/\rho^2)^2+(2\xi k/\rho)^2} < \infty,$$

pero en este caso aún la cota es extremadamente complicada. La forma de onda de la salida $y_c(t)$ del filtro causal se muestra en la Fig. C.15(d) para $\tau/T = \tau f_0 = 0{,}5$, $\rho = 5$ y $\xi = 0{,}5$.

- **Filtro no causal**: La expresión de la salida del filtro no causal comparte la misma cota, y puede escribirse como

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k[(1-k^2/\rho^2)^2+(2\xi k/\rho)^2]}\cos(2\pi k f_0 t). \tag{C.27}$$

  Esta salida se grafica en la Fig. C.15(e) para $\tau/T = 0{,}5$, $\rho = 5$ y $\xi = 0{,}5$.

- **Filtro anticausal**: La respuesta en frecuencia $H_a(f)$del filtro anticausal es la conjugada de $H_c(f)$, y por lo tanto la expresión de la salida $y_a(t)$ toma la forma

$$y_a(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k[(1-k^2/\rho^2)^2+(2\xi k/\rho)^2]}\cos\left[2\pi k f_0 t - 2\arctan\left(\frac{2\xi k/\rho}{1-k^2/\rho^2}\right)\right] \tag{C.28}$$

  La evolución temporal de esta salida, para $\tau/T = 0{,}5$, $\rho = 5$ y $\xi = 0{,}5$, se grafica en la Fig. C.15(f) .

Comparación de las respuestas: De manera análoga al ejemplo anterior, la diferencia entre las respuestas (C.16)-(C.17)-(C.18) calculadas en el dominio tiempo, y las respuestas (C.26)-(C.27)-(C.28) calculadas en el dominio frecuencia, es que las primeras son solo aproximadas, válidas en un entorno de la discontinuidad en $t = \tau/2$, mientras que las segundas son expresiones exactas que valen para cualquier valor de t. Nuevamente, las respuestas aproximadas y las exactas en cercanías de la discontinuidad son iguales. □

D

Cálculo de series y transformadas de Fourier usando Mathematica

En este apéndice se presenta una forma sencilla de calcular los coeficientes de Fourier y las transformadas usando Mathematica. No pretende ser una introducción a un programa tan sofisticado, sino proveer algunas herramientas para evitar laboriosos cálculos manuales.

La principal función a utilizar es `Integrate[]`. El comando

```
Integrate[f, {x, xmin, xmax}]
```

devuelve la integral definida $\int_{x_{\text{mín}}}^{x_{\text{máx}}} f(x)\,dx$. El uso de otros comandos se ilustra en el siguiente ejemplo.

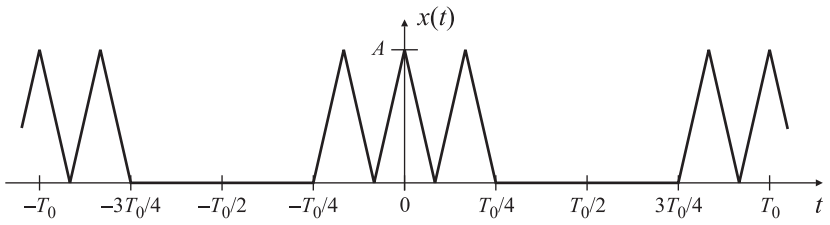


Fig. D.1. Señal periódica $\tilde{x}(t)$.

EJEMPLO **D.1. Cálculo de la serie de Fourier de un tren de pulsos triangulares**
Se desea calcular los coeficientes de Fourier del tren de pulsos triangulares que se muestra en la Fig. D.1. La expresión de los coeficientes está dada por la ecuación (2.30), (página 85)

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt,$$

y en este caso es necesario separar la integral en seis partes, una para cada una de las rectas de

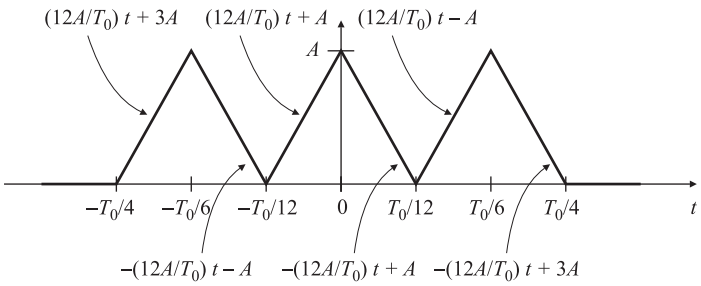


Fig. D.2. Detalle de un período del tren de pulsos triangular.

pendientes $\pm 12A/T_0$ como se representa en la Fig. D.2. Entonces,

$$\begin{aligned} c_k = & \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{-T_0/6}\left(\tfrac{12A}{T_0}t+3A\right)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt+\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/6}^{-T_0/12}\left(-\tfrac{12A}{T_0}t-A\right)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt+ \\ & \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/12}^{0}\left(\tfrac{12A}{T_0}t+A\right)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt+\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0/12}\left(-\tfrac{12A}{T_0}t+A\right)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt+ \\ & \frac{1}{T_0}\int_{T_0/12}^{T_0/6}\left(\tfrac{12A}{T_0}t-A\right)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt+\frac{1}{T_0}\int_{T_0/6}^{T_0/4}\left(-\tfrac{12A}{T_0}t+3A\right)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt. \end{aligned}$$

El código en Mathematica para calcular esta integral es casi una copia de la expresión anterior:

```
In[1]:= ck = (Integrate[((12 A /T0)t + 3A)Exp[-(I 2 π k/T0)t], {t, -T0/4, -T0/6}] +
             Integrate[(-(12 A/T0)t - A)Exp[-(I 2 π k/T0)t], {t, -T0/6, -T0/12}] +
             Integrate[((12 A/T0)t + A)Exp[-(I 2 π k/T0)t], {t, -T0/12, 0}] +
             Integrate[(-(12 A/T0)t + A)Exp[-(I 2 π k/T0)t], {t, 0, T0/12}] +
             Integrate[((12 A/T0)t - A)Exp[-(I 2 π k/T0)t], {t, T0/12, T0/6}] +
             Integrate[(-(12 A/T0)t + 3A)Exp[-(I 2 π k/T0)t], {t, T0/6, T0/4}])/T0
```

Las letras griegas se pueden ingresar utilizando la tecla **‹Esc›** y la letra latina equivalente: por ejemplo, π se ingresa como **‹Esc›**p**‹Esc›,** α como **‹Esc›**a**‹Esc›**, etc. La etiqueta "`In[1]:=`" es agregada por el programa cuando comienza a evaluar el comando, lo que ocurre apenas se presiona la tecla **‹Intro›** del teclado numérico, o la combinación **‹Mayus›+‹Intro›** del teclado común. Luego de algunos segundos, el programa responde con:

$$\begin{aligned} \texttt{Out[1]:=}\quad \texttt{ck} = & \frac{1}{\texttt{T0}}\left(\frac{\texttt{A}\left(6-\frac{6}{e^{\frac{I}{6}k\pi}}-\texttt{I}\,k\pi\right)\texttt{T0}}{2k^2\pi^2}-\frac{\texttt{A}\left(-6+6e^{\frac{I}{6}k\pi}-\texttt{I}\,k\pi\right)\texttt{T0}}{2e^{\frac{I}{3}k\pi}k^2\pi^2}+\right. \\ & \frac{\texttt{A}\left(6-6e^{\frac{I}{6}k\pi}+\texttt{I}\,k\pi\right)\texttt{T0}}{2k^2\pi^2}+\frac{\texttt{A}e^{\frac{I}{3}k\pi}\left(6-6e^{\frac{I}{6}k\pi}+\texttt{I}\,k\pi\right)\texttt{T0}}{2k^2\pi^2}+ \\ & \left.\frac{\texttt{A}e^{\frac{I}{6}k\pi}\left(-6+e^{\frac{I}{6}k\pi}(6-\texttt{I}\,k\pi)\right)\texttt{T0}}{2k^2\pi^2}+\frac{\texttt{A}\left(-6+e^{\frac{I}{6}k\pi}(6-\texttt{I}\,k\pi)\right)\texttt{T0}}{2e^{\frac{I}{2}k\pi}k^2\pi^2}\right) \end{aligned}$$

Esta expresión se puede reducir utilizando el comando `Simplify[]` o `FullSimplify[]`:

```
In[2]:= Ck = Simplify[ck]
```

y, nuevamente, luego de algunos segundos, se obtiene

$$\texttt{Out[2]:=}\quad \texttt{Ck} = \frac{12\texttt{A}\left(1+2\texttt{Cos}[\frac{\pi k}{3}]\right)\texttt{Sin}[\frac{\pi k}{12}]^2}{k^2\pi^2}$$

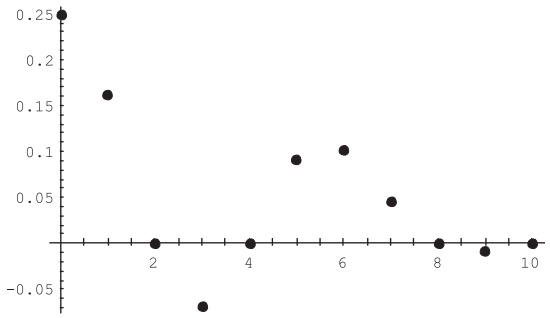


Fig. D.3. Gráfico de los 10 primeros coeficientes de Fourier, para $A = 1$.

En Mathematica, los nombres de las funciones se escriben con mayúscula, y el argumento queda encerrado entre corchetes. Por ejemplo, la expresion `Cos[`$\pi/2$`]` devuelve 0, pero $\cos(\pi/2)$ devuelve `(cos` π`)/2`, que evidentemente es incorrecta.

La expresión de los coeficientes c_k se puede simplificar aún más (esta vez "a mano"), y finalmente se obtiene que

$$c_k = \frac{A}{12}\left[1 + 2\cos\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right]\left[\text{sinc}\left(\frac{k}{12}\right)\right]^2$$

La función `Sinc[]` no está disponible en Mathematica, pero se puede definir de la siguiente manera:

```
In[3]:=    Sinc[x_]:=If[x==0,1,Sin[πx]/(πx)];
```

De esta forma, se puede definir los coeficientes de Fourier como:

```
In[4]:=    Ck = A/12 (1 + 2Cos[πk/3]) (Sinc[k/12])^2;
```

Algunos valores de los coeficientes se pueden generar utilizando el comando `Table[]`. En el siguiente fragmento de código, este comando está incluido dentro de la instrucción `FullSimplify[]` para obtener expresiones numéricas más sencillas:

```
In[5]:=   TCk = FullSimplify[Table[Ck,{k,0,10}] ]
```

$$\texttt{Out[5]:=}\ \left\{\frac{A}{12}, -\frac{6(-2+\sqrt{3})A}{\pi^2}, 0, -\frac{2A}{3\pi^2}, 0, \frac{6(2+\sqrt{3})A}{25\pi^2}, \frac{A}{\pi^2}, -\frac{6(2+\sqrt{3})A}{49\pi^2}, 0, -\frac{2A}{27\pi^2}, 0\right\}$$

Los coeficientes se pueden graficar en función de k utilizando el comando `ListPlot[]`:

```
ListPlot[Table[{k,Ck/.A->1},{k,0,10}], PlotStyle -> PointSize[0.02] ]
```

obteniéndose el gráfico que se muestra en la Fig. D.3.

Finalmente, se puede graficar la aproximación utilizando el comando `Plot[]`. En este caso, dentro del comando `Plot[]` se efectúa la suma de un número finito de términos de la serie. Si se supone $A = 1$ y $T_0 = 1$, las instrucciones necesarias para graficar la aproximación son:

```
Plot[Sum[1/12(1+2Cos[kπ/3]) (Sinc[k/12])^2Exp[I 2 π k t], {k, -10, 10}], {t,-1,1},
PlotPoints -> 50, PlotRange -> All]
```

El gráfico de la aproximación para la suma de 21 términos de la serie se muestra en la Fig. D.4(a), y para 101 términos en la Fig. D.4(b). □

Este ejemplo también muestra que el uso de las propiedades de la serie y la transformada facilita el cálculo de los coeficientes, como se detalla a continuación.

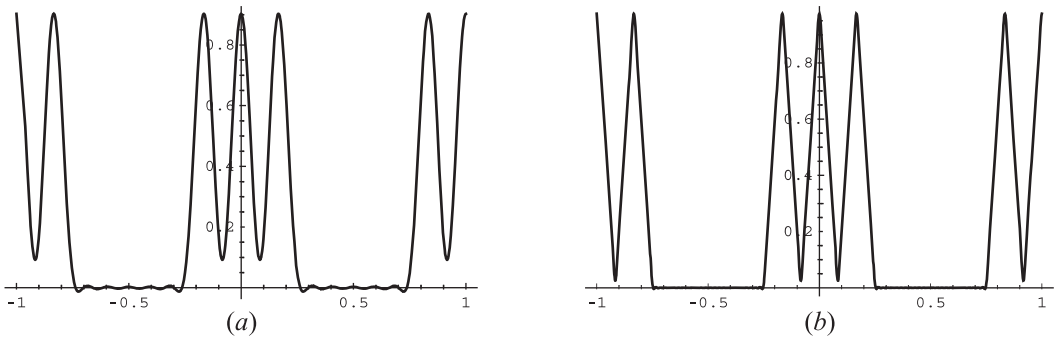


Fig. D.4. Reconstrucción del tren de pulsos triangulares a partir de la suma de $2 \times 10 + 1$ (a) y $2 \times 50 + 1$ (b) términos de la serie de Fourier.

EJEMPLO **D.2.** Cálculo de los coeficientes de Fourier del tren de pulsos triangulares utilizando propiedades
La idea en este caso es calcular la transformada $X(f)$ de un período de la señal periódica (por ejemplo, la que se muestra en la Fig. D.2), y a partir de ella calcular los coeficientes de la serie,

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(f)|_{f=k/T_0}.$$

La manera más sencilla parecer ser comenzando con la transformada de Fourier del pulso triangular que se extiende desde $-T_0/12$ hasta $T_0/12$. Esta transformada se puede calcular a partir de la convolución de dos pulsos rectangulares de ancho $T_0/12$, y alto $\sqrt{A}$, como se propone en el Ejercicio 17. Aplicando la propiedad de convolución, se encuentra que la transformada de este único pulso triangular es

$$X_1(f) = \tfrac{AT_0}{12} \left[\text{sinc}\left(\tfrac{T_0}{12} f\right)\right]^2.$$

Los transformadas de los dos pulsos triangulares a la izquierda y a la derecha del pulso central se calculan aplicando la propiedad de desplazamiento. El pulso de la izquierda está adelantado $\tau = -T_0/6$ unidades de tiempo y el pulso de la derecha está atrasado en la misma cantidad. Por lo tanto, la transformada del pulso de la izquierda es

$$X_2(f) = e^{j2\pi \frac{T_0}{6} f} X_1(f)$$

y la del pulso de la derecha

$$X_3(f) = e^{-j2\pi \frac{T_0}{6} f} X_1(f).$$

Combinando estos tres resultados,

$$\begin{aligned} X(f) &= \tfrac{AT_0}{12} \left(1 + e^{j2\pi \frac{T_0}{6} f} + e^{-j2\pi \frac{T_0}{6} f}\right) \left[\text{sinc}\left(\tfrac{T_0}{12} f\right)\right]^2 \\ &= \tfrac{AT_0}{12} \left[1 + 2\cos\left(2\pi \tfrac{T_0}{6} f\right)\right] \left[\text{sinc}\left(\tfrac{T_0}{12} f\right)\right]^2. \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando la transformada en $f = k/T_0$, y escalando por $1/T_0$ se encuentra que

$$c_k = \tfrac{A}{12} \left[1 + 2\cos\left(\pi \tfrac{k}{3}\right)\right] \left[\text{sinc}\left(\tfrac{k}{12}\right)\right]^2,$$

que evidentemente coincide con el resultado del ejemplo anterior. □

E

Breves reseñas biográficas

Peter Barlow



Nació el 15 de octubre de 1776 en Norwich, Inglaterra. Aunque autodidacta, su educación fue tan buena que pudo competir exitosamente para un puesto de asistente matemático en la Real Academia Militar de Woolwich. Luego de un tiempo comenzó a contribuir varios artículos sobre matemáticas para distintas enciclopedias. Además de estos artículos publicó una serie de importantes libros, como *An elementary investigation of the theory of numbers* (1811) y *A new mathematical and philosophical dictionary* (1814). Es recordado por dos contribuciones importantes: en 1814 produjo un segundo libro, *New mathematical tables*, que rápidamente fue conocido como *Las tablas de Barlow*, donde se listaban los factores, cuadrados, cubos, raíces cuadradas, inversos y logaritmos hiperbólicos de todos los números de 1 a 10000. Se consideraba tan exacto que fue reimpreso regularmente desde entonces.

Su segunda contribución fue en el campo de la astronomía, donde diseñó un lente formado por un líquido incoloro entre dos piezas de vidrio. Sin embargo, en vida fue reconocido por su trabajo en electromagnetismo.

También se dedicó al estudio de la artillería, y al diseño de puentes estudiando el efecto sobre las olas que provocaría la remoción del viejo puente de Londres. Fue designado Real Comisionado de Trenes, y entre 1839 y 1849 llevó a cabo varios experimentos para demostrar que las limitaciones en la pendiente de las vías y los radios de curvatura en los giros propuestas por Stephenson eran correctas. También intentó determinar la sección más eficiente para los rieles. Falleció en Kent el 1 de marzo de 1862.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Daniel Bernoulli

Nació el 8 de febrero de 1700 en Groningen, Holanda. Debido a la férrea oposición de

padre para que estudiara matemáticas, estudió medicina en Heidelberg en 1781, y en Estrasburgo en 1719.



Su tesis doctoral versó sobre la mecánica de la respiración, en base a los conceptos sobre conservación de la energía que le enseñase su padre. Su trabajo médico acerca del flujo sanguíneo y la presión arterial lo interesaron en el flujo de los fluidos.

En 1725 viaja a San Petersburgo, donde estudia los sistemas oscilatorios. Uno de sus mayores descubrimientos es que los movimientos de las cuerdas de los instrumentos musicales se componen de un número infinito de vibraciones armónicas superpuestas en la cuerda.

También produjo trabajos sobre probabilidad y economía política, pero sin duda su trabajo más importante fue el estudio de la hidrodinámica, que contiene el primer análisis correcto del agua que fluye por un orificio. En el capítulo 10 de *Hydrodynamica* discute la base de la teoría cinética de los gases.

En 1759 vuelve a Basel, donde enseña física durante 26 años. Durante las clases realizaba distintas experiencias, que lo indujeron a conjeturar muchas leyes que no fueron verificadas hasta muchos años después, como la ley de Coulomb de la electroestática.

Ganó el Gran Premio de la Academia de París diez veces, por temas en astronomía y náutica: sobre la teoría de las mareas de Newton (1740), ensayos en magnetismo (1743 y 1746), un método para determinar el tiempo en el mar (1747), un ensayo sobre las corrientes marinas (1751), el efecto de las fuerzas en los barcos (1753), y propuestas para reducir el cabeceo durante las marejadas (1757). También elaboró un excelente resumen sobre la oscilación de la columna de aire en los tubos de los órganos de viento.

Recibió gran cantidad de menciones honoríficas durante su visa, y fue electo miembro de las principales sociedades científicas de su época, incluyendo las de Bolonia, San Petersburgo, Berlín, París, Londres, Berna, Turín, Zurich y Manheim. Falleció el 17 de Marzo de 1782 en Basel, Suiza.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Georg Cantor

Nacido en San Petersburgo, el 3 de marzo de 1845, fue un matemático alemán, inventor con Dedekind de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

Cantor descubrió que los conjuntos infinitos no tienen siempre el mismo tamaño, o sea el mismo cardinal: por ejemplo, el conjunto de los racionales es enumerable ("del mismo tamaño" que el conjunto de los naturales), mientras que el de los reales no lo es: existen, por lo tanto, varios infinitos, más grandes los unos que los otros.

Entre estos infinitos, los hay tan grandes que no tienen correspondencia en el mundo real, asimilado al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Este hecho supuso un desafío para un espíritu tan religioso como el de Georg Cantor, y fue víctima de acusaciones de blasfemia por parte de ciertos colegas envidiosos o que no entendían sus descubrimientos. Sufrió de

depresión, y fue internado repetidas veces en hospitales psiquiátricos. Su mente luchaba contra varias paradojas de la teoría de los conjuntos, que parecían invalidar toda su teoría (hacerla inconsistente o contradictoria, en el sentido de que una cierta propiedad podría ser a la vez cierta y falsa).



Además, trató durante muchos años de probar la hipótesis del continuo, lo que se sabe hoy que es imposible, y que tiene que ser aceptada (o rehusada) como axioma adicional de la teoría.

Empezó a interpretar el infinito absoluto (que no es concebible por la mente humana) como Dios, y escribió artículos religiosos sobre el tema. Hoy en día, la comunidad matemática reconoce plenamente su trabajo, y admite que significa un salto cualitativo importante en el raciocinio lógico.

Murió en una clínica psiquiátrica de monjas en Halle el 6 de enero de 1918, aquejado de una enfermedad maníaco-depresiva (la cual se le atribuye a su edad).

(*Wikipedia*)

Lennart Axel Edvard Carleson



Matemático sueco nacido el 18 de marzo de 1928, es uno de los referentes en el área del análisis armónico.

Fue alumno de Arne Beurling, y recibió su doctorado de la Universidad de Uppsala en 1950. Es profesor emérito de la Universidad de Uppsala, del Instituto Tecnológico Real de Estocolmo, y de la Universidad de California en Los Ángeles, y fue director del Instituto Mittag-Leffler en Djursholm durante 1968-1984. Entre 1978 y 1982 se desempeñó como presidente de la Unión Matemática Internacional.

Se casó con Butte Jonsson en 1953, y es padre de dos hijos Caspar (nacido en 1955) y Beatrice (nacida en 1958).

Su trabajo incluye la solución de muchos problemas destacados por medio de técnicas combinacionales, entre los que merecen citarse el teorema corona (1962) en la teoría de los espacios de Hardy, la convergencia casi en todo punto de las series de Fourier de funciones de cuadrado integrable, y trabajos en dinámica compleja. También es conocido por la teoría de medidas que lleva su nombre.

Además de varios artículos relevantes, ha publicado un libro muy influyente sobre teoría potencial, *Selected Problems on Exceptional Sets* (1967), y en colaboración con T. W. Gamelin un texto sobre la iteración de funciones analíticas, *Complex Dynamics* (1993).

Recibió muchas distinciones a lo largo de su carrera, incluyendo el Wolf Prize en Matemáticas en 1992, la medalla de oro Lomonosov en 2002, la medalla Sylvester en 2003, y el premio Abel en 2006 por sus profundas contribuciones al análisis armónico y a la teoría de sistemas dinámicos.

(*Wikipedia*)

James Cooley



Nació en EE.UU. en 1926. Se graduó en 1949, y recibió su doctorado en 1961 en la Universidad de Columbia, Nueva York, en matemática aplicada. Fue uno de los programadores de la computadora de von Newmann en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, desde 1953 hasta 1956. Trabajó en cálculos de mecánica cuántica desde 1956 hasta 1962 en el Instituto Courant, de Nueva York, cuando se unió al grupo de investigación del IBM Watson Research Center, Yorktown Heights, NY.

Su contribución más importante al mundo de las matemáticas y el procesamiento digital de señales fue el desarrollo de la FFT, realizado en conjunto con John Tukey mientras trabajaba para la división de investigaciones de IBM en 1965. Este trabajo fue impulsado por el Dr. Richard L. Garwin de IBM Watson Research quien trataba de averiguar el cumplimiento del tratado de armas nucleares con los soviéticos (acuerdos SALT). La idea era instalar sensores sísmicos en los países vecinos a la Unión Soviética y detectar las vibraciones producidas por los ensayos nucleares, supuestamente abolidos. Estas vibraciones se analizaban con técnicas de Fourier, siendo necesario transformar lo más rápidamente posible un gran volumen de datos. Sugirió la idea de cómo se podían programar un algoritmo semejante a Cooley y Tukey, los que hicieron el trabajo. Se colocaron los sensores, se procesaron las señales, y se pudo detectar una explosión nuclear con una precisión de 15 kilómetros del lugar exacto.

El trabajo que publicaron Cooley y Tukey en 1965 describiendo el algoritmo de la FFT disparó las aplicaciones del procesamiento digital de señales. Después de la publicación Cooley se preocupó de ayudar a otros a entender el algoritmo y su uso.

Luego de retirarse de IBM en 1991 se vinculó con el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Rhode Island, Kingston, donde sigue participando de proyectos de investigación en detección de señales.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive; IEEE*)

August Leopold Crelle

Nació el 11 de marzo de 1780 en Eichwerder, Alemania. Principalmente autodidacta, sintió pasión por las matemáticas, a las que dedicó su tiempo libre mientras aseguraba su subsistencia como ingeniero civil, destacándose en la construcción y planeamiento de carreteras y de una de las primeras líneas férreas de Alemania para el Ministerio Prusiano del Interior.

A pesar de no haber recibido educación formal, a los 36 años su tesis *De calculi variabilium in geometria et arte mechanica usu* fue aprobada por la Universidad de Heidelberg, otorgándole un doctorado. Aunque no fue un matemático original, su pasión por el tema, su capacidad organizativa, y su habilidad para detectar jóvenes talentos matemáticos lo hizo destacarse sobre sus pares.

Fundó en 1826 una revista dedicada exclusivamente a las matemáticas, la *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, de la que fue editor en jefe durante 52 volúmenes. En es-

ta revista publicaron sus primeros trabajos Abel, Eisenstein, Dirichlet, Grassman, Jacobi, Möbius, Weierstrass, entre otros.



En 1828 se vincula al Ministerio Prusiano de Educación y Cultura, donde diseñó una política de enseñanza de la matemática en las escuelas y colegios técnicos. Después de un viaje de estudios a Francia en 1830, resaltó en su informe la organización de la enseñanza matemática francesa, aunque criticaba el énfasis en las aplicaciones. Publicó gran cantidad de libros de textos y tablas de multiplicación, que conocieron varias ediciones.

Aunque el propósito de su revista eran tanto las matemáticas puras como las aplicadas, cambió su punto de vista al no encontrar artículos de matemáticas aplicadas que tuviesen una profundidad similar. De modo que creó una revista destinada exclusivamente a las aplicaciones, la *Journal für die Bankunst*, que conoció 30 volúmenes, finalizando su publicación en 1851.

Crelle fue elegido miembro de la Academia de ciencias de Berlín en 1827, con el respaldo de Alexander von Humboldt. Falleció en Berlín el 6 de octubre de 1855.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Jean D'Alembert



Nació el 17 de noviembre de 1717 en París. Hijo no reconocido del general Destouches y de Madame de Tencin, fue dejado en la puerta de la iglesia de Saint-Jean le Rond, donde un comisario de policía lo recogió y dio en adopción a la mujer de un vidriero llamado Alembert.

De todos los temas que estudió durante su juventud, su verdadera pasión eran las matemáticas, en las que prácticamente fue autodidacta. Presentó su primer trabajo a la Academia de Ciencias de París en julio de 1739, y en 1749 envió un segundo trabajo sobre mecánica de fluidos. Su fama de erudito le llevó a recibir invitaciones de Federico II de Prusia y de Catalina la Grande, que rechazó. Ayudó a resolver la controversia sobre la conservación de la energía cinética mejorando la definición de fuerza de Newton en su *Traité de dynamique* (1743).

En 1746, junto con Diderot, comenzó a editar la *Encyclopédie*, para la cual escribió la mayoría de los artículos sobre matemáticas. Fue un pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales y su aplicación a problemas físicos. En algunos países el teorema fundamental del álgebra se conoce como teorema de d'Alembert-Gauss porque fue el primero en dar una prueba casi completa. En 1747, en un artículo sobre el problema de las cuerdas vibrantes, aparece por primera vez la ecuación de ondas. Fue uno de los primeros en advertir la importancia de establecer firmemente la teoría de límite.

Falleció el 29 de octubre de 1783 en París, donde fue enterrado en una tumba sin marca, como era habitual con los no creyentes.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Paul A. M. Dirac



Nació en Bristol, Inglaterra, el 8 de agosto de 1902. Se graduó como ingeniero electricista en 1921, pero su interés principal eran las matemáticas, donde descolló. Su interés en la física cuántica despertó al leer un trabajo de Heisemberg, en donde encontró similitudes entre algunas propiedades de la mecánica cuántica y la mecánica Hamiltoniana.

En 1928, trabajando en los spines no relativistas de Pauli, halló la ecuación de Dirac, una ecuación relativista que describe al electrón. Este trabajo permitió a Dirac predecir la existencia del positrón, la antipartícula del electrón, que fue observado por primera vez por Carl Anderson en 1932. Dirac contribuyó también a explicar el spin como un fenómeno relativista.

El libro *Principles of Quantum Mechanics*, publicada en 1930, se convirtió en uno de los libros de texto más comunes en la materia y aun hoy es utilizado. Introdujo la notación de Bra-ket y la función delta de Dirac.

En 1931 Dirac mostró que la existencia de un único monopolo magnético en el Universo sería suficiente para explicar la cuantificación de la carga eléctrica. Esta propuesta recibió mucha atención pero hasta la fecha no hay ninguna prueba convincente de la existencia de monopolos.

Paul Dirac compartió en 1933 el Premio Nobel de Física con Erwin Schrödinger "por el descubrimiento de nuevas teorías atómicas productivas." Dirac obtuvo la cátedra Lucasiana de matemáticas de la Universidad de Cambridge donde ejerció como profesor de 1932 a 1969.

Aunque Dirac realizó importantes aportes a la física, su motivación fue siempre perseguir la belleza matemática. Falleció el 20 de octubre de 1984 en Florida, EE.UU.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive; Wikipedia*)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Nació en Düren, actual Alemania, el 13 de febrero de 1805. Su familia era natural del pueblo de Richelet en Bélgica, donde vivió su abuelo, y de donde derivó su apellido "Lejeune Dirichlet" ("le jeune de Richelet" = "el joven de Richelet").

Su padre era el jefe de la oficina de correos de Duren. El joven Johann fue educado en Alemania, y después en Francia, donde aprendió de muchos de los más renombrados matemáticos del tiempo, relacionándose con algunos como Fourier.

Tras graduarse, fue profesor en las universidades de Breslau (1826-1828), Berlín (1828-1855) y Götingen, en donde ocupó la cátedra dejada por Gauss tras su muerte. Sus aportaciones más relevantes se centraron en el campo de la teoría de números, prestando especial atención al estudio de las series, y desarrolló la teoría de las series de Fourier.

Su primera publicación comprendió una demostración particular del teorema de Fermat, para el caso $n = 5$, que también fue completada por Adrien-Marie Legendre, uno de sus revisores. Dirichlet completó su propia prueba casi al mismo tiempo; más adelante completó también la prueba para $n = 14$.



Aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series. En el campo del análisis matemático perfeccionó la definición y concepto de función, y en mecánica teórica se centró en el estudio del equilibrio de sistemas y en el concepto de potencial newtoniano.

Se casó con Rebecka Mendelssohn, que provenía de una distinguida familia de judíos conversos. Era la nieta del filósofo Moses Mendelssohn, hija de Abraham Mendelssohn Bartholdy y hermana del compositor Felix Mendelssohn Bartholdy. Dirchlet falleció en Götingen, actual Alemania, el 5 de mayo de 1859.

(*Wikipedia*)

Leonhard Euler



Nació en Suiza el 15 de abril de 1707. Su interés en la matemática despertó con las enseñanzas de su padre; posteriormente tomó clases con Johann Bernoulli. Su tesis de 1723 compara y contrasta las ideas filosóficas de Descartes y Newton. En 1727 se une a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, creada por Catalina I dos años antes.

En 1744 comienza sus actividades como director de matemáticas de la Academia de Ciencias de Berlín, donde sus tareas incluían la supervisión del observatorio y los jardines botánicos, selección de personal, atender los asuntos financieros, arreglar la publicación de calendarios y mapas geográficos, etc. También debía resolver problemas prácticos para el Rey, como la correción del nivel del canal de Finow, y supervisión del trabajo en bombas y cañerías del sistema hidráulico del palacio Sans Souci, residencia veraniega del rey, y aconsejaba al gobierno sobre las loterías del estado, seguros, pensiones, anualidades y artillería.

A pesar de esta carga de trabajo, su producción científica durante este período fue fenomenal: durante los veinticinco años que estuvo en Berlín produjo alrededor de 380 artículos. Escribió libros sobre el cálculo de variaciones, el cálculo de las órbitas planetarias, artillería y balística, análisis matemático, navegación y construcción de barcos, el movimiento de la luna, lecciones sobre cálculo diferencial, etc. En 1766, a los 59 años vuelve a San Petersburgo.

En 1771 pierde totalmente la vista, pero gracias a su formidable memoria puede continuar sus trabajos en óptica, álgebra y el movimiento de la luna. Después de su muerte en 1783, la Académica de Ciencias de San Petersburgo continuó publicando sus obras inéditas durante casi 50 años.

Su producción matemática es tan vasta que se lo considera el autor matemático más pro-

lífico de todos los tiempos. Impulsó el desarrollo de la geometría analítica, donde fue el primero en considerar el seno, coseno, etc. como funciones y no como cuerdas, idea que databa desde la época de Ptolomeo. Hizo considerables aportes a la geometría, el cálculo y la teoría de números. Hizo converger el cálculo diferencial de Leibniz y Newton en el análisis matemático. Introdujo las funciones beta y gamma, y los factores integrales para la resolución de ecuaciones diferenciales. Estudió la mecánica del continuo, el problema de los tres cuerpos, teoría de elasticidad, acústica, la teoría ondulatoria de la luz, hidráulica, música. Fijó las bases de la mecánica analítica.

A él se debe la notación $f(x)$ para una función (1734), e como base de los logaritmos naturales (1727) , i como la unidad imaginaria (1777), π para pi, y Σ para la sumatoria (1755), la notación para diferencias finitas Δy y $\Delta^2 y$, etc.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Jean Baptiste Fourier



Nacido en Auxerre, Francia, el 21 de marzo de 1768 y huérfano a la edad de ocho años, Jean Baptiste Joseph Fourier ingresó en 1789 en la *Ecole Royale Militaire* de Auxerre, donde mostró talento para la literatura, pero muy pronto las matemáticas se volvieron su interés principal. A los 14 años había completado el estudio de los seis volúmenes del *Cours de mathematique* de Bézout.

En 1787 solicitó su ingresó en la abadía Benedictina para consagrarse a la religión, aunque su interés por las matemáticas permanecía intacto. Su correspondencia sugiere que su propósito era destacarse en esta ciencia: es famosa una carta suya a Bonard donde anota: "Ayer fue mi vigésimo primer cumpleaños. A esta edad Newton y Pascal habían hecho méritos suficientes para alcanzar la inmortalidad".

Dejó el monasterio benedictino en 1789 y se dirigió a París, donde presentó un trabajo sobre ecuaciones algebraicas en la Academia Real de Ciencias. En 1790 tomó un puesto de profesor en el colegio Benedictino en la Escuela Real Militar de Auxerre, donde había estudiado.

Hasta ese entonces, siempre dudó entre dedicarse a la religión o a las matemáticas. Sin embargo, este conflicto se resuelve en 1793, cuando se involucra en política, donde se unió al Comité Revolucionario local. Fourier abrazó los ideales de la Revolución, aunque no apoyó el Terror.

La revolución era un proceso complejo, con muchas facciones que tenían objetivos comunes pero que estaban violentamente enfrentadas entre sí. Fourier defendió a una facción de Orleáns, y a consecuencia de ello estuvo en prisión un tiempo, con riesgo de terminar en la guillotina. Finalmente, los cambios políticos acaecidos después de la muerte de Robespierre resultaron en su liberación.

En 1795 fue admitido en la Ecole Normale de París, creada para instruir a maestros, y modelo de otras escuelas normales. Allí fue alumno de Lagrange, quien, según Fourier, era "el primero entre los hombres de ciencia de Europa" y de Laplace, a quien no admiraba tanto. Luego de egresar, fue maestro en la Ecole Polytechnique, recién creada. A consecuencia de su arresto previo nuevamente fue a prisión, de donde pudo ser liberado

gracias a las súplicas de Lagrange, Laplace, Monge, sus alumnos, y un cambio de clima político.

En 1798 se une a la Armada de Napoleón en la invasión de Egipto, como un consejero científico. Luego de una serie de rápidas victorias fue tomado el delta del Nilo, pero la destrucción completa de la flota napoleónica por la armada de Nelson en la batalla del Nilo confinó a la expedición francesa a las tierras que estaba ocupando. Fourier actuó como un administrador de instituciones políticas similares a las que existían en Francia, y ayudo a establecer establecimientos educacionales en Egipto, además de efectuar diferentes exploraciones arqueológicas. Creó el Instituto de El Cairo, donde fue unos de los doce miembros de la división matemática. Fue elegido secretario del Instituto, cargo que ejerció durante todo el período de la ocupación francesa.

Napoleón volvió a Francia en 1799, y Fourier volvió a París en 1801 con el resto de la fuerza expedicionaria, retomando su puesto de profesor de análisis en la Ecole Polytechnique.. Sin embargo, Napoleón tenía otros planes para él, y lo nombró Prefecto del Departamento de Isère, cargo que Fourier no deseaba, pero que no podía rechazar. Se mudó a Grenoble, y sus principales trabajos en esa posición administrativa fueron el drenado de los esteros de Bourgoin, y la supervisión de la construcción de una carretera entre Grenoble y Turín. También invirtió gran parte de su tiempo en la escritura de su *Descripción de Egipto*, que no estuvo concluida hasta 1810 debido a que Napoleón introdujo muchos cambios, reescribiendo algunas partes. Para la época de una segunda edición, toda referencia a Napoleón había sido eliminada.

Durante su estancia en Grenoble Fourier realizó un importante trabajo matemático sobre la teoría del calor. Comenzó a trabajar en este tema alrededor de 1804, y para 1807 había completado su importante memoria *Sobre la propagación del calor en los sólidos*. Esta memoria fue leida en el instituto de París el 21 de diciembre de 1807, y aunque ahora es muy estimada, en su momento causó controversia, siendo comentada por Lagrange, Laplace, Monge y Lacroix. Este comité no estaba de acuerdo con las expansiones de funciones en base a series trigonométricas (lo que hoy conocemos como *series de Fourier*). Las aclaraciones de Fourier aún no lograron convencer al comité. Según autores modernos, la claridad lógica de las explicaciones de Fourier y la inhabilidad de Laplace y Lagrange para comprenderlas da una buena idea de la originalidad de su trabajo. Otro tipo de objeciones fue elevada por Boit, ya que Fourier no hacía mención al trabajo del primero, publicado en 1804. Laplace y posteriormente Poisson tenían objeciones similares. Para el Premio Matemático de 1811, el Instituto propuso el tema de la propagación del calor en los sólidos, y Fourier envió su memoria de 1807, junto con material adicional sobre el enfriamiento de los sólidos infinitos. Sólo se presento un manuscrito adicional, y el comité de evaluación se decidió finalmente por el trabajo de Fourier, aunque su juicio no fue enteramente favorable: "la manera en que el autor arriba a estas ecuaciones no está a salvo de dificultades, y su análisis para integrarlas deja aún algo de desear, sea en su generalidad o en su rigor". Ante este juicio dudoso no hubo interés en publicar el trabajo de Fourier.

Durante la época de prefecto en Grenoble tuvo una serie de encuentros y desencuentros con Napoleón; finalmente, cuando Napoleón cayó, Fourier volvió a París, donde fue electo miembro de la Academia de Ciencias en 1817, y Secretario de la sección matemática en 1822. En ese año se publica finalmente su ensayo *Théory analytique de la chaleur*, cuya impresión había sido aprobada por el Secretario anterior.

Durante sus últimos años en París Fourier retomó sus investigaciones matemáticas, y publicó una serie de trabajos tanto en matemáticas puras como aplicada. Su vida no transcurrió sin problemas ya que su teoría del calor todavía provocaba controversias. Biot reclamaba prioridad sobre Fourier, una queja que Fourier pudo mostrar fácilmente que era falsa. Sin embargo, Poisson atacó las técnicas matemáticas y propuso una teoría alternativa. Fourier escribió *Historical Précis* como respuesta a estas críticas, pero aunque el trabajo fue mostrado a vario matemáticos, nunca fue publicado. Sin embargo, la obra de Fourier proveyó el ímpetu necesario para los trabajos posteriores en series trigonométricas y la teoría de funciones de una variable real.

Fourier vivió obsesionado por el calor, hasta el punto de mantener sus habitaciones insoportablemente calurosas para sus visitantes, mientras que él vestía un pesado sobretodo. Algunos autores rastrean esta excentricidad hasta sus tres años en Egipto. Falleció por un aneurisma el 16 de mayo de 1830.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Johann Carl Friedrich Gauss



Nació el 30 de abril en Brunswick, Alemania. Comenzó la escuela elemental a la edad de 7 años, donde demostró su potencial casi de manera inmediata. Su maestro Büttmer y su asistente Bartels quedaron sorprendidos cuando Gauss sumó los enteros de 1 al 100 casi instantáneamente ordenando la suma en 50 pares de números que sumaban 101.

En 1788 comenzó su educación en el Gymnasium, donde aprendió Latin. En 1792 ingresó al Colegio Carolingio en 1792, donde descubrió el teorema del binomio, las medias geométricas y aritméticas, la ley de reciprocidad cuadrática, y el teorema de los números primos. En 1795 ingresó a la Universidad de Göttingen, la que abandonó sin haber conseguido un título, pero habiendo hecho uno de sus descubrimientos más importantes: la construcción de un polígono regular de 17 lados utilizando regla y compás. Este fue el avance más importante en este campo desde la época de los matemáticos griegos.

Retornó a Brunswick donde recibió un grado en 1799. Su tesis doctoral fue una discusión sobre el teorema fundamental del álgebra. Publicó su primer libro, *Disquisitiones Arithmeticae* en el verano de 1801.

En 1807 se hizo cargo de la dirección del observatorio de Göttingen. En 1809 publicó su segundo libro, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, un tratado en dos volúmenes sobre el movimiento de los cuerpos celestes. Sus contribuciones a la astronomía teórica concluyeron después de 1817, aunque siguió efectuando observaciones hasta sus 70 años de edad.

Gauss dedicó mucho tiempo a la construcción del nuevo observatorio, finalizado en 1916, pero fue capaz de trabajar en otros temas. Sus publicaciones durante este período incluyen *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, un tratamiento riguroso de las series y una introducción a las funciones hipergeométricas, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, un ensayo práctico sobre integración aproximada, *Bestim-*

mung der Genauigkeit der Beobachtungen, una discusión de estimadores estadísticos, y *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata*. Este último trabajo estuvo inspirado por su trabajo en problemas geodésicos y trataba sobre teoría potencial.

En 1818 Gauss fue designado para efectuar un reconocimiento geodésico del estado de Hannover, tarea que desarrolló personalmente, haciendo mediciones durante el día y reduciéndolas a la noche, haciendo uso de su extraordinaria capacidad mental para los cálculos. Para facilitar las mediciones inventó el heliotropo, que refleja los rayos del sol utilizando un diseño de espejos y un telescopio pequeño. A pesar de este demandante trabajo publicó 70 trabajos sobre éstos y otros temas entre 1820 y 1830.

En 1822 ganó el premio de la Universidad de Copenhagen por *Theoria attractionis...* junto con la idea de mapear una superficie en otra de manera que fuesen similares en sus mínimos detalles. El artículo fue publicado en 1825, y condujo a la publicación muchos años después de *Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie* (1843 y 1846). El artículo *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823), junto con u suplemento (1828) estuvo dedicado a la estadística matemática, en particular al método de cuadrados mínimos.

Desde 1800 Gauss investigó la posible existencia de geometrías no euclídeas, discutiendo ampliamente este tema con Farkas Bolyai. En 1816 presentó pruebas que deducían el axioma de las paralelas a partir de otros axiomas de Euler, sugiriendo que creía en la existencia de geometrías no euclídeas, aunque no fue claro al respecto; posteriormente se sinceró con Schumacher diciéndole que creía que su reputación sufriría si admitía en público la existencia de tal geometría. Tuvo gran interés en geometría diferencial y publicó muchos trabajos sobre el tema. *Disquisitiones generales circa superficies curva* (1828) fue su trabajo más reconocido en este campo.

En 1831 Wilhelm Weber llegó a Göttingen donde ejerció como profesor de física. Gauss, quien lo conocía desde 1828 y apoyó su contratación, había trabajado en física antes de 1831 publicando *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*, y *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* donde discutía las fuerzas de atracción. Estos artículos estaban basados en la teoría de potencial, que probó ser de gran importancia para su trabajo en física.. Posteriormente creyó que su teoría y el método de cuadrados mínimos proporcionaban vínculos vitales entre la ciencia y la naturaleza. En 1832 Gauss y Weber comenzaron a investigar la teoría del magnetismo terrestre después que Alexander von Humboldt intentó obtener la ayuda de Gauss para realizar una grilla de puntos de observación magnética sobre todo el mundo. Gauss se entusiasmó con este proyecto, y para 1840 había escrito tres trabajos importantes sobre el tema, demostrando, entre otras cosas, que sólo podía haber un par de polos magnéticos, y brindando una estimación de la ubicación del polo sur magnético. Humboldt había diseñado un procedimiento para la observación de la declinación magnética, pero luego que su nuevo observatorio magnético fuese construido en 1833, libre de cualquier tipo de material magnético, Gauss modificó muchos de los procedimientos de Humboldt, lo que permitió obtener resultados más precisos con menos esfuerzo.

Entre los logros de Gauss y Weber durante los seis años que trabajaron juntos, merecen citarse el descubrimiento de las leyes de Kirchoff, y un telégrafo primitivo que podía enviar mensajes a distancias de 1,5 km. Sin embargo esto era apenas un pasatiempo para Gauss, y su interés mayor era establecer una red mundial de puntos de observación mag-

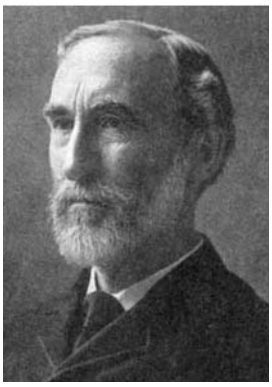
nética. Esta ocupación produjo muchos resultados concretos, incluyendo la publicación de un atlas de geomagnetismo, y una revista donde publicaron sus trabajos desde 1836 a 1841.

Luego de la partida de Weber en 1837 la actividad de Gauss fue disminuyendo. Aún producía pequeñas notas en respuesta a los descubrimientos de otros científicos, usualmente resaltando que conocía esos métodos por años pero no que no había sentido la necesidad de publicar.

De 1845 a 1851 se dedicó a consolidar los fondos de la Fundación de las viudas de Göttingen,lo que le dio experiencia práctica en aspectos financieros, y le permitió consolidad una importante fortuna personal invirtiendo en acciones emitidas por compañías privadas. Desde 1850 en adelante casi todo su trabajo fue de naturaleza práctica, aunque aprobó la tesis doctoral de Riemann; en 1854 discutió una modificación al péndulo de Foucault. Su salud fue decayendo paulatinamente, y murió mientras dormía en la mañana del 23 de febrero de 1855.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Josiah W Gibbs



Nacido el 11 de Febrero de 1839, en New Haven, Connecticut, EE. UU, se graduó en la Universidad de Yale, donde su padre fue profesor de literatura sacra. Su tesis aplicaba métodos geométricos en el diseño de engranajes. Se doctoró en la misma universidad en 1863, siendo el primer doctorado en ingeniería de los EE. UU. Permaneció tres años como tutor en Yale, enseñando latín los dos primeros años y filosofía natural en el tercero. Sus necesidades financieras quedaron cubiertas por la herencia recibida de sus padres. Entre 1866 y 1869 estudió en Europa, pasando el invierno de 1866-67 en París, el año siguiente en Berlín, y 1868-69 en Heidelberg, donde recibió el influjo de Kirchhoff y Helmholtz.

Volvió a Yale en junio de 1869, y en 1871 fue designado profesor de física matemática, aún antes de haber publicado ningún trabajo. De hecho, su primer trabajo, *Graphical Methods in the Thermodynamics of Fluids and A Method of Geometrical Representation of the Thermodynamic Properties of Substances by Means of Surfaces,* fue publicado a la edad de 34 años. Sin embargo, su cultura europea contrastaba con las necesidades prácticas de la ciencia norteamericana de entonces, y por ello el reconocimiento general no fue inmediato. Yale no apreció sus capacidades, ni lo remuneró por sus servicios. En 1876 publica la primera parte del trabajo por el cual es más famoso, *On the Equilibrium of Heterogeneous Substances*, publicando la segunda parte en 1878. Estos trabajos impresionaron a Maxwell. La segunda parte es más notable, ya que según los especialistas fue un evento de primer importancia en la historia de la química, aunque debido a su formalidad y rigor matemáticos tardó años en ser reconocido.

Su trabajo en el análisis vectorial fue de mayor importancia en la matemática pura. Aplicando ideas de Grossmann, Gibbs produjo un sistema de aplicación mucho más sencilla a la física que el de Hamilton. Aplicó sus métodos vectoriales para calcular la órbita de un cometa a partir de tres observaciones. Este método se utilizó para calcular la órbita del

cometa Swift de 1889, y requería mucho menos cálculos que el método de Gauss. Introdujo el producto interno o escalar $\langle u, v \rangle$, el producto vectorial o exterior $u \times v$. También explicó los fenómenos de convergencia en las series de Fourier.

Un serie de trabajos sobre la teoría electromagnética fueron publicados entre 1882 y 1889. También publicó sobre mecánica estadística, brindado un soporte teórico para las teorías de Maxwell y la teoría cuántica. Su última publicación, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* es una excelente recopilación que sienta sobre firmes bases los fundamentos de la mecánica estadística.

Salvo el período de tres año en Europa, Gibbs vivió toda su vida en la misma casa de sus padres, a corta distancia de la escuela, el colegio y la universidad donde trabajó. Falleció en New Haven, Connecticut el 28 de abril de 1903.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*, con extractos de Ronald L. Allen, Duncan Mills))

Heinrich Hertz



Nació el 22 de febrero de 1857 en Hamburgo. Recibió una esmerada educación en humanidades y ciencias naturales; mientras estudiaba en la Universidad de Berlín, demostró aptitudes tanto para las ciencias como para las lenguas, aprendiendo árabe y sánscrito.

Recibió su doctorado en la Universidad de Bonn en 1880, donde estudió con Hermann von Helmholtz, y continuó como su pupilo hasta 1883, año en el que es nombrado profesor de física teórica en la universidad de Kiel. En ese mismo año comenzó sus estudios sobre la teoría electromagnética de Maxwell. Entre 1885 y 1889, mientras era profesor de física experimental en el Politécnico de Karlsruhe, generó ondas magnéticas en el laboratorio y midió su longitud y velocidad. A partir del experimento de Michelson en 1881 (precursor del experimento de Michelson-Morley en 1887), que refutó la existencia del éter luminífero, Hertz reformuló las ecuaciones de Maxwell para tomar en cuenta el nuevo descubrimiento. Probó experimentalmente que las señales eléctricas pueden viajar a través del aire libre, como había sido predicho por James Clerk Maxwell y Michael Faraday; sin embargo, dudaba que sus experiencias pudiesen tener alguna utilidad que no fuese la verificación experimental de las leyes de Maxwell. Cuando lo consultaron acerca de las implicaciones de sus estudios, comentó: "*Ninguna que yo sepa*".

Demostró que la naturaleza de su vibración y su suceptibilidad a la reflexión y refracción eran similares a las de la luz y las ondas de calor, determinando la naturaleza electromagnética de estas últimas.

Descubrió el efecto fotoeléctrico (que fue explicado más adelante por Albert Einstein) cuando notó que un objeto cargado pierde su carga más fácilmente al ser iluminado por la luz ultravioleta.

En 1889 fue designado profesor de física en la Universidad de Bonn, donde continuó sus estudios sobre las descargas eléctricas en gases. En 1892, luego de una serie de severas migrañas, fue sometido a una serie de operaciones Falleció en Bonn a la edad de 36 años,

de ganulomatosis de Wegener, el 1l de enero de 1894.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Andrey Nikolaevich Kolmogorov



Nació en Tambov el 25 de abril de 1903, hijo de madre soltera y de un noble rico. Quedó huérfano muy joven y fue criado por sus tías en Tunoshna cerca de Yaroslavl, de donde era su padre, comerciante de granos que fue deportado de San Petersburgo por su participación en el movimiento revolucionario, y perdido durante la guerra civil rusa.

Kolmogorov fue educado en la escuela de la villa donde vivía, y sus primeros esfuerzos literarios y matemáticos fueron publicados en el periódico escolar. Ya adolescente, diseñó varias máquinas de movimiento perpetuo, ocultando sus defectos tan astutamente que sus maestros no podían descubrirlos. En 1910 fue adoptado por una de sus tías y se mudó a Moscú, donde concurrió al Gymnasium, donde se graduó en 1920.

Ese año comienza sus estudios en la Universidad Estatal de Moscú y en el Instituto Tecnológico Químico, donde ganó reputación por su erudición. Como estudiante, participó en el seminario del historiador ruso S. V. Bachrushin, y publicó su primer trabajo de investigación sobre la posesión de tierras en la república de Novgorod en los siglos XV y XVI.

Al mismo tiempo (1921-1922) obtenía varios resultados en teoría de conjuntos y series trigonométricas. En 1922 ideó una serie de Fourier que diverge en casi todo punto, lo que le valió reconocimiento internacional. Alrededor de esta época decidió dedicar su vida a las matemáticas. Se graduó de la Universidad Estatal de Moscú en 1925; ese mismo año publica su famoso trabajo sobre lógica intuitiva, y se doctora en 1929.

En 1930 hace su primer largo viaje al exterior, visitando Göttingen, Munich y luego París. Su trabajo pionero *Sobre los métodos analíticos de la teoría de probabilidad* fue publicado en alemán en 1931, el mismo año en que fue nombrado profesor de la Universidad Estatal de Moscú. En 1933 publicó *Fundamentos de la teoría de probabilidad*, estableciendo las bases modernas de esta ciencia. En 1935 ocupó la cátedra de Teoría de Probabilidad en la Facultad de Matemática y Mecánica de la Universidad Estatal de Moscú. En 1939 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de la Unión Soviética. En un artículo de 1938 enunció los teoremas básicos para suavizado y predicción de procesos estocásticos estacionarios, que tendría enormes aplicaciones militares durante la inminente guerra fría.

Más tarde Kolmogorov viró sus intereses hacia el área de turbulencia, y sus trabajos de 1941 tuvieron una significativa influencia en ese campo. En mecánica clásica es conocido por la teoría KAM, presentada por primera vez en 1954 en Amsterdam durante el Congreso Internacional de Matemáticos. En 1957 resolvió el problemas número 13 de Hilbert, en conjunto con su estudiante V. I. Arnold.

En 1942 se casó con Anna Dmitrievna Egorova. Durante toda su vida se dedicó con intensidad a la enseñanza, no sólo a nivel universitario, sino que también desarrolló métodos pedagógicos para niños dotados. En la universidad ocupó distintos cargos, inclusive la

dirección de varios departamentos, y fue decano de la Facultad de Matemáticas y Mecánica.

En 1971 se unió a una expedición oceanográfica a bordo del navío Dmitri Mendeleev. Escribió un importante número de artículos para la Gran Enciclopedia Soviética. En sus últimos años dedicó sus esfuerzos a la relación matemática y filosófica entre la teoría de probabilidad en áreas abstractas y aplicadas. Falleció en Moscú el 20 de octubre de 1987.

(*Wikipedia*)

Vladimir Kotelnikov



Nació el 6 de setiembre de 1908 en Kazan, Rusia. Creció en una familia de científicos. Su padre fue un prominente ingeniero mecánico, profesor de matemática y mecánica en la Universidad de Kazan; su tía, también matemática, fue profesora de física en el la misma universidad. Su abuelo había sido el fundador del Departamento Matemático de la Sociedad de Naturalistas y Doctores de Kazan.

Luego de graduarse en el colegio de Moscú ingresó en la Escuela Técnica de Comunicaciones, y posteriormente en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Escuela Superior Técnica de Moscú. En 1931, año en que se graduó, esta escuela se convirtió en el Instituto de Ingeniería de Potencia de Moscú (MPEI), institución a la que Vladimir permaneció vinculado por el resto de su vida. Allí comenzó sus estudios de posgrado, colaborando también con el Instituto de Investigación Científica del Ejército Rojo.

Para sus estudios de posgrado eligió como tema la capacidad de transmisión de las líneas de potencia. En sus trabajos fue el primero en formular de manera matemáticamente precisa el "teorema de muestreo" en el período entre 1931 y 1933. En 1932 publicó su trabajo "Sobre la capacidad del éter y los cables en las comunicaciones eléctricas", en el Primer Congreso del Comité Técnico de Comunicaciones. También realizó estudios sobre filtros no lineales. Al exponer sus trabajos, la impresión general es que "los resultados parecen correctos, pero lucen como ciencia ficción". Sin embargo, fueron trabajos descollantes porque sentaron las bases del desarrollo de las comunicaciones utilizando señales digitales en el Instituto. Kotelinkov trató de difundir sus resultados a través de la revista "Electrichestevo" (Electricidad) en 1936, pero fueron rechazados. En consecuencia, sus trabajos permanecieron desconocidos en occidente, donde Shannon redescubrió estos resultados en 1948.

Kotelinkov desarrolló numerosos equipos antes y durante la segunda guerra mundial, estableciendo una línea de comunicación segura entre Moscú y Khabarovsk. También desarrolló encriptadores para señales telegráficas, que fueron ampliamente utilizados durante la guerra. Además, sentó los fundamentos teóricos de los métodos de cifrado. Por estos resultados le fue conferido el Premio Stalin de primer grado en 1943 y 1946. Donó el importe de los premios para las necesidades del frente de guerra, que fueron utilizados en la construcción de un tanque.

Después de la guerra trabajó activamente en el área de radiocomunicaciones, fundamentalmente en la teoría de inmunidad al ruido. Este fue el tema de su tesis de doctorado,

que no pudo defender durante diez años por la dificultad de encontrar jurados capaces de comprender sus desarrollos.

Kotelinkov participó en la creación de varias instituciones científicas, y tuvo una destacada actuación en el programa espacial ruso en el área de radiolocalización planetaria. Fue recipiente de numerosísimas distinciones internacionales, y en 2003 se celebró una conferencia internacional en su honor, celebrando sus 95 años, el septuagésimo aniversario de su teorema del muestreo, y el quincuagésimo aniversario de su elección como miembro de la Academia de Ciencias de Rusia, ocasión en que fue felicitado por el presidente Putin.

Falleció en Moscú en febrero de 2005.

(M. K. Tchobanou y N. N. Udalov, "Vladimir Kotelnikov and Moscow Power Engineering Institute", *2006 Intenational TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing*, Florencia, Italia, 2 al 6 de Setiembre de 2006, pp. 171-178.)

Joseph-Louis Lagrange



Nació en Turín, Italia, el 25 de enero de 1736, como Giuseppe Lodovico Lagrangia. Su interés en las matemáticas despertó cuando leyó el trabajo de Halley sobre el empleo del álgebra en óptica. A los 19 años fue designado profesor de matemáticas de la Escuela Real de Artillería de Turín.

De esta época son sus resultados sobre el cálculo de variaciones, y su trabajo sobre fundamentos de dinámica, basado en el principio de mínima acción y en la energía cinética.

También realizó estudios sobre la propagación del sonido, realizando importantes contribuciones a la teoría de cuerdas vibrantes. Su modelo era un conjunto de n masas discretas unido por cuerdas sin masa. Resolvió el sistema de $n+1$ ecuaciones diferenciales, donde empleo el método de autovalores por primera vez; haciendo tender n a infinito obtuvo la misma solución funcional que Euler.

Estudió la integración de las ecuaciones diferenciales y realizó varias aplicaciones a tópicos como mecánica de los fluidos, donde introdujo la función lagrangiana. También aplicó sus métodos al estudio de las órbitas de Júpiter y Saturno.

Desde 1766 sucedió a Euler en la dirección de la Academia de Ciencias de Berlín, donde permaneció por 22 años, período durante el cual produjo una serie de trabajos de primera calidad, ganando regularmente el premio de la Academia de Ciencias de París. En 1772 compartió el premio con Euler por el estudio del problema de los tres cuerpos, en 1774 por su trabajo sobre el movimiento de la luna, y en 1780 por las perturbaciones en las órbitas de los comentas inducidas por los planetas.

Su trabajo en Berlín cubrió varias áreas: astronomía, estabilidad del sistema solar, mecánica, dinámica, mecánica de los fluidos, probabilidad, fundamentos del cálculo, teoría de números, etc.

En 1770 presentó su trabajo *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* donde mostraba por qué las ecuaciones de hasta grado 4 pueden resolverse con radicales. En 1787

deja Berlín para asumir como miembro de la Academia de Ciencias de París, donde permaneció por el resto de su vida. En 1788 se publica su *Mécanique analytique* que había escrito en Berlín, donde resume todo el trabajo efectuado en el área de la mecánica desde la época de Newton y es notable por el empleo de la teoría de ecuaciones diferenciales. Con esta obra Lagrange transformó la mecánica en una rama del análisis matemático.

Como miembro de la Academia participó en la comisión de pesos y medidas en 1790, donde favoreció el empleo de una base decimal. En 1808 Napoleón lo designó Conde del Imperio, y en 1813 fue nombrado *grand croix* de la *Ordre Impérial de la Réunion*. Murió una semana más tarde, el 10 de abril de 1813, en París.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Pierre Simon, Marqués de Laplace



Astónomo, físico y matemático francés, nacido en Beaumont en Auge, el 23 de marzo de 1749. Estudió en la Escuela Militar de Beaumont, y por recomendación de D'Alembert, impresionado por una carta suya sobre mecánica, fue nombrado profesor de la Escuela Militar de París. Posteriormente pasó a la Escuela Normal. En 1799 fue nombrado Ministro del Interior durante el Consulado. En el Imperio fue senador y conde (1806) y recibió la Gran Cruz de la Legión de honor. Después de las restauración borbónica (1817) recibió el título de marqués de Laplace. En matemáticas aportó muchos avances al cálculo de probabilidades y a la estadística, y se le deben la transformación integral de Laplace, la ecuación diferencial de Laplace, y el *laplaciano*, un operador diferencial igual a la suma de las derivadas segundas de una función en un espacio multidimensional.

En química, ayudó a Lavoisier a demostrar que la respiración es una forma de combustión, colaborando con él en el diseño de un calorímetro. En física estudió los fenómenos de capilaridad y la transmisión del sonido en los gases; obtuvo una fórmula para calcular la altura sobre el nivel del mar a partir de la presión atmosférica, y proporcionó la base matemática para explicar distintos fenómenos de termología (estudio del calor) y electromagnetismo.

En astronomía, su aportación fundamental fue la demostración de la estabilidad del sistema solar, de acuerdo a la mecánica celeste basada en la gravitación universal de Newton. Antes se creía que los movimientos de los astros eran inestables, y el propio Newton creyó necesaria la intervención de Dios para mantener el sistema en equilibrio. Laplace demostró que los movimientos medios de los planetas y los satélites son estables, que las desviaciones se compensan, y que las anomalías aparentes son periódicas. En particular, explicó la aceleración de la Luna como resultado de la excentricidad de la órbita terrestre, y estudió los movimientos de los satélites de Júpiter y Saturno.

Como a Lavoisier, se lo ha acusado de aprovecharse de los descubrimientos de otros, pero también hay que reconocer que sus hallazgos superan lo que obtuvo de los demás.

En 1785 fue elegido miembro de la Academia francesa de Ciencias, presidiéndola varias veces. Entre sus obras destacan *Exposition du système du monde* (1796), donde presenta la

hipótesis nebular, que afirma que el sistema solar se formó como consecuencia de una contracción de una nube de gas y polvo; *Traité de mécanique celeste* (1798-1827), y *Théorie analytique des probabilités* (1812). Se cuenta que al presentar a Napoleón un ejemplar de su Mecánica Celeste, el emperador le dijo: *Has escrito este libro sin mencionar al autor del universo*, a lo que Laplace replicó: *Señor, yo no necesito esa hipótesis*. Cuando Lagrange lo supo, dijo: *Pues es una hipótesis excelente. Explica muchas cosas.*

Laplace falleció en París el 5 de marzo de 1827.

(Manuel Alfonseca, *Grandes Científicos de la Humanidad*, Espasa, 1998, Tomo I.)

Henri Léon Lebesgue



Nació el 28 de junio de 1875 en Beauvais, Oise, Picardie, France. Matemático francés, fue profesor de las universidades de Rennes, Poitiers, París, y del Colegio de Francia.

Trabajó en topología, parte de las matemáticas que estudia las figuras geométricas sin tener en cuenta su tamaño ni ciertas distorsiones de su forma.

Con base en el trabajo de otros matemáticos, entre ellos Emile Borel y Camille Jordan, Lebesgue formuló la teoría de la medida en 1901. Al año siguiente definió la integral de Lebesgue, la cual generaliza la noción de la integral de Riemann al extender el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas. Este es uno de los logros del análisis moderno que expande el alcance del análisis de Fourier. Lebesgue dio a conocer este desarrollo en su disertación "Intégrale, longueur, aire" ("Integral, longitud, área") presentada en la Universidad de Nancy en 1902.

Además de aproximadamente 50 artículos, escribió dos libros:*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904) y *Leçons sur les series trigonométriques* (1906) donde amplía el análisis de Fourier. A su vez, contribuyó en otras áreas de matemáticas como topología, teoría del potencial y análisis de Fourier. En 1905 presentó una discusión sobre las condiciones que Lipschitz y Jordan habían utilizado para asegurar que f (x) es la suma de su serie de Fourier.

En 1910 recibió una cátedra en la Sorbonne, pero no se concentró en el área de estudio que él había iniciado: su trabajo era una generalización, pero Lebesgue era temeroso de las mismas. En sus palabras: *Reducida a teorías generales, las matemáticas serían una forma hermosa sin contenido. Morirían rápidamente*. A pesar de que desarrollos posteriores demostraron que su temor no tenía fundamentos, nos permite entender el curso que siguió su trabajo.

En 1922 fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias de París, y en 1930 de la Royal Society de Londres. Falleció el 26 de julio de 1941 en Paris, France.

(Manuel Alfonseca, *Grandes Científicos de la Humanidad*, Espasa, 1998, Tomo I.)

Adrien-Marie Legendre

Matemático francés, nacido en París el 18 de septiembre de 1752. Hizo importantes con-

tribuciones a la estadística, la teoría de números, el álgebra abstracta y el análisis matemático.



Gran parte de su trabajo fue perfeccionado posteriormente por otros: sus trabajos en las raíces de los polinomios inspiró la teoría de Galois; los trabajos de Abel en las funciones elípticas se construyeron sobre los de Legendre; parte de la obra de Gauss sobre estadística y teoría de números complementaba la suya.

En 1830 dio una prueba del último teorema de Fermat para el exponente $n = 5$, casi simultáneamente con Dirichlet en 1828.

En teoría de números, conjeturó la ley de la reciprocidad cuadrática, probada luego por Gauss. Realizó trabajos pioneros en la distribución de los números primos, y en la aplicación del análisis a la teoría de números. Su conjetura del teorema de los números primos (1796) fue comprobada por Hadamard y de la Vallée-Poussin en 1898.

Legendre realizó una cantidad impresionante de trabajo en las funciones elípticas, incluyendo la clasificación de las integrales elípticas, pero se necesitó la genialidad de Abel al estudiar las inversas de las funciones de Jacobi para solucionar completamente el problema.

Se le conoce por la Transformada de Legendre, utilizada para pasar de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana de la mecánica clásica. También se usa en termodinámica para obtener la entalpía de las energías libres de Helmholtz y Gibbs partiendo de la energía interna. Falleció en Auteuil, Francia, el 10 de enero de 1833.

(*Wikipedia*)

Gottfried Wilhelm von Leibniz



Nació en Leipzig, Sajonia (hoy Alemania) el 1 de Julio de 1646. En 1671 publica *Hypothesis Physica Nova* (Nuevas hipótesis físicas), donde proclamaba, como Kepler, que el movimiento depende de la acción de un espíritu.

Por esa época, emprendió la construcción de una máquina de calcular, que prometió a la Academia de Ciencias de París.

Durante su estancia en París desarrolló las características básicas de su versión del cálculo, y en 1675 escribió un manuscrito donde aparece por primera vez el símbolo $\int f(x)\,dx$, y la regla de derivación del producto. Fue electo miembro de la Real Sociedad de Londres en 1673.

De vuelta en Hanover (1678-1679) se involucró en otras actividades, tales como el drenaje de agua de las minas de las montañas de Harz, donde proponía utilizar la energía eólica y del agua para el funcionamiento de las bombas.

Sus logros matemáticos incluyen el desarrollo de un sistema de aritmética binaria (1679); a raíz de su trabajo sobre resolución de sistemas de ecuaciones lineales sentó las bases de la teoría de determinantes. Se abocó también al estudio de la dinámica, perfeccionando las ideas de energía cinética, potencial y momento.

Sobre el final de su vida, se empeñó en una célebre disputa con Newton sobre la prioridad de la invención del cálculo. Falleció en 1714 en Hanover.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

James Clerk Maxwell



Nació en Edimburgo, el 13 de junio de 1831. Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado un conjunto de ecuaciones que expresan las leyes básicas de la electricidad y magnetismo así como por la estadística de Maxwell-Boltzmann en la teoría cinética de gases.

Maxwell fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo y se le representa frecuentemente como el ejemplo del científico clásico del siglo XIX cuya influencia se deja notar grandemente en la física del siglo XX habiendo hecho contribuciones fundamentales en la comprensión de la naturaleza. En 1931 con motivo de la conmemoración del centenario de su nacimiento Albert Einstein describió el trabajo de Maxwell como "el más profundo y provechoso que la física ha experimentado desde los tiempos de Newton"

Maxwell, que desde un principio mostró una gran facilidad para las disciplinas científicas, inició sus estudios universitarios a la edad de 13 años. Con 15 redactó un importante trabajo de mecánica. A los 25 fue nombrado catedrático en Aberdeen, después en Londres y, en 1871, de un instituto especialmente construido para él en Cambridge. Además de su actividad profesional, Maxwell se dedicó a la realización de estudios de carácter privado en sus posesiones de Escocia.

Entre sus primeros trabajos científicos Maxwell trabajó en el desarrollo de una teoría del color y de la visión y estudió la naturaleza de los anillos de Saturno demostrando que estos no podían estar formados por un único cuerpo sino que debían estar formados por una miríada de cuerpos mucho más pequeños. También fue capaz de probar que la teoría nebular de la formación del Sistema Solar vigente en su época era errónea ganando por estos trabajos el Premio Adams de Cambridge en 1859. También en 1859 Maxwell formuló la expresión termodinámica que establece la relación entre la temperatura de un gas y la energía cinética de sus moléculas. En 1860, Maxwell demostró que era posible realizar fotografías en color utilizando una combinación de filtros rojo verde y azul obteniendo por este descubrimiento la Medalla Rumford ese mismo año.

Es el creador de la moderna electrodinámica y el fundador de la teoría cinética de los gases. Descubrió las ecuaciones que llevan su nombre (ecuaciones de Maxwell), y que se definen como las relaciones fundamentales entre las perturbaciones eléctricas y magnéticas, que simultáneamente permiten describir la propagación de las ondas electromagnéticas que, de acuerdo con su teoría, tienen el mismo carácter que las ondas luminosas.

En el prefacio de su obra *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) declaró que su principal tarea consistía en justificar matemáticamente conceptos físicos descritos hasta ese momento de forma únicamente cualitativa, como las leyes de la inducción electromagnética y de los campos de fuerza, enunciadas por Michael Faraday. Con este objeto, Maxwell introdujo el concepto de onda electromagnética, que permite una descripción matemática

adecuada de la interacción entre electricidad y magnetismo mediante sus célebres ecuaciones que describen y cuantifican los campos de fuerzas. Su teoría sugirió la posibilidad de generar ondas electromagnéticas en el laboratorio, hecho que corroboró Heinrich Hertz en 1887, ocho años después de la muerte de Maxwel.

Sus teorías constituyeron el primer intento de unificar dos campos de la física que, antes de sus trabajos, se consideraban completamente independientes: la electricidad y el magnetismo (conocidos como electromagnetismo).

Maxwell falleció en Cambridge, Reino Unido, el 5 de noviembre de 1879.

(*Wikipedia*)

Albert Abraham Michelson



Nació en Strzelno, Polonia, el 19 de diciembre de 1852. Hijo de Samuel Michelson y de Rozalia, hija de Abraham Przylubski. Dejó su Prusia natal (en lo que hoy es Polonia) con sus padres en 1855. Vivió primero en Nueva York, y más adelante en Virginia City, Nevada y San Francisco, donde su familia prosperó en los negocios.

A los 17 años entró en la Academia Naval de los Estados Unidos en Annapolis, Maryland, en donde aprendió más de la ciencia que del arte marítimo. Obtuvo el grado de oficial en 1873 y prestó servicios como instructor científico en la Academia entre 1875 y 1879.

Ya en 1877, cuando aún era oficial de la Marina de los Estados Unidos, Michelson empezó a estudiar una mejora del método para medir la velocidad de luz basado en espejos rotativos, que había inventado Léon Foucault, utilizando instrumentos ópticos mejores y de mayor tamaño.

Llevó a cabo algunas mediciones preliminares con equipos improvisados en gran medida en 1878, período en el que sus trabajos llamaron la atención de Simon Newcomb, director del Nautical Almanac Office, que ya estaba muy adelantado en sus proyectos de medición. Michelson publicó sus resultados de $299{,}910 \pm 50$ km/s en 1879 antes de unirse al equipo de Newcomb, en Washington. Se inició de ese modo entre ambos una larga colaboración profesional y amistad. Tras dos años de estudios en Europa, dejó la Armada en 1881.

En 1883 aceptó una plaza de profesor de Física en la Case School of Applied Science de Cleveland y proyectó allí un interferómetro mejorado.

En 1887 colaboró con su colega Edward Williams Morley en el experimento Michelson-Morley. Su experimento sobre el movimiento relativo esperado entre la Tierra y el éter, el hipotético medio en el que se suponía que viajase la luz, llevó a resultados nulos.

Es prácticamente seguro que Albert Einstein era conocedor del trabajo; lo que ayudó mucho a aceptar la teoría de la relatividad. Michelson creó también un interferómetro para medir con gran precisión la longitud del metro basándose en las longitudes de onda de una de las líneas espectrales de un gas estableciendo así un patrón de medida universal.

En 1892 Michelson, tras su paso como profesor de Física por la Clark University de

Worcester, Massachusetts, desde 1889, fue Jefe del Departamento de Física de la nueva Universidad de Chicago, cargo en el que permaneció hasta que se jubiló en 1929. En 1907 se convirtió en el primer estadounidense que obtuvo el premio Nobel de Física. Entre 1923 y 1927 fue presidente de la Academia Nacional de Ciencias. Falleció el 9 de mayo de 1931 en Pasadena, California.

(*Wikipedia*)

Isaac Newton



Sir Isaac Newton nación en 4 de enero de 1643 en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra. Estableció las bases del cálculo diferencial e integral, varios años antes (y de manera independiente) que Leibniz. Ante el retiro de Barrow, ocupó la cátedra Lucasiana en la Universidad de Cambridge.

Su libro *Optica* (1704) explica su teoría sobre la naturaleza ondulatoria de la luz, aunque algunos de sus resultados se apoyaban en la teoría corpuscular.

Su mayor logro fueron sus trabajos en física y mecánica celeste, que culminó con la teoría de gravitación universal. Su *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) se considera el mejor libro científico jamás escrito. En él explicaba una serie de fenómenos aparentemente no relacionados: la órbita excéntrica de los cometas, las mareas y sus variaciones, la precesión del eje terrestre, el movimiento de la luna debido a la perturbación ocasionada por la gravedad solar.

Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Se lo suele considerar como el científico más grande de todos los tiempos, y a su obra como la culminación de la Revolución científica. Sus trabajos científicos le valieron reconocimiento internacional áun en vida.

Entre sus hallazgos científicos se encuentranmerecen citarse el descubrimiento de que el espectro de color que se observa cuando la luz blanca pasa por un prisma es inherente a esa luz, en lugar de provenir del prisma (como había sido postulado por Roger Bacon en el siglo XIII); su argumentación sobre la posibilidad de que la luz estuviera compuesta por partículas; el desarrollo de una ley de conducción térmica, que describe la tasa de enfriamiento de los objetos expuestos al aire; sus estudios sobre la velocidad del sonido en el aire; y su propuesta de una teoría sobre el origen de las estrellas.

Newton comparte con Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de las matemáticas, desarrollando el teorema del binomio.

En sus últimos años abandonó la academia, ocupando cargos políticos en Londres, y fue electo presidente de la Real Academia de Ciencias, desde donde disputó vivamente con Leibniz sobre la paternidad del cálculo diferencial. Falleció en Londres en 1727.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Harry Nyquist



Nació en Nilsby, Suecia, el 7 de febrero de 1889; emigró a los Estados Unidos de América en 1907 y comenzó sus estudios en la Universidad de North Dakota en 1912. Realizó un doctorado en Física en la Universidad de Yale en 1917. Trabajó para AT&T desde 1917 hasta 1934, luego se cambió a Bell Telephone Laboratories.

Como ingeniero en los laboratorios de Bell, desarrolló un importante trabajo en ruido térmico (Johnson-Nyquist noise) y en la estabilidad de los amplificadores realimentados.

Su temprano trabajo teórico en la determinación de los requerimientos del ancho de banda para la transmisión de la información, el cual fue publicado en *Certain factors affecting telegraph speed* (Bell System Technical Journal, 3, 324-346, 1924), contribuyó a la fundación de los avances posteriores realizados por Claude Shannon, el cual condujo al desarrollo de la Teoría de la Información.

En 1927 Nyquist determinó que una señal analógica limitada en banda debería ser muestreada como mínimo con una frecuencia doble que el ancho de banda de la señal para ser convertida en una representación adecuada en forma digital. Nyquist publicó sus resultados en el artículo *Certain topics in Telegraph Transmission Theory* (1928). Esta regla es ahora conocida como el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon.

Se retiró de Bell Labs en 1954 y murió en Harlingen, Texas el 4 de abril de 1976.

(*Wikipedia*)

Georg Friedrich Bernhard Riemann



Matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial, algunas de ellas allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Nació en Breselenz, una aldea cercana a Dannenberg en el Reino de Hanóver, actualmente parte de Alemania, el 17 de septiembre de 1826. Su padre Friedrich Bernhard Riemann era pastor luterano en Breselenz y había luchado en las guerras napoleónicas. Bernhard era el segundo de seis niños, su frágil salud y la temprana muerte de casi todos sus hermanos fueron debidos a la mala alimentación en su niñez. Su madre también murió tempranamente.

En 1840 Bernhard fue a Hanóver a vivir con su abuela y a visitar el Lyceum. Después de la muerte de su abuela en 1842 entró al Johanneum Lüneburg. Desde pequeño demostró una fabulosa capacidad para el cálculo unido a una timidez casi enfermiza. Durante sus estudios de secundaria aprendía tan rápido que en seguida adelantaba a todos sus profesores.

En 1846, a la edad de 19, comenzó a estudiar filología y teología en la Universidad de Göttingen; su motivación principal era complacer a su padre y poder ayudar a su familia haciéndose pastor. Atendió a conferencias de Gauss sobre el método de mínimos cuadrados. En 1847 su padre reunió el dinero suficiente para que comenzara a estudiar matemáticas.

En 1847 se trasladó a Berlín, donde enseñaban Jacobi, Dirichlet y Steiner. En 1848, cuando estallaron manifestaciones y movimientos obreros por toda Alemania, Riemann fue reclutado por las milicias de estudiantes y ayudó a proteger al rey en su palacio de Berlín. Permaneció allí por dos años y volvió a Göttingen en 1849.

Riemann dio sus primeras conferencias en 1854, en las cuales fundó el campo de la geometría de Riemann. Lo promovieron a profesor extraordinario en la universidad de Göttingen en 1857 y se hizo profesor ordinario en 1859. En 1862 se casó con Elise Koch.

Entre sus obras merecen citarse *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (1851), disertación sobre la teoría general de funciones de variable compleja, basada en las hoy llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann, donde presenta el concepto hoy conocido como superficie de Riemann..

En *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854) realizado para acceder a su cargo de Privadozent ("Profesor auxiliar"), analiza las condiciones de Dirichlet para el problema de representación de funciones en serie de Fourier. Con este trabajo definió el concepto de integral de Riemann y creó una nueva rama de las matemáticas: la teoría de funciones de una variable real.

Ueber die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde liegen (1854) es una transcripción de una clase magistral impartida por Riemann a petición de Gauss, y versa sobre los fundamentos de la geometría, generalizando los principios de la geometría euclidiana y la no euclídea. La unificación de todas las geometrías se conoce hoy en día como geometría de Riemann y es básica para la Teoría de la Relatividad de Einstein.

Ueber die Anzahl der Primzahlem unter einter gegebenen Grösse (1859) es su trabajo más célebre, y trata sobre la teoría de números. La mayor parte está dedicado a los números primos, y en él introduce la función zeta.

Murió de tuberculosis en su tercer viaje a Italia en Selasca, el 20 de junio de 1866.

(*Wikipedia*)

Claude Elwood Shannon

Los primeros años de su vida los pasó en Gaylord, donde se graduó de la secundaria en 1932. Desde joven, Shannon demostró una inclinación hacia las cosas mecánicas. Resaltaba respecto a sus compañeros en las asignaturas de ciencias. Su héroe de la niñez era Edison, a quien luego se acercó bastante en sus investigaciones.

En 1932 ingresó en la Universidad de Michigan, siguiendo a su hermana Catherine, doctora en matemática. En 1936 obtuvo los títulos de ingeniero electricista y matemático. Su interés por la matemática y la ingeniería continuó durante toda su vida.

En 1936 aceptó la posición de asistente de investigación en el Departamento de Ingeniería Eléctrica en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT). Su situación le permitió continuar estudiando mientras trabajaba por horas para el departamento, donde trabajó

en el computador analógico más avanzado de esa era, el analizador diferencial de Vannevar Bush.



En ese momento surgió su interés hacia los circuitos complejos de relés. Intentando simplificar centralitas telefónicas de relés se dio cuenta de que estos podían usarse para hacer cálculos. Sumado esto a su gusto por la lógica y el álgebra boleana pudo desarrollar esta idea durante el verano de 1937, que pasó en los laboratorios Bell en la ciudad de Nueva York.

En su tesis de maestría en el MIT, demostró cómo el álgebra booleana se podía utilizar en el análisis y la síntesis de la conmutación y de los circuitos digitales. La tesis despertó un interés considerable cuando apareció en 1938 en las publicaciones especializadas. En 1940 le fue concedido el Premio a ingenieros americanos del Instituto Americano Alfred Nobel de Estados Unidos, una concesión dada cada año a una persona de no más de treinta años. Un cuarto de siglo más tarde H. H. Goldstine, en su libro *Las computadoras desde Pascal hasta Von Neumann*, citó su tésis como una de las más importantes de la historia que ayudó a cambiar el diseño de circuitos digitales.

Durante el verano de 1938 realizó trabajos de investigación en el MIT y le fue concedida la beca Bolles cuando trabajaba como ayudante de enseñanza mientras realizaba un doctorado en matemática.

En 1940 estudió una maestría en ingeniería eléctrica y se doctoró en filosofía matemática.

Shannon pasó quince años en los laboratorios Bell, una asociación muy fructífera con muchos matemáticos y científicos de primera línea como Harry Nyquist, Walter Houser Brattain, John Bardeen y William Bradford Shockley, inventores del transistor; George Stibitz, quien construyó computadoras basadas en relevadores y muchos otros más.

Durante este período Shannon trabajó en muchas áreas, descollando en la teoría de la información, un desarrollo que fue publicado en 1948 como *Una Teoría Matemática de la Comunicación*. En este trabajo se demostró que todas las fuentes de información (telégrafo eléctrico, teléfono, radio, la gente que habla, las cámaras de televisión, etc.,...) se pueden medir y que los canales de comunicación tienen una unidad de medida similar. Mostró también que la información se puede transmitir sobre un canal si y sólo si la magnitud de la fuente no excede la capacidad de transmisión del canal que la conduce, y sentó las bases para la corrección de errores, supresión de ruidos y redundancia.

En el área de las computadoras y de la inteligencia artificial publicó en 1950 un trabajo que describía la programación de una computadora para jugar al ajedrez, convirtiéndose en la base de posteriores desarrollos.

A lo largo de su vida recibió numerosas condecoraciones y reconocimientos de universidades e instituciones de todo el mundo.

Claude Elwood Shannon falleció el 24 de febrero del año 2001, a la edad de 84 años, después de una larga lucha en contra la enfermedad de Alzheimer.

(*Wikipedia*)

John Wilder Tukey



Nació el 16 de junio de 1915 en New Bedford, Massachusetts. Obtuvo una Maestría en Ciencias en 1937 en la Universidad de Brown, antes de trasladarse a la universidad de Princeton donde recibió un Doctorado en Matemáticas. Durante la Segunda Guerra Mundial trabajó en la Oficina de la Investigación de Control de Fuego de Artillería y colaboró con Samuel Wilks y William Cochran. Después de la guerra regresó a Princeton dividiendo su tiempo entre la universidad y los Laboratorios AT&T Bell.

Su interés estadístico fue amplio y variado. Es particularmente recordado por el desarrollo junto con James Cooley de la transformada rápida de Fourier. En 1970, desarrolló la estimación Jackknife, también denominada la Quenouille-Tukey Jackknife. Introdujo el Diagrama de la Caja (Box Plot) y el Diagrama de Tallos y Hojas (Steam and Leaf Plot) en su libro *Análisis Exploratorio de Datos*.

También contribuyó a la práctica estadística y articuló la importante distinción entre el análisis de datos exploratorio y el análisis de datos confirmativo. Aunque creía en la utilidad de separar los dos tipos de análisis, demostró que a veces, especialmente en la ciencia natural, esto era problemático.

Entre sus muchas contribuciones a la sociedad civil, Tukey prestó sus servicios en un comité de la Sociedad Estadística Americana que produjo un informe que criticaba las conclusiones del Informe Kingsey, "Problemas Estadísticos del Reporte Kinsey sobre el Comportamiento Sexual en el Varón Humano".

Tukey acuñó muchos términos estadísticos que ahora son de uso común, pero las dos más famosas palabras inventadas por él están relacionadas con la informática. Mientras trabajaba con John von Neumann en los primeros diseños de computadoras, Tukey introdujo la palabra "bit" como contracción de "dígito binario" (por sus siglas en inglés Binary Digit). También impuso la expresión *computer software* en un artículo de 1958 en el American Mathematical Monthly, aparentemente el primer uso del término. También fue el creador del no tan conocido "Lines Media-Media", un método más simple para obtener la línea de regresión. Se retiró en 1985, y falleció en New Brunswick, New Jersey en el 2000.

(*Wikipedia*)

2.13. Ejercicios

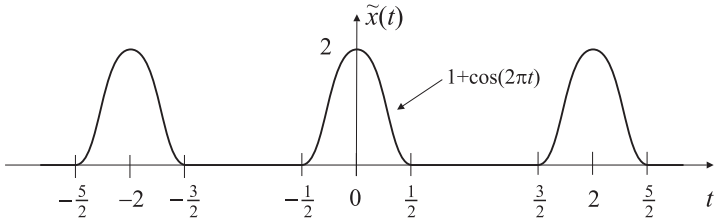
Ejercicio 1. Encuentre la relación entre los coeficientes a_k, b_k de la serie de Fourier de senos y cosenos con los coeficientes c_k de la serie de Fourier exponencial.

Ejercicio 2. Una señal de uso frecuente en comunicaciones es el *pulso coseno elevado*

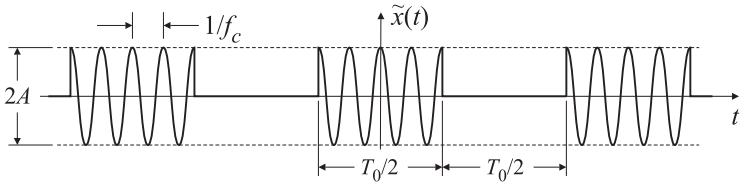
$$c(t) = \begin{cases} 1 + \cos(2\pi t), & -1/2 \leq t \leq 1/2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La figura muestra una señal $\tilde{x}(t)$ periódica, de período $T = 2$, compuesta por pulsos coseno elevado equiespaciados. Muestre que los primeros tres términos de la expansión en series de Fourier de $\tilde{x}(t)$ son

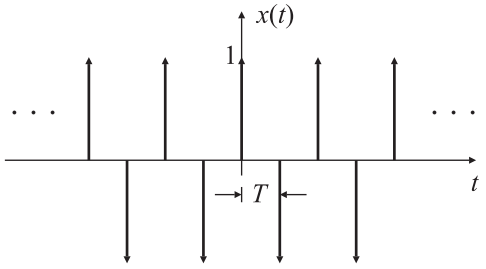
$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi}\cos \pi t + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \ldots$$



Ejercicio 3. Evalúe la amplitud del espectro de la señal de RF pulsada que se muestra en la figura, suponiendo que $f_c = 10/T_0$.



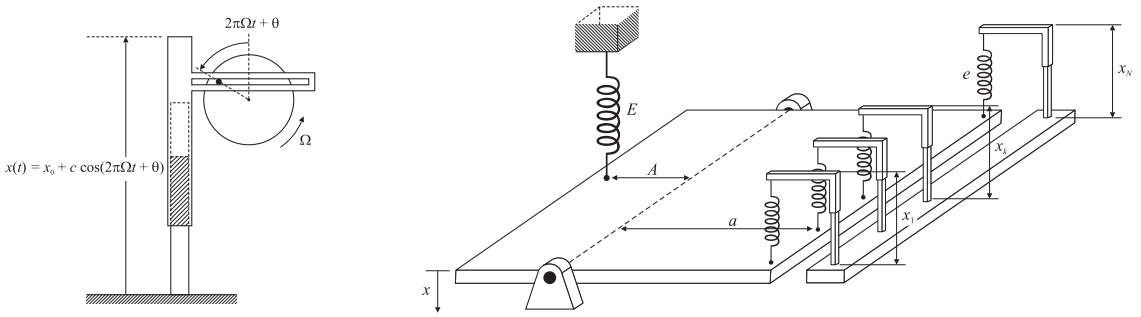
Ejercicio 4. La transformada de Fourier del tren (infinito) de impulsos $x(t) = \sum_n \delta(t - nT)$ es $X(f) = (1/T)\sum_k \delta(f - k/T)$. En base a este par transformado, calcule la transformada de Fourier del tren (infinito) de impulsos *alternantes* $x(t) = \sum_n (-1)^n \delta(t - nT)$. Aplicando propiedades, justifique "intuitivamente" el resultado obtenido.



Ejercicio 5. Pruebe las siguientes propiedades de la serie de Fourier:

1. Los coeficientes de Fourier c_k de una función $\tilde{x}(t)$ periódica y par $[\tilde{x}(t) = \tilde{x}(-t)]$ son reales y pares: $c_k = c_{-k}$.
2. Los coeficientes de Fourier c_k de una función $\tilde{x}(t)$ periódica e impar $[\tilde{x}(t) = -\tilde{x}(-t)]$ son imaginarios puros e impares: $c_k = -c_{-k}$.
3. Si $\tilde{x}(t)$ tiene "simetría de media onda", esto es $\tilde{x}\left(t \pm \frac{1}{2}T_0\right) = -\tilde{x}(t)$ donde T_0 es el período de $\tilde{x}(t)$, las armónicas pares de la serie de Fourier son nulas ($c_{2r} = 0$, $c_{2r+1} \neq 0$): las armónicas de la señal son los múltiplos impares de la frecuencia fundamental).

Ⓒ **Ejercicio 6.** A fines del siglo XIX, A. Michelson y S. Stratton idearon un dispositivo mecánico para síntesis armónica, es decir, para reconstruir una señal $x(t)$ a partir de un conjunto de coeficientes de Fourier c_k.



(a) (b)

1. Muestre que el sistema mecánico de la Fig. (a) permite generar la señal de desplazamiento $x(t) = x_0 + c\cos(2\pi\Omega t + \theta)$ a partir de un movimiento circular uniforme.
2. La Fig. (b) ilustra cómo sumar mecánicamente pequeños desplazamientos. La constante elástica del resorte grande es E, y la de los N resortes más pequeños es e. El extremo inferior del resorte grande se desplaza una cantidad x cuando los resortes pequeños se someten a desplazamientos $x_1, \ldots, x_N$. Muestre que la elongación del resorte grande es $L + x$ y las de los resortes pequeños es $\ell + x_k - (a/A)x, k = 1, \ldots, N$, donde L y ℓ son los estiramientos de los resortes grande y pequeños, respectivamente, cuando $x = x_1 = x_2 = \cdots x_N = 0$.
3. Sabiendo que la ecuación de balance de momentos es $\sum_{i=1}^{N}\left[\ell + x_i - \left(\frac{a}{A}\right)x\right]ea = (L + x)\,EA$, demuestre que el extremo inferior del resorte grande se desplaza

$$x = N^{-1}\left(\frac{a}{A} + \frac{\ell}{L}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

El dispositivo de Michelson y Stratton sumaba 80 desplazamientos sinusoidales $x_k(t) = c_k\cos(2\pi\Omega_k t + \theta_k), k = 1, \ldots, 80$, producidos por un sistema mecánico ligeramente más elaborado que el de la Fig. (a). El desplazamiento $x(t)$ del resorte grande se utilizaba para mover un lápiz que dibujaba la señal "reconstruida" sobre un papel.

Ejercicio 7. Uno de los problemas más difíciles que enfrentaron los antiguos astrónomos griegos fue el de predecir la posición de los planetas en el firmamento. Un modelo exitoso fue descrito por Ptolomeo en su *Almagesto*. Utilizando notación moderna, el movimiento uniforme circular de un planeta P alrededor de la Tierra T (teoría geocéntrica) está dado por

$$x_1(t) = a_1 e^{j2\pi \frac{t}{T_1}}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

donde $a_1 = |a_1|\, e^{j\phi_1}$, $0 \leq \phi_1 \leq 2\pi$, es el radio de la órbita, T_1 su período, y el parámetro ϕ_1 especifica la ubicación del planeta en $t = 0$ [Fig. (a)]. Como este modelo no puede explicar el ocasional movimiento retrógrado de los planetas exteriores (Marte, Júpiter y Saturno), se propuso el modelo más elaborado

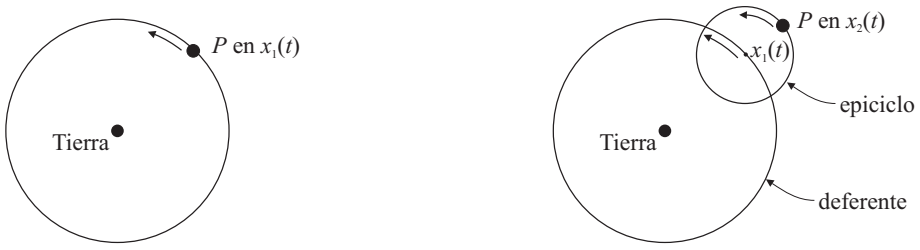
$$x_2(t) = x_1(t) + a_2 e^{j2\pi \frac{t}{T_2}},$$

con $a_2 = |a_2|\, e^{j\phi_2}$, $0 \leq \phi_2 \leq 2\pi$. El planeta P tiene un movimiento circular uniforme alrededor de un punto que, a su vez, tiene movimiento circular uniforme alrededor de la tierra T, como se muestra en la Fig. (b). Con este modelo se puede reproducir el movimiento retrógrado, pero no es suficiente para ajustar el movimiento de los planetas con los datos experimentales.

Extendiendo esta idea se propone representar el movimiento por la suma exponencial

$$x_N(t) = a_1 e^{j2\pi \frac{t}{T_1}} + a_2 e^{j2\pi \frac{t}{T_2}} + \cdots + a_N e^{j2\pi \frac{t}{T_N}}$$

utilizando un círculo fijo denominado *deferente* y $N-1$ círculos móviles denominados *epiciclos*. Tal movimiento es periódico cuando T_1, T_2, $\ldots$, T_N son múltiplos enteros de algún $T > 0$, en cuyo caso la suma es una serie de Fourier con un número finito de términos. Hiparco y Ptolomeo utilizaron una construcción usando 4 círculos para ajustar el movimiento de cada planeta, con la Tierra cerca pero no en el origen. Este modelo fue utilizado para predecir las posiciones de los cinco planetas de la antigüedad hasta que Kepler y Newton descubrieron las leyes de movimiento planetario unos 1300 años después. Lagrange fue el primero en reconocer las conexión entre el análisis de Fourier y el antiguo modelo de movimiento planetario de Hiparco y Ptolomeo.



(a) (b)

La Tierra y Marte orbitan el sol con períodos $T_T = 1$ año, $T_M = 1{,}88$ año, a una distancia media de 1 au $\doteq 150\,10^6$ km, 1,53 au $= 228\,10^6$ km, respectivamente. En este ejercicio se utilizarán las aproximaciones

$$x_T(t) = e^{j2\pi \frac{t}{1}}, \qquad x_M(t) = 1{,}5 e^{j2\pi \frac{t}{2}}, \qquad (t \text{ en años})$$

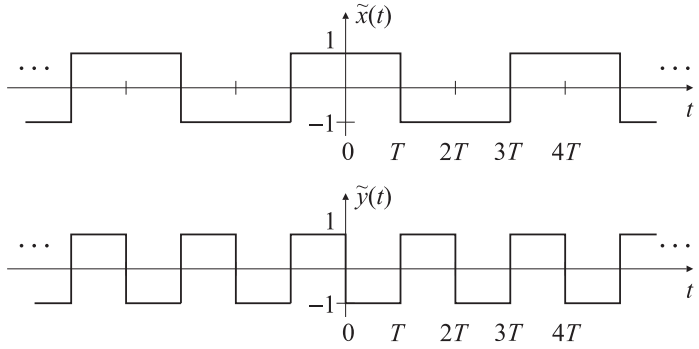
para estudiar el movimiento de Marte visto desde la Tierra.

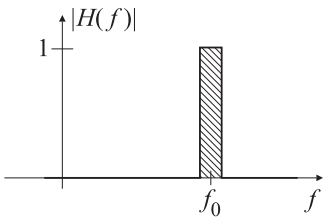
1. Dibuje círculos concéntricos con radio 1, 1.5, e indique 9 puntos marcados $A, B, \ldots, I$ ubicando la Tierra y Marte en $t = 0, 1/4, 2/4, \ldots, 8/4$ años.
2. Dibuje la órbita $x(t) = x_M(t) - x_T(t)$, $0 \leq t \leq 2$ años que muestra la posición de Marte como se ve desde la Tierra.
3. Normalmente, Marte se mueve sobre el cielo nocturno en la misma dirección que la luna. Sin embargo, hay un período de tres meses cada dos años en el cual el planeta se mueve en sentido contrario. De acuerdo a los resultados del inciso 2 explique la causa de este "movimiento retrógrado".

Ejercicio 8. Las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ son la salida y la entrada, respectivamente, de un flip-flop "T".

1. Calcule los coeficientes de Fourier $c_k^{(x)}$ y $c_k^{(y)}$ de las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$, y grafíquelos en función del número de armónico k.
2. Dibuje el espectro en frecuencia $X(f)$ e $Y(f)$ de $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$, respectivamente.
3. Un detector de tono es un filtro pasabanda muy angosto $H(f)$, como el que se muestra en la figura. ¿Puede elegir f_0 de manera de detectar $\tilde{x}(t)$ o $\tilde{y}(t)$?

Nota: para simplifcar los cálculos, aplique las propiedades de la *transformada* de Fourier.

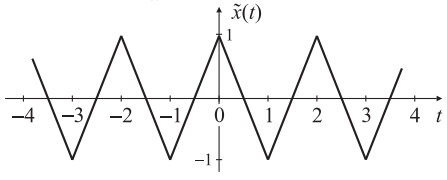




Ejercicio 9. Para la señal $\tilde{x}(t)$ que se muestra en la Fig. A,

1. Dibuje el espectro $X(f)$ sabiendo que los coeficientes $c_k^{(x)}$ de su serie de Fourier son

$$c_k = \begin{cases} 4/(\pi k)^2, & \text{si } k \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases}$$



2. Escriba la expresión del espectro de la señal $\tilde{y}(t)$ de la Fig. B
3. Calcule los coeficientes $c_k^{(z)}$ de la serie de Fourier de la señal $\tilde{z}(t)$ de la Fig. C en función de los coeficientes $c_k^{(x)}$ de la señal de la Fig. A.

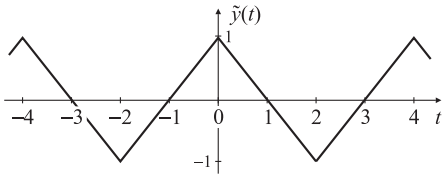


Fig. B

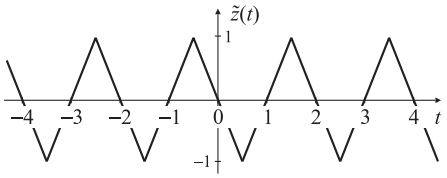
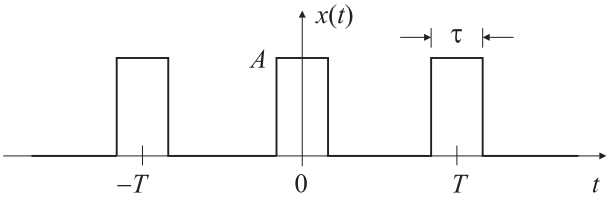


Fig. C

Ejercicio 10. Determine la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ formada por tres pulsos rectangulares que se muestra en la figura. Grafique la amplitud del espectro para $\tau \ll T$. (*Ayuda*: Considere un único pulso de amplitud A y duración τ, y utilice las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal de la Transformada de Fourier.)



Ejercicio 11. Cualquier función $x(t)$ puede descomponerse de manera única en dos componentes, una parte *par* y otra *impar*:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t),$$

donde

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \qquad x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)],$$

1. Calcule la componente par y la componente impar del pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. Calcule las transformadas de Fourier de cada una de las componentes.

Ejercicio 12. Si $X(f)$ es la transformada de Fourier de una señal $x(t)$, pruebe que:

1. El área total bajo la curva de $x(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = X(0),$$

donde $X(0)$ es el valor de $X(f)$ en $f = 0$ (el valor de "continua" de la señal).

2. El área total bajo la curva de $X(f)$ está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, df = x(0),$$

donde $x(0)$ es el valor de $x(t)$ en $t = 0$.

3. La transformada de Fourier $X(f)$ de una señal real y par $x(t)$ es real.
4. La transformada de Fourier $X(f)$ de una señal real e impar $x(t)$ es imaginaria.

Ejercicio 13. En base a los resultados del Ejercicio 12, demuestre que:

1. El área encerrada por la función sinc (ax) es $1/|a|$: $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(ax)\,dx = 1/|a|$.
2. El área comprendida bajo el pulso gaussiano $x(t) = e^{-\pi t^2}$ vale 1: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dx = 1$.
3. El área bajo la transformada de Fourier del pulso exponencial del Ejemplo 2.5 es $\beta/2$. **Nota:** compare el valor de $x(0)$ con la solución que resulta de integrar la transformada de Fourier: $\int_{-\infty}^{\infty} \beta/(\alpha + j2\pi f)df = \beta/2$. Explique la diferencia.
Comentario: "La diferencia entre una función $x(t)$ y cualquier otra funcion $\hat{x}(t)$ tal que $\hat{x}(0) \neq 1/2$ es una función nula cuya integral siempre es cero. Se fuese necesario realizar observaciones físicas de una cantidad que fluctúa según $x(t)$ o $\hat{x}(t)$, no sería posible distinguir entre ambas alternativas matemáticas, ya que las medias ponderadas sobre intervalos no nulos, que son las únicas cantidades mensurables, no se verían afectadas por la presencia o ausencia de funciones nulas. Para las aplicaciones físicas de $x(t)$ es posiblemente más elegante no mencionar $x(0)$." [15]

Ejercicio 14. Calcule la transformada de Fourier (en módulo y fase y parte real-parte imaginaria) de la siguientes funciones. En todos los casos, suponga $\alpha > 0$.

1. $x(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

2. $x(t) = \begin{cases} k, & -T_0 < t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ -k, & 0 < t < T_0. \end{cases}$

3. $x(t) = Ae^{-\alpha|t|}$.

Ejercicio 15. Calcule la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones. Antes de resolver este ejercicio, es conveniente resolver el Ejercicio 14.

1. $X(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$.
2. $X(f) = \frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$. [recuerde que $\mathcal{F}(x_1 * x_2) = \mathcal{F}(x_1) \cdot \mathcal{F}(x_2)$]
3. $X(f) = 2AT_0 \text{ sinc}(2T_0 f)$, usando los resultados del Ejercicio 13.1.

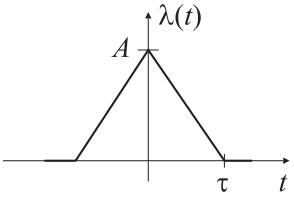
Ejercicio 16. Demuestre que el espectro del pulso exponencial creciente definido por

$$x(t) = \begin{cases} \beta e^{\alpha t}, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

con $\alpha > 0$ tiene el mismo módulo y fase opuesta a la del pulso del Ejercicio 14.1. Explique este comportamiento en base a la propiedad de escalado en tiempo de la Transformada de Fourier.

[15] R. Bracewell, *The Fourier Transform and its applications*, 2da. ed., McGraw-Hill, New York, 1978, p. 61.

(I) **Ejercicio 17.** Calcule la transformada de Fourier del pulso triangular $\lambda(t)$ de la figura a partir de la convolución de dos pulsos rectangulares $r(t)$, cuya transformada de Fourier es conocida (Ejemplo 2.10).



1. Especifique claramente los pulsos (amplitud y duración) $r(t)$ tal que $\lambda(t) = r(t) * r(t)$.
2. Escriba la transformada de Fourier $R(f)$ de los pulsos $r(t)$.
3. Con estos resultados calcule $\Lambda(f)$, la transformada de Fourier de $\lambda\,(t)$.
4. A partir de los resultados del inciso anterior, calcule la transformada de Fourier $\Lambda\,(\Omega)$ del pulso triangular $\lambda\,(t)$ en función de la frecuencia angular Ω.

Ejercicio 18. Aplicando propiedades, determine la transformada de Fourier de la señal $x\,(t) = u\,(t)\cos\,(2\pi f_0 t)$, donde $u\,(t)$ es la función escalón unitario.

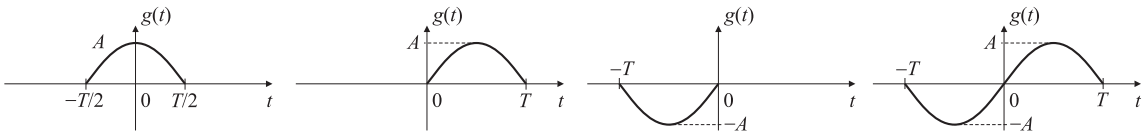
Ejercicio 19. Dibuje la señal $x\,(t) = A\,\text{sen}(2\pi f_0 t)$, y calcule y grafique su espectro $X(f)$. A partir de este par transformado, dibuje las señales y calcule (tanto por definición como aplicando propiedades) y grafique los espectros de:

1. $x_1(t) = A\,\text{sen}[2\pi(2f_0 t)]$.
2. $x_2(t) = A\,\text{sen}[2\pi(3f_0 t)]$.

Ejercicio 20. Si $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, muestre que $\mathcal{F}\,\{\mathcal{F}\,\{\mathcal{F}\,\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}\}\} = x(t)$.

Ejercicio 21. Para la señal que se ilustra en la figura,

1. calcule la transformada de Fourier $G(f)$ del medio pulso coseno de la Fig. (a) ;
2. aplique la propiedad de desplazamiento temporal al resultado del inciso anterior para calcular la transformada de Fourier del medio pulso seno de la Fig. (b) ;
3. determine el espectro de un pulso medio seno cuya duración sea aT, $a > 0$;
4. determine el espectro del pulso medio seno negativo que se muestra en la Fig. (c) ;
5. calcule el espectro del pulso seno que se observa en la Fig. (d) .



(a) (b) (c) (d)

Ⓒ **Ejercicio 22.** La función $c(t)$ del Ejercicio 2 se conoce como *función generadora* de $\tilde{x}(t)$.

1. Determine la transformada de Fourier de la función generadora $c(t)$.
2. Calcule la transformada de Fourier de $\tilde{x}(t)$ aplicando propiedades. Compare sus resultados con los del Ejercicio 2.

Ejercicio 23. Sabiendo que el pulso gaussiano es su propio par transformado, $x(t) = e^{-\pi t^2} \Leftrightarrow X(f) = e^{-\pi f^2}$, utilice la propiedad de escalado en tiempo para demostrar que

$$y(t) = \left(\sqrt{2\pi}\tau\right)^{-1} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = e^{-2\pi^2\tau^2 f^2}.$$

Ⓒ **Ejercicio 24.** Usando las Propiedades de derivación temporal y frecuencial y las definiciones de la transformada de Fourier en función de la frecuencia angular Ω, demuestre que la función temporal $h(t)$ cuya expresión matemática coincide con su transformada $H(\Omega)$ es $h(t) = ke^{-\frac{1}{2}t^2}$.

Ⓘ **Ejercicio 25.** En el Ejemplo 2.36 se mostró que la transformada del pulso gaussiano $x(t) = e^{-\pi t^2}$ coincide con $x(t)$. Esto es, si $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, entonces $x(t) = X(f)|_{f=t}$. Para simplificar la notación y evitar confusiones, es conveniente definir la transformada como un operador $\mathcal{F} : C \to C$, donde C es un espacio de funciones apropiado, tal que $\mathcal{F} : x(\cdot) \mapsto \mathcal{F}\{x(\cdot)\}$, donde $\mathcal{F}\{x(\cdot)\}$ se define como

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)e^{-j2\pi t\sigma} d\sigma.$$

Si $x(t)$ es el pulso gaussiano, $x(t) = e^{-\pi t^2}$, se verifica que $x(.) = \mathcal{F}\{x(.)\}$. Esta idea se puede generalizar, y si la función $x(\cdot)$ satisface

$$x(\cdot) = \lambda\mathcal{F}\{x(\cdot)\}$$

para un único $\lambda \in \mathbb{C}$, se dice que $x(\cdot)$ es una *autofunción* de la transformada de Fourier, por analogía con la definición de autovector: $\mathbf{v}$ es un autovector de la matriz $\mathbf{A}$ si $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Entonces el pulso gaussiano es una autofunción de la transformada de Fourier, con $\lambda = 1$. En este problema se investiga la existencia de otras autofunciones.

1. Pruebe que la función constante $x(t) = 0$ para todo t es una autofunción. ¿Cuál es el autovalor λ?
   Nota: como el autovalor no es único, en este caso no se reconoce $x(t) = 0$ como una autofunción, de la misma manera que el vector nulo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ no se reconoce como un autovector aunque $\mathbf{A0} = \lambda\mathbf{0}$ para cualquier λ.
2. Demuestre que el tren de impulsos

   $$p(t) = \sum_r \delta(t - rT)$$

   es una autofunción. ¿Cuál es el autovalor λ?

3. Encuentre para qué valores no nulos de α, β, γ y ε la función $x(t) = \alpha \operatorname{sinc}(\gamma t) + \beta r(\varepsilon t)$ es una autofunción, donde $r(t)$ es el pulso rectangular definido por

$$r(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

4. Generalice el resultado anterior para una función $y(t) = \alpha x(t) + \beta \mathcal{F}\{x(t)\}$: encuentre para qué valores de α y β la función $y(\,\cdot\,)$ es una autofunción de la transformada de Fourier, $y(\,\cdot\,) = \mathcal{F}\{y(\,\cdot\,)\}$.

Ejercicio 26. Para el sistema lineal $\mathcal{S}$ con respuesta impulsiva $h_\tau(t) = \alpha e^{-\beta t} e^{\gamma\tau} u(t-\tau)$, con $t \geq \tau \geq 0$, y $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

1. Determine si es invariante en el tiempo para (*i*) $\gamma = \beta$, y (*ii*) $\gamma \neq \beta$.
2. Calcule y grafique la respuesta $y_1(t)$ del sistema ante una entrada escalón $x_1(t) = u(t)$ cuando (*i*) $\gamma = \beta = 1$, (*ii*) $\gamma = 2\beta = 2$ y (*iii*) $\gamma = -2\beta = -2$.
3. Repita el inciso anterior para una entrada $x_2(t) = u(t-1)$ cuando (*i*) $\gamma = \beta = 1$, (*ii*) $\gamma = 2\beta = 2$ y (*iii*) $\gamma = -2\beta = -2$.

Ejercicio 27. Demuestre el Teorema del ancho de banda para funciones absolutamente integrables cuando la transformada de Fourier se expresa en función de la frecuencia angular Ω. Esto es, si $h(t)$ tiene transformada de Fourier $H(\Omega)$, con duración efectiva Δt y ancho de banda $\Delta\Omega$,

$$\Delta t \Delta\Omega \geq 2\pi.$$

Ⓒ **Ejercicio 28.** Demuestre que para el pulso gaussiano $x(t) = Ce^{-\alpha t^2}$, con $\alpha > 0$, se verifica la *igualdad* del teorema del ancho de banda para funciones de energía finita:

$$\Delta t \Delta f = 1/(4\pi).$$

Ejercicio 29. Un rectificador de onda completa es un dispositivo tal que su respuesta $y(t)$ ante una entrada $x(t)$ es $y(t) = |x(t)|$. Si $x(t)$ es una señal modulada en amplitud,

$$x(t) = f(t) \operatorname{sen} \Omega_0 t,$$

donde $f(t) \geq 0$ es la señal *moduladora*, y la señal $\operatorname{sen} \Omega_0 t$ es la *portadora*, muestre que la salida del rectificador de onda completa es

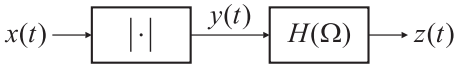
$$Y(\Omega) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(\Omega - 2k\Omega_0)}{4k^2 - 1},$$

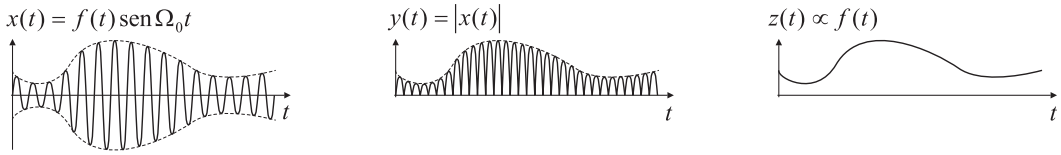
donde $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$. **Ayuda:** La expresión en series de Fourier de $|\operatorname{sen} \Omega_0 t|$ es

$$|\operatorname{sen} \Omega_0 t| = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2k\Omega_0 t}}{4k^2 - 1}.$$

(I) **Ejercicio 30.** La *demodulación* de la señal modulada en amplitud $x(t) = f(t)\,\mathrm{sen}\,\Omega_0 t$ es el proceso de recuperar $f(t)$ a partir de $x(t)$. Un demodulador sencillo se obtiene conectando en cascada un rectificador de onda completa como el del Ejercicio 29 con un filtro pasabajos ideal $H(\Omega)$ con frecuencia de corte Ω_0,

$$H(\Omega) = \begin{cases} A_0 e^{-j\Omega t_0}, & \text{si } |\Omega| < \Omega_0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

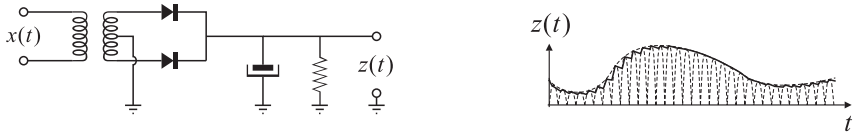




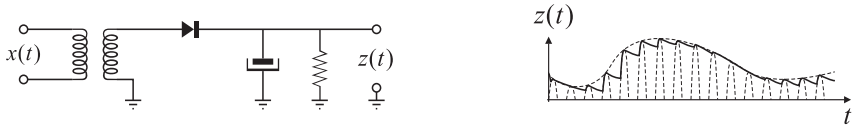
Muestre que, si $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, y si $F(\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_0$, la salida $z(t)$ del filtro pasabajos coincide, salvo un factor de escala, con la señal $f(t)$:

$$z(t) = \frac{2}{\pi} A_0 f(t - t_0).$$

Observación: Los demoduladores de las radios de AM siguen este principio, aunque en lugar de utilizar un rectificador de onda completa en cascada con un filtro pasabajos implementan un detector de pico con pérdida, como se muestra en la figura.



Como usualmente la frecuencia Ω_0 de la señal portadora (entre 500 kHz y 1600 kHz) es mucho más elevada que el ancho de banda de la señal $f(t)$ (aproximadamente 5 kHz) se suele utilizar un rectificador de media onda, a costa de un pequeño aumento de la distorsión.



Ejercicio 31. Observadas desde una distancia normal de lectura las 101 barras negras separadas por 100 barras blancas de la rejilla que se muestra en la figura se distinguen perfectamente. A una distancia suficiente, la rejilla se observa como un rectángulo uniforme de color gris.



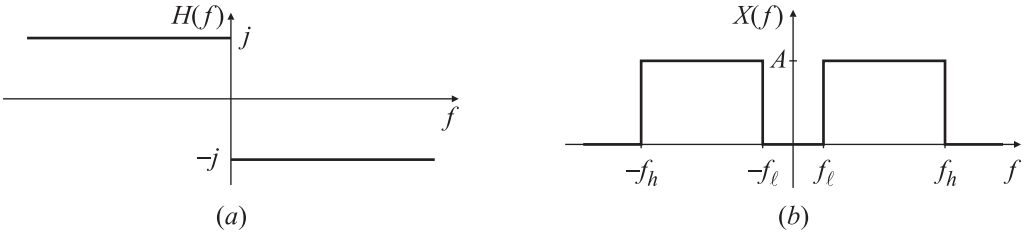
1. Determine experimentalmente la distancia D a la cual su ojo puede resolver las barras, tanto en posición horizontal como vertical.
2. El ojo tiene un ancho de banda de $2B$. Utilice el resultado del inciso anterior para determinar B (en ciclos por radianes).
3. A la distancia normal de lectura, el ojo es capaz de percibir los pixeles del retrato de Fourier. Sin embargo,a una distancia apropiada aparece como una imagen bien detallada. Utilice los resultados del inciso 1 para predecir la distancia donde ocurre esta transición... y luego confirme (o no) su predicción de manera experimental.



Ejercicio 32. Un *Transformador de Hilbert* es un sistema cuya respuesta en frecuencia es

$$H(f) = \begin{cases} j, & -\infty < f < 0, \\ -j, & 0 \le f < \infty. \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. (a) .



1. Determine la respuesta impulsiva $h(t)$ de este sistema. **Ayuda:** Aplique propiedades y los resultados del Ejemplo 2.7.
2. Calcule, *tanto en el dominio tiempo como en el dominio frecuencia*, la salida $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ del Transformador de Hilbert cuando se lo excita con la señal $x(t) = A/(2\pi t)[\text{sen}(2\pi f_h t) - \text{sen}(2\pi f_\ell t)]$. **Ayuda**: muestre que el espectro de la señal $x(t)$ está dado por

$$X(f) = \begin{cases} A, & -f_h < f < -f_\ell, \\ A, & +f_\ell < f < +f_h, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde $0 < f_\ell < f_h$, como se muestra en la Fig. (b) . Las señales con espectros de esta forma se denominan tipo *pasabanda*.

3. Grafique el espectro de la entrada $x(t)$ y la salida $\hat{x}(t)$ del Transformador de Hilbert.

4. Una *señal analítica* $x_a(t)$ se define como

$$x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t).$$

donde $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ son la entrada y la salida del Transformador de Hilbert, respectivamente. Grafique el espectro de la señal $x_a(t)$. ¿Cuál es su característica distintiva?

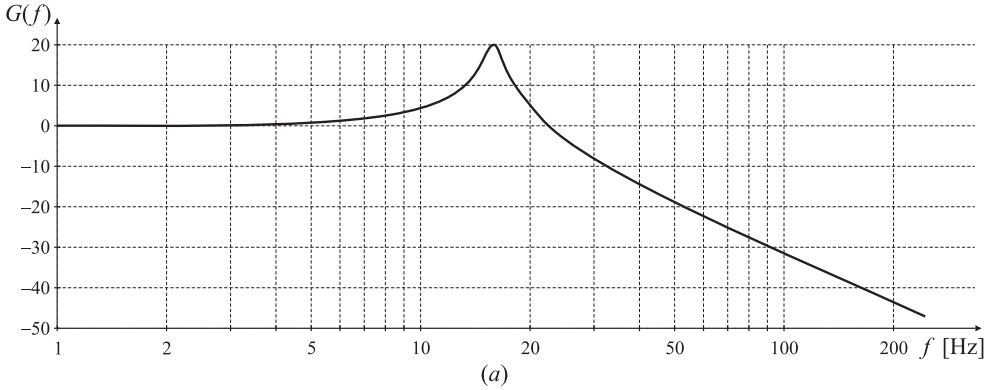
5. Si $x(t)$ es una señal arbitraria, calcule $y(t) = \mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\}$.

Ejercicio 33. El sistema de suspensión de un automóvil se puede modelar con la función transferencia

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{10^4}{s^2 + 10s + 10^4}$$

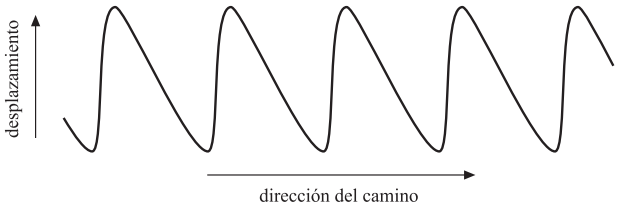
considerando como entrada el desplazamiento vertical de la rueda, y como salida la posición de la carrocería. La Fig. (a) muestra el gráfico de la respuesta en frecuencia; el amortiguamiento $\zeta = 0{,}05$ indica que el estado de la suspensión no es muy bueno. Este automóvil circula por una ruta de tierra con ondulaciones, como las que se muestran en la Fig. (b) , compuestas por una serie de crestas elevadas sobre la superficie de la ruta en sentido ortogonal a la misma, Fig. (c). Se producen por la interacción inestable entre los vehículos y la deformación del material del camino. Una vez que alcanzan cierta relación base/altura se estabilizan porque los picos se aplastan al mismo tiempo que se elevan los bordes.

1. Si el auto se desplaza a una velocidad de v m/s, y la distancia entre las ondulaciones es de d metros, muestre que la frecuencia en Hz del desplazamiento de las ruedas es v/d Hz.



(a)


(b)



(c)

2. Si las ondulaciones están separadas $d = 5$ m entre sí, y el vehículo se desplaza a una velocidad $v_1 = 5$ m/s (18 Km/h), determine la frecuencia de la excitación causada

por las ondulaciones, y el desplazamiento vertical de la carrocería como múltiplo de la altura de la ondulación. (Como no interesa el valor exacto del multiplicador, este inciso puede resolverse usando la gráfica de la respuesta en frecuencia.)

3. Repita los cálculos para velocidades $v_2 = 10$ m/s, $v_3 = 30$ m/s, $v_4 = 50$ m/s. Comente sus resultados.

4. Utilice la ecuación de la función transferencia para encontrar el desplazamiento del vehículo debido a las ondulaciones cuando la velocidad es $v_5 = 100/(2\pi)$ m/s (aproximadamente 57 Km/h).

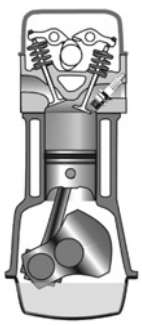
5. Comente sobre la mejor estrategia para de transitar sobre una carretera con ondulaciones de modo de minimizar los impactos sobre los ocupantes del vehículo. ¿Cuál es el inconveniente?

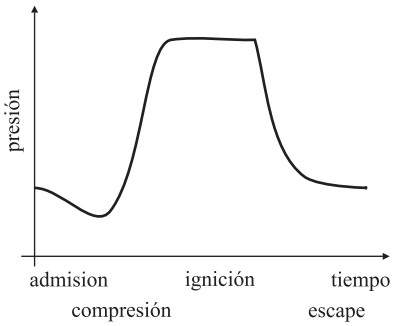
6. De la figura se observa que las ondulaciones no son puramente sinusoidales, sino que se asemejan a una onda triangular, y por lo tanto el espectro de los desplazamientos tendrá componentes armónicas. Explique cómo se manifiestan estas armónicas cuando el auto se desplaza a distintas velocidades sobre la ruta.

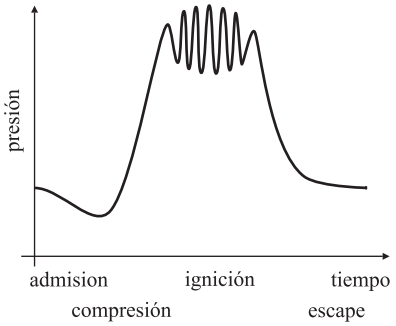
7. El cuerpo humano es mucho más sensible a la aceleración que a los desplazamientos. Describa cómo modificar la función transferencia para estudiar estos efectos, y discuta cómo cambian los resultados de los incisos anteriores.

Ejercicio 34. La Fig. (a) muestra la sección de un motor de cuatro tiempos. El ciclo de trabajo distingue cuatro etapas, denominadas:

- **admisión**: durante la cual se inyectan aire y combustible en el cilindro, mientras el pistón está en la posición inferior;
- **compresión**: en la que se comprime la mezcla de aire y combustible elevando el pistón, con las válvulas cerradas;
- **combustión**: cuando se produce la ignición de la mezcla por la chispa de la bujía, y la expansión de los gases de escape fuerza el cilindro hacia la posición inferior;
- **escape**: en la que se abren las válvulas y el movimiento ascendente del pistón provoca la salida de los productos de combustión.







(a) (b) (c)

La Fig. (b) muestra la variación de la presión en el cilindro en función del tiempo cuando el motor funciona correctamente. La Fig. (b) muestra la variación en el tiempo de un motor que *ratea*, provocado por el encendido prematuro de la mezcla de aire y combustible y rápidas oscilaciones de la presión en la transición entre la compresión y la ignición. El *rateo* reduce la eficiencia del motor, y disminuye la vida útil del motor. Se desea diseñar un método para detectar el rateo examinado la señal de presión en el cilindro. Como el ciclo de trabajo del motor se repite en el tiempo, puede pensarse que la señal de presión es periódica, y por lo tanto se puede descomponer en series de Fourier.

1. Si el período del ciclo es T, se aproxima la señal de presión por la onda cuadrada definida en un período por

$$p(t) = \begin{cases} p_0, & t \in [0, T/2), \\ 21p_0, & t \in [T/2, 3T/4), \\ p_0, & t \in [3T/4, T). \end{cases}$$

   Muestre que los coeficientes de la serie de Fourier compleja están dados por $c_0 = 6p_0$ si $k = 0$, y

$$c_k = j\frac{10p_0}{\pi k}e^{-j\pi k}(e^{-j\frac{\pi k}{2}} - 1) = j\frac{10p_0}{\pi k}(-1)^k[(-j)^k - 1] = \frac{20p_0}{\pi k}e^{j\frac{3\pi}{4}k}\,\text{sen}(\pi k/4),$$

   si $k \neq 0$.

2. La señal de presión del motor con *rateo* se aproxima por

$$p_r(t) = \begin{cases} p_0, & t \in [0, T/2), \\ 21p_0 + 4p_0\cos(2\pi 24t/T), & t \in [T/2, 3T/4), \\ p_0, & t \in [3T/4, T). \end{cases}$$

   en un período. Esta señal es esencialmente la misma que $p(t)$, con el agregado de un término aditivo $4p_0\cos(2\pi 24t/T)$ durante el intervalo $t \in [T/2, 3T/4)$. Muestre que los coeficientes de la serie de Fourier de este término aditivo están dados por

$$d_k = \frac{2p_0}{T}\int_{T/2}^{3T/4}\left[e^{j\frac{2\pi}{T}(24-k)t} + e^{j\frac{2\pi}{T}(24+k)t}\right]dt.$$

3. Calcule d_{24}, y demuestre que el resto de los términos se comporta como $[1/(24-k) + 1/(24+k)]$.

4. Explique cómo usaría los coeficientes de las series de Fourier calculadas en los incisos anteriores para distinguir entre un motor que ratea y otro que no.

Ⓜ **Ejercicio 35. Problema para resolver con Matlab** **Fecha de entrega: 30/03/12**

Una señal T-periódica $\tilde{x}(t)$ se aplica a un filtro pasabajos ideal de ancho de banda $f_N = (N + \frac{1}{2})/T$. El efecto del filtro es anular todas las componentes armónicas de frecuencia superior a f_N. La Fig. 2.89 muestra el espectro de la señal de entrada $\tilde{x}(t)$, la respuesta en frecuencia del filtro, y el espectro de la señal de salida $\tilde{x}_f(t)$.

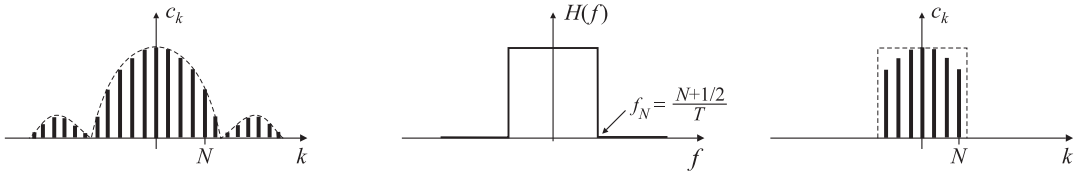


Fig. 2.89. Espectro de la entrada, respuesta en frecuencia, y espectro de la salida del filtro.

Si la señal $\tilde{x}\,(t)$ se representa por su serie de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

a la salida del filtro sólo se observan las N primeras armónicas, de manera que la señal de salida $\tilde{x}_f(t)$ se puede escribir como

$$\tilde{x}_f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}.$$

Si el filtro es muy angosto, por ejemplo si tiene una frecuencia de corte $f_1 = 3/(2T)$, sólo permite el paso de la componente de continua y de la primera armónica de la señal. A medida que se aumenta el ancho de banda del filtro, crece el número de componentes armónicas presentes en la señal de salida, y ésta se parece cada vez más a la señal de entrada. En el límite, si $f_N \to \infty$, el filtro se comporta como un cable (no filtra nada) y la señales de entrada y salida son idénticas.

El propósito de este ejercicio es determinar el ancho de banda del filtro que asegure que la diferencia entre la señal de entrada y salida no supere una determinada cota. Hay varias maneras de medir la diferencia entre dos señales, y para este ejercicio se consideran dos:

- el *error medio cuadrático*, definido por

$$e_2 = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_2 = \left(\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_f(t)|^2 d\,t\right)^{1/2},$$

- el *error máximo*, que se calcula como

$$e_\infty = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_\infty = \max_{t\in[-\tau/2,\tau/2]} \left|\tilde{x}\,(t) - \tilde{x}_f\,(t)\right|.$$

Para el caso de señales periódicas, es habitual elegir τ igual al período T de la señal. Además, aplicando propiedades (¿cuáles?) la integral de la expresión del error medio cuadrático puede reemplazarse por una sumatoria.

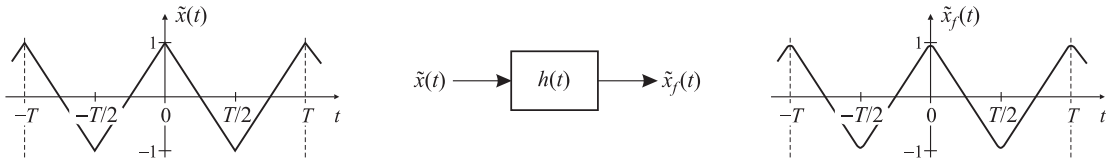


Fig. 2.90. Procesamiento de una forma de onda triangular por un filtro ideal.

1. Para la señal triangular de la Fig. 2.90, definida en un período por

$$\tilde{x}(t) = 1 - 4\left|\frac{t}{T}\right|, \quad |t| < T/2,$$

1. *a*) Calcular analíticamente los coeficientes de Fourier c_k, donde

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}\,(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt.$$

   b) Graficar el módulo y fase de los coeficientes c_k en función del número de armónico k.

   c) Usando MATLAB, computar 2 períodos de la salida $\tilde{x}_f(t)$ del filtro usando los coeficientes calculados en el inciso (a). Adopte $T = 1$, $N = 4, 8, 16, 20, 50, 100$. **Nota:** Para poder graficar adecuadamente la respuesta temporal, en MATLAB se debe definir un "vector de tiempos" de resolución suficiente para que los resultados sean significativos. Por ejemplo, `t` $= [$`0 : dt : 2T`$]$, con `dt` $=$ `2T/K`, donde K es un entero apropiado. ¿Por que?

   d) Determinar el ancho de banda f_{N_2} del filtro (i.e. el mínimo valor de N_2) que asegura que el error medio cuadrático entre las señales de entrada y la salida es inferior al 5 %:

$$e_2 = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_2 = \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_f(t)|^2 d\,t\right)^{1/2} < 0{,}05.$$

   Aplicar las propiedades sugeridas más arriba para reemplazar el cálculo de la integral por una sumatoria.

   e) Encontrar el ancho de banda f_{N_∞}del filtro (i.e. el mínimo valor de N_∞, que seguramente será distinto a N_2) que asegura que el error máximo entre las señales de entrada y la salida es inferior al 5 %:

$$e_\infty = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_\infty = \max_{t\in[-T/2,T/2]} \left|\tilde{x}\,(t) - \tilde{x}_f\,(t)\right| < 0{,}05.$$

2. Repetir el inciso anterior para la señal $\tilde{x}(t)$ de la Fig. 2.91 definida en un período por

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/4, \\ 0, & T/4 < |t| < T/2. \end{cases}$$

3. Comparar la forma de onda calculada con MATLAB en los incisos previos con la salida de un filtro lineal, causal, e invariante en el tiempo, que se puede simular con el ambiente que se muestra en la Fig. 2.92(a). Elaborar sobre las similitudes y diferencias entre estos resultados. (Esta aplicación puede descargarse desde la página web de la materia.)

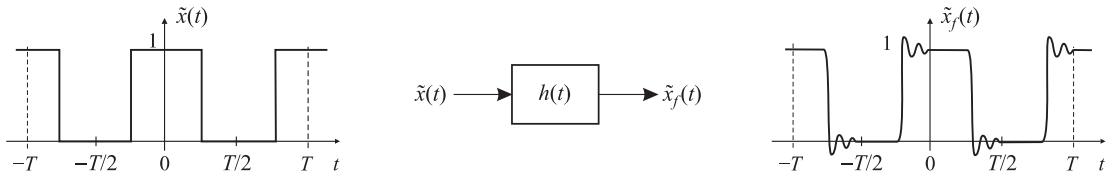
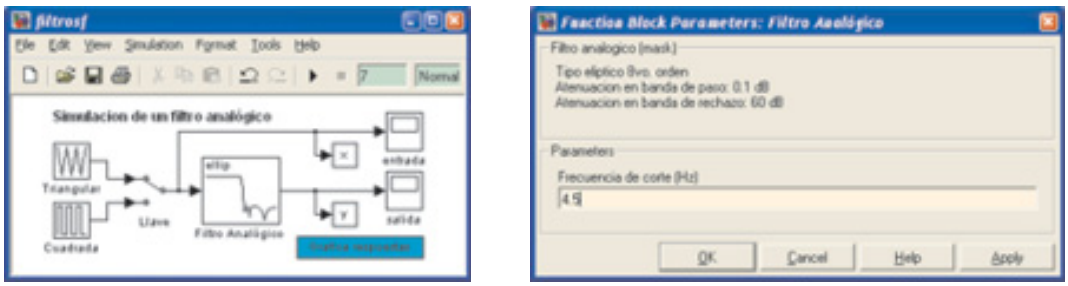


Fig. 2.91. Procesamiento de una forma de onda cuadrada por un filtro ideal.

Este filtro es de tipo elíptico de orden 8, con una atenuación máxima en la banda de paso de 0.1 dB, y una atenuación mínima en la banda de rechazo de 60 dB. La frecuencia de corte del filtro se elije con la caja de diálogo de la Fig. 2.92(b), que aparece al "clickear" dos veces sobre el bloque del filtro analógico. El módulo de la respuesta en frecuencia, que se representa en la Fig. 2.93 para distintas frecuencias de corte, es bastante parecido al de un filtro ideal.

Observaciones

- Adjuntar el código escrito para obtener las respuestas.
- Como parte del propósito del ejercicio es reforzar los conocimientos de MATLAB, tratar de resolver el problema evitando el empleo de ciclos `for ... next`, que son de ejecución muy lenta, empleando en cambio producto de matrices.



(a) (b)

Fig. 2.92. Ambiente de simulación de un filtro analógico (a). Especificación de la frecuencia de corte del filtro (b).

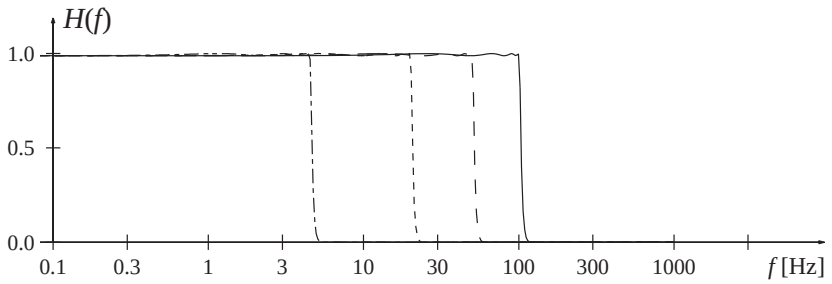


Fig. 2.93. Respuesta en frecuencia del filtro elíptico con $f_N = 4{,}5$ Hz $(-\cdot)$, 20 Hz (--), 50 Hz $(--)$ y 100 Hz $(—)$.

Ⓜ **Ejercicio 36. Problema para resolver con Matlab** **Fecha de entrega: 5/04/13**

En la Fig. 2.94(a) se muestra una señal periódica triangular $\tilde{x}(t)$, de período T. En la Fig. 2.94(b) se muestra una señal $\tilde{y}(t)$ similar, de período MT. En esta nueva señal, la distribución de los pulsos no es uniforme. Se ha construido desplazando ligeramente $M-1$ pulsos respecto de su posición en la señal original: en lugar de estar ubicados en $t = nT$ para $0 \leq n \leq (M-1)T$ (dentro del período $0 \leq t \leq MT$) están ubicados en $t = t_n$, donde

n	0	1	2	3	4	5
t_n	0	$1{,}14T$	$2{,}45T$	$3T$	$3{,}56T$	$5{,}37T$

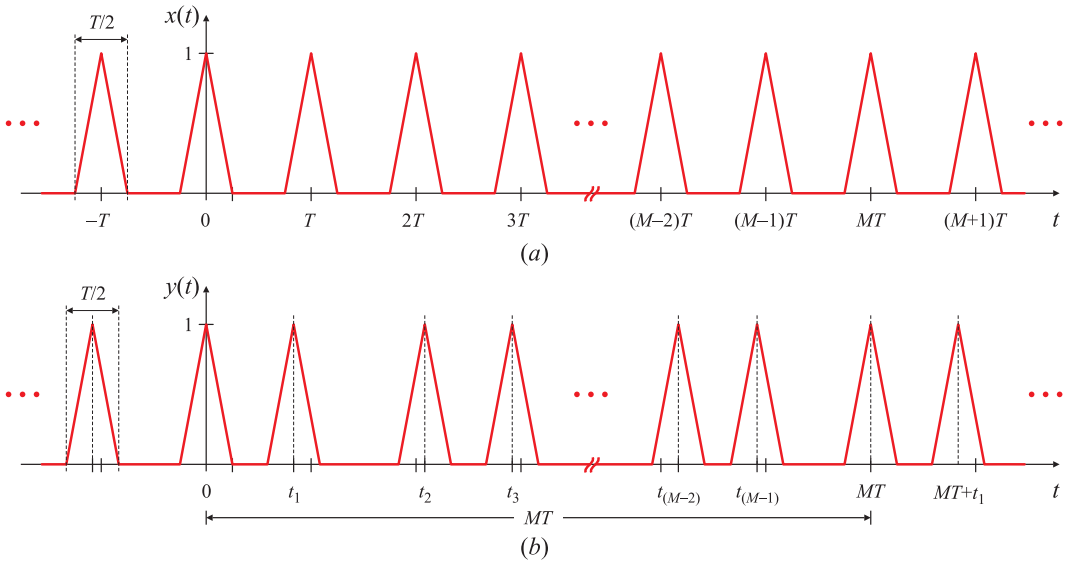


Fig. 2.94. Señal original con distribución uniforme de los pulsos (a) y modificada, con distribución no uniforme (b).

1. Calcule y compare la energía promedio de ambas señales.
2. Calcule los coeficientes c_k^x, c_k^y de las series de Fourier de las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ para $M = 6$.
3. Utilizando los resultados del inciso anterior, dibuje los espectros $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$, $\mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$ en una misma gráfica, para $-6/T < f < 6/T$, como se muestra en la Fig. 2.95. Puede utilizar, por ejemplo, el comando `stem`.
4. Reconstruya las señales $\hat{x}(t)$ e $\hat{y}(t)$ para el rango de frecuencias especificado más arriba. Utilice $T = 1/50$, y elija un vector de tiempos `t = (0:8191)/8192`.
5. Grafique las señales temporales (Fig. 2.95), y verifique que el corrimiento de los pulsos de $\hat{y}(t)$ coinciden con los especificados en la tabla.
6. Utilizando el comando `sound`, escuche cómo se oyen $\hat{x}(t)$ e $\hat{y}(t)$. Relacione con los resultados del inciso 3.

Este problema modela la solución adoptada en el diseño de los electroventiladores del radiador de los autos para reducir el nivel de ruido en el habitáculo. En lugar de utilizar

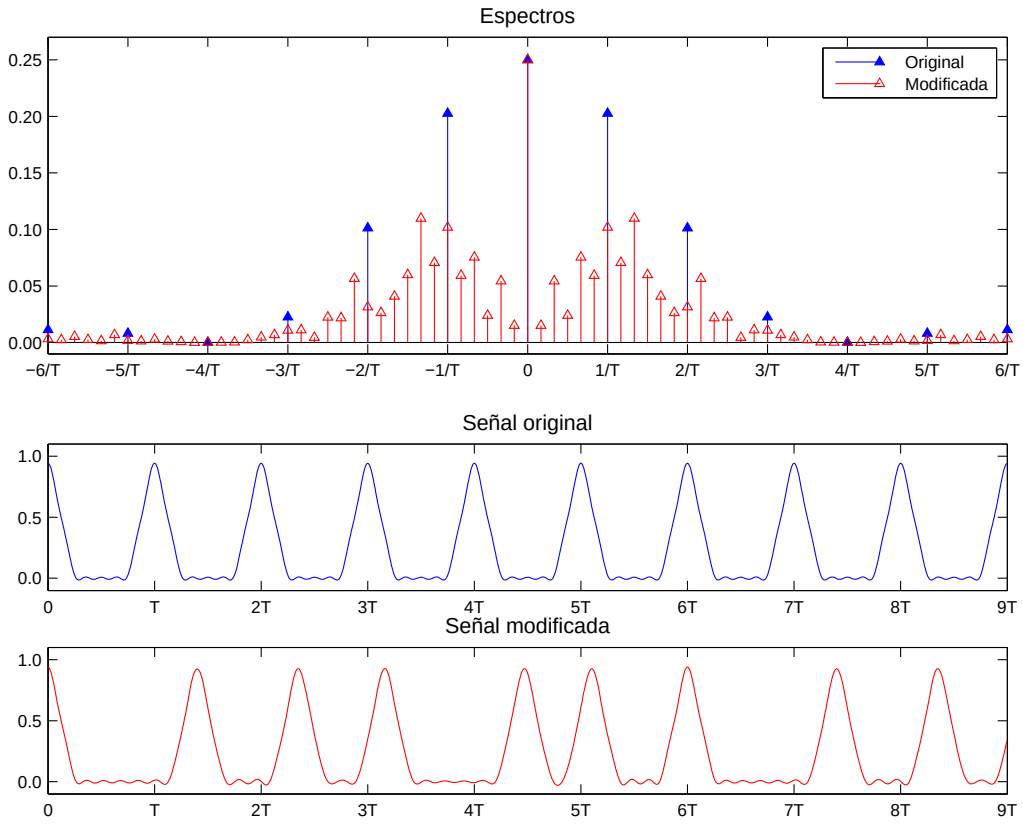
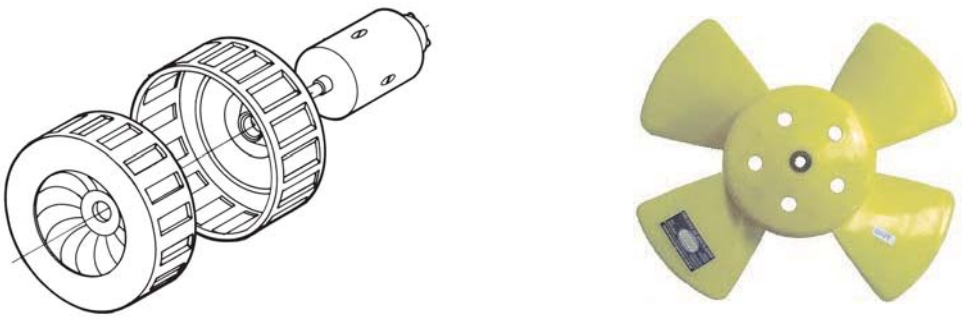


Fig. 2.95. Figura de Matlab donde se muestra el espectro de las señales (panel superior) y las formas de ondas temporales de la señal orginal y la señal modificada (paneles inferiores).

un ventilador con aspas equiespaciadas, se utilizan diseños como el que se muestra en la Fig. 2.96(b). En este problema la posición de las aspas está representada por la ubicación de cada pulso. La señal $\tilde{x}(t)$ representa un ventilador con aspas equiespaciadas, mientras que la señal $\tilde{y}(t)$ uno con distribución no uniforme. El Fiat 128 fue uno de los primeros vehículos en adoptar esta solución en Argentina, alrededor de 1971. Las sirenas mecánicas de advertencia ante emergencias también se basan en este principio [Fig. 2.96(a)].



(a) (b)

Fig. 2.96. Despiece de una sirena (aspas con distribución uniforme) (a), y electroventilador de un Fiat 128 (aspas con distribución no uniforme) (b).

3 Señales y sistemas discretos

El material de estudio de esta sección es el Capítulo 2, "Discrete-time signals and systems" del libro *Discrete-time signal processing*, de A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, y J. R. Buck, segunda edición, Prentice-Hall, Inc, 1998, pp. 8-93.

Estas notas incluyen material adicional sobre

- el cálculo de la salida de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo cuando son excitados con entradas sinusoidales;
- la diferencia entre el retardo de grupo y retardo de fase, y cómo medirlos;
- algunas aplicaciones adicionales de la TDF;
- la ejercitación sobre estos temas, dividida en dos secciones: en la primera se estudian las propiedades de los sistemas discretos, mientras que en la segunda se enfatizan las propiedades frecuenciales del análisis de sistemas discretos.

3.1. Demostración de las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad, invariación temporal para sistemas no recursivos

La demostración de las propiedades de sistemas no recursivos es realtivamente sencilla. En este ejemplo se estudia un sistema variante en el tiempo.

EJEMPLO **3.1. Demostración de propiedades de un sistema no recursivo**
Se desea conocer si el sistema caracterizado por la ecuación a diferencias no recursiva

$$y[n] = x[n] + \cos(2\pi n/10)x[n-1].$$

es lineal, invariante en el tiempo, causal y estable.

1. **Linealidad:** Si $y_1[n]$, $y_2[n]$ son las salidas del sistema ante entradas $x_1[n]$, $x_2[n]$, es decir

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n] + \cos(2\pi n/10)x_1[n-1], \\ y_2[n] &= x_2[n] + \cos(2\pi n/10)x_2[n-1], \end{aligned}$$

la salida del sistema ante una entrada $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ (una combinación lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$) es

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3[n] + \cos(2\pi n/10)x_3[n-1] \\ &= (ax_1[n] + bx_2[n]) + \cos(2\pi n/10)\,(ax_1[n-1] + bx_2[n-1]) \\ &= ax_1[n] + a\cos(2\pi n/10)x_1[n-1] + bx_2[n] + b\cos(2\pi n/10)x_2[n-1] \\ &= a\,(x_1[n] + \cos(2\pi n/10)x_1[n-1]) + b\,(x_2[n] + \cos(2\pi n/10)x_2[n-1]) \\ &= ay_1[n] + by_2[n], \end{aligned}$$

por lo tanto el sistema **es lineal**.

2. **Invariación temporal:** Si $y[n]$ es la salida del sistema ante una entrada $x[n]$, la salida $y_1[n]$ ante una entrada $x_1[n] = x[n-n_0]$ es

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n] + \cos(2\pi n/10)x_1[n-1] \\ &= x[n-n_0] + \cos(2\pi n/10)x[n-n_0-1], \end{aligned} \tag{3.1}$$

mientras que la salida $y[n]$ demorada n_0 muestras es

$$\begin{aligned} y[n-n_0] &= x[n-n_0] + \cos[2\pi(n-n_0)/10]x[n-n_0-1] \\ &= x[n-n_0] + \cos[2\pi n/10 - 2\pi n_0/10)]x[n-n_0-1]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Es evidente que (3.1) es distinta de (3.2) (salvo en el caso particular que n_0 sea múltiplo de 10); esto es, en el caso general, $y[n-n_0] \neq y_1[n]$. Por lo tanto el sistema **no es invariante en el tiempo**. (Se podía sospechar este resultado porque uno de los coeficientes del sistema es función del número de muestra n.)

3. **Causalidad:** El sistema es causal porque sólo depende de **entradas** pasadas. Esto es, dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, que son iguales hasta un índice n_0, producirán salidas $y_1[n]$, $y_2[n]$ que son idénticas al menos hasta n_0.

4. **Estabilidad entrada/salida:** Para probar que el sistema es estable entrada/salida, se supone que la entrada $x[n]$ está acotada para todo n; por ejemplo, $|x[n]| \leq B_x$. Entonces se puede encontrar una cota para $y[n]$:

$$\begin{aligned} |y[n]| &\leq |x[n]| + |\cos(2\pi n/10)x[n-1]| \\ &\leq |x[n]| + |\cos(2\pi n/10)| \times |x[n-1]| \\ &\leq B_x + 1 \times B_x \\ &= 2B_x = B_y \end{aligned}$$

Esto es, la cota para la salida $|y[n]|$ es $B_y = 2B_x$. Como una entrada acotada arbitraria provoca una salida acotada, es sistema es estable entrada/salida. □

3.2. Demostración de las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad, invariación temporal para sistemas recursivos

En los ejemplos del libro las distintas propiedades de los sistemas se estudiaron para sistemas *no recursivos*. Sin embargo, si el sistema bajo estudio fuese *recursivo*, es necesario encontrar una forma cerrada que exprese la salida actual sólo en función de la entrada y de las condiciones iniciales, y que no dependa de valores pasados de la salida, como se muestra a continuación.

EJEMPLO **3.2. Forma incorrecta de demostrar propiedades en sistemas recursivos**
Parra probar la propiedad de linealidad del sistema recursivo caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n] + ay[n-1], \qquad y[-1] = 0.$$

donde sólo interesa la salida para $n \geq 0$, se supone que $y_1[n]$, $y_2[n]$ son las salidas del sistema ante entradas $x_1[n]$, $x_2[n]$. Es evidente que

$$y_1[n] = x_1[n] + ay_1[n-1], \qquad y_2[n] = x_2[n] + ay_2[n-1].$$

Para probar que el sistema es lineal debe demostrarse que si $y_3[n]$ es la salida del sistema ante la entrada $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$, resulta que $y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$. A partir de la ecuación a diferencias y de la definición de $x_3[n]$ puede encontrarse que

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3[n] + ay_3[n-1] \\ &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] + ay_3[n-1]. \end{aligned}$$

El problema es que no se sabe cuánto vale $y_3[n-1]$! Para probar la propiedad, se debe poder escribir $y_3[n]$ como función sólo de $y_1[n]$ e $y_2[n]$. Una posibilidad sería escribir $x_1[n]$ y $x_2[n]$ en función de $y_1[n]$, $y_1[n-1]$ y de $y_2[n]$, $y_2[n-1]$, ya que

$$x_1[n] = y_1[n] - ay_1[n-1] \qquad x_2[n] = y_2[n] - ay_2[n-1]$$

de modo que

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] + ay_3[n-1] \\ &= \alpha \left(y_1[n] - ay_1[n-1]\right) + \beta \left(y_2[n] - ay_2[n-1]\right) + ay_3[n-1] \\ &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] + k + a\left(-\alpha y_1[n-1] - \beta y_2[n-1] + y_3[n-1]\right). \end{aligned}$$

Note que esta expresión *no asegura* que $y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$, porque queda un término remanente dado por

$$a\left(-\alpha y_1[n-1] - \beta y_2[n-1] + y_3[n-1]\right).$$

Si efectivamente $y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$, el término entre paréntesis se anula, pero justamente esto es lo que se debe probar. En realidad, lo que prueba es que

$$y_3[n] - ay_3[n-1] = \alpha \left(y_1[n] + ay_1[n-1]\right) + \beta \left(y_2[n] - ay_2[n-1]\right). \qquad \square$$

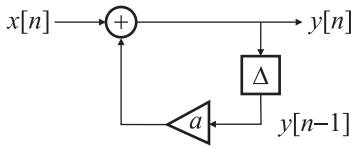


Fig. 3.1. Sistema recursivo.

EJEMPLO **3.3. Demostración de propiedades en sistemas recursivos**
Dado el sistema recursivo caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n] + ay[n-1], \qquad y[-1] = c,$$

donde $x[n] = 0$ para $n < 0$, y cuyo diagrama bloque se representa en la Fig. 3.1, se desea conocer si el sistema es (*i*) lineal; (*ii*) invariante en el tiempo; (*iii*) causal; (*iv*) entrada-salida estable.

Para demostrar las propiedades es necesario encontrar una forma cerrada que exprese la salida actual sólo en función de la entrada y de las condiciones iniciales, y que no dependa de valores pasados de la salida. Trabajando por recursión, para $n \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] + ay[-1] = x[0] + ac, \\ y[1] &= x[1] + ay[0] = x[1] + a(x[0] + ac) = x[1] + ax[0] + a^2c, \\ y[2] &= x[2] + ay[1] = x[2] + a(x[1] + ax[0] + a^2c) = x[2] + ax[1] + a^2x[0] + a^3c. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para $n < 0$ es conveniente reescribir la ecuación de recursión como

$$y[n-1] = -a^{-1}x[n] + a^{-1}y[n], \qquad y[-1] = c,$$

de donde resulta que

$$\begin{aligned} y[-1] &= c \text{ (por hipótesis)} \\ y[-2] &= -a^{-1}x[-1] + a^{-1}y[-1] = 0 + a^{-1}c = ca^{-1} \\ y[-3] &= -a^{-1}x[-2] + a^{-1}y[-2] = 0 + a^{-1}(ca^{-1}) = ca^{-2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

De las expresiones de (3.3) y (3.4) es sencillo encontrar la forma general

$$y[n] = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell}x[\ell], \tag{3.5}$$

donde se entiende que la sumatoria no se ejecuta para valores de $n < 0$. Recién a partir de esta expresión se pueden probar las propiedades.

1. **Linealidad:** Para probar que es lineal, si $y_1[n]$ es la salida ante una entrada $x_1[n]$, que se puede notar como $y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\}$, e $y_2[n]$ la salida ante una entrada $x_2[n]$, notado $y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\}$, la salida ante una entrada $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ debe ser $\alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$. Vale decir, la salida $y_1[n]$ ante la entrada $x_1[n]$ es

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell}x_1[\ell], \qquad n \geq 0,$$

y la salida $y_2[n]$ ante la entrada $x_2[n]$ es

$$y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell}x_2[\ell], \qquad n \geq 0.$$

La salida ante una entrada $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ es

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \mathcal{S}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell}(\alpha x_1[\ell] + \beta x_2[\ell]), \qquad n \geq 0 \\ &= a^{n+1}c + \alpha \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} x_1[\ell] + \beta \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} x_2[\ell] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Si el sistema es lineal, la salida recientemente calculada debe ser igual a $y_4[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$. Operando se encuentra que

$$\begin{aligned} \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] &= \alpha \left(a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} x_1[\ell] \right) + \beta \left(a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} x_2[\ell] \right) \\ &= (\alpha + \beta)\alpha^{n+1}c + \alpha \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} x_1[\ell] + \beta \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} x_2[\ell] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Es evidente que (3.6) $\neq$ (3.7), ya que en la primera ecuación aparece un término $a^{n+1}c$ (que no depende de la entrada) mientras que en la segunda aparece el término $(\alpha + \beta)\alpha^{n+1}c$, que tampoco depende de la entrada. En otras palabras,

$$\mathcal{S}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} \neq \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

de modo que el sistema **no** es lineal.

Comentario: El que pueda haber una salida distinta de cero ante una entrada nula es indicativo que el sistema no es lineal, ya que si fuese lineal, la salida se puede expresar en la forma de suma convolución (aún cuando fuese variante en el tiempo),

$$y[n] = \sum_{\ell} x[\ell] h[n - \ell],$$

de modo que si $x[n] \equiv 0 \Rightarrow y[n] \equiv 0$. La expresión de la salida (3.5) indica que aún cuando $x[n] \equiv 0$, resulta $y[n] = a^{n+1}c = a^{n+1}y[-1]$ que es distinto de cero *salvo si* $y[-1] = c = 0$.

2. **Invariación temporal:** Para que el sistema sea invariante en el tiempo, si $y_1[n]$ es la salida del sistema ante una entrada $x_1[n]$ ($y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\}$, la respuesta ante una entrada $x_2[n] = x_1[n - n_0]$ debe ser $y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = \mathcal{S}\{x_1[n - n_0]\} = y_1[n - n_0]$. Entonces, la salida $y_1[n]$ ante una entrada $x_1[n]$ es:

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} x_1[\ell], \qquad n \geq 0. \tag{3.8}$$

La salida $y_2[n]$ ante una entrada $x_2[n] = x_1[n - n_0]$ es

$$y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = \mathcal{S}\{x_1[n - n_0]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} x_1[\ell - n_0], \qquad n \geq 0.$$

Haciendo un cambio de variables ($m = \ell - n_0$) se encuentra que

$$\begin{aligned} y_2[n] &= a^{n+1}c + \sum_{m=-n_o}^{n-n_0} a^{n-m-n_0} x_1[m] = a^{n+1}c + a^{n-n_0} \sum_{m=-n_o}^{n-n_0} a^{-m} x_1[m] \\ &= a^{n+1}c + a^{n-n_0} \sum_{m=0}^{n-n_0} a^{-m} x_1[m], \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde el último cambio de índice inferior en la sumatoria se debe a que $x_1[n] = 0$ para $n < 0$. Por otra parte, la salida $y_1[n - n_0]$ es, de acuerdo a la ecuación (3.8), (hay que cambiar $n \mapsto n - n_0$ cada vez que aparezca)

$$\begin{aligned} y_1[n-n_0] &= a^{(n-n_0)+1}c + \sum_{\ell=0}^{(n-n_0)} a^{(n-n_0)-\ell}x_1[\ell], \qquad n \geq 0 \\ &= a^{(n-n_0)+1}c + a^{n-n_0}\sum_{\ell=0}^{n-n_0} a^{-\ell}x_1[\ell]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comparando (3.9) con (3.10) se observa que los términos vinculados a la sumatoria, que dependen de la entrada $x_1[n]$, son iguales, mientras que el término que no depende de la entrada en $a^{n+1}c$ en (3.9), y $a^{(n-n_0)+1}c$ en (3.10) . Por lo tanto,

$$y_1[n-n_0] \neq \mathcal{S}\{x_1[n-n_0]\},$$

y en consecuencia el sistema **no** es invariante en el tiempo.

3. **Causalidad:** Un sistema es causal si para cualquier elección de n_0, el valor de la sucesión de salida en el instante $n = n_0$ depende sólo de los valores de la sucesión de entrada hasta $n = n_0$. Esto implica que si $x_1[n] = x_2[n]$ para $n \leq n_0$, entonces $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$. La salida $y_1[n]$ ante la entrada $x_1[n]$ es

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell}x_1[\ell], \qquad n \geq 0,$$

y la salida $y_2[n]$ ante la entrada $x_2[n]$ es

$$y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell}x_2[\ell], \qquad n \geq 0.$$

Es evidente que si $x_1[n] = x_2[n]$ para todo $n \leq n_0$, también $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$. En consecuencia el sistema es **causal.**

4. **Entrada-salida estable:** El sistema es entrada-salida estable si entradas acotadas producen salidas acotadas. Si la entrada $x[n]$ está acotada por B_x, esto es, $|x[n]| < B_x$ para todo n, la cota de la salida se puede establecer como

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left|a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell}x[\ell]\right| \leq \left|a^{n+1}c\right| + \left|\sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell}x[\ell]\right| \\ &\leq \left|a^{n+1}c\right| + \sum_{\ell=0}^{n}\left|a^{n-\ell}x[\ell]\right| \\ &= \left|a^{n+1}\right||c| + \sum_{\ell=0}^{n}\left|a^{n-\ell}\right||x[\ell]| \\ &\leq |c|\,|a|^{n+1} + B_x\sum_{\ell=0}^{n}|a|^{n-\ell} \\ &\leq |c|\,|a|^{n+1} + B_x\frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \end{aligned}$$

La cota sobre la salida debe se independiente de n. Pero en este sistema esto se puede lograr porque $|c|\,|a|^{n+1}$ no se puede acotar por un número (que no dependa de n). Si $|a| > 1$, $|c|\,|a|^{n+1}$ crece ilimitadamente para $n > 0$, y si $|a| < 1$, $|c|\,|a|^{n+1}$ crece sin ímite pero para $n < 0$. Por lo tanto el sistema no es estable. Si permitimos que $c = 0$, la estabilidad

sólo depende del valor de $|a|$: si $|a| > 1$ el término $(1-|a|^{n+1})/(1-|a|)$ no se puede hacer independiente de n. Por lo tanto el sistema es inestable. Pero si $|a| < 1$, entonces $1/(1-|a|) < (1-|a|^{n+1})/(1-|a|)$, de modo que

$$|y[n]| \leq B_x \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \leq \frac{B_x}{1-|a|} = B_y,$$

y en consecuencia el sistema es estable. Resumiendo,

$$\begin{aligned} \text{si } c \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{sistema } \textbf{inestable,} \\ \text{si } c = 0 \text{ y } |a| < 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{sistema } \textbf{estable,} \\ \text{si } c = 0 \text{ y } |a| \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{sistema } \textbf{inestable.} \end{aligned}$$

Es necesario recalcar que en este ejemplo la causa que el sistema no sea lineal e invariante en el tiempo es la presencia de términos que dependen de la condición inicial $y[-1] = c$. Al elegir $c = 0$, el sistema resulta **estable** e **invariante en el tiempo**. Esta elección de c no cambia la condición de que el sistema es **causal.** La **estabilidad** sólo depende del valor de a. □

EJEMPLO **3.4. Demostración de propiedades del sistema** $y[n] + (-1)^n y[n-1] = x[n]$, con condición inicial $y[-1] = 0$.
El sistema se puede escribir como una ecuación recursiva de la forma

$$y[n] = -(-1)^n y[n-1] + x[n] = (-1)^{n+1} y[n-1] + x[n].$$

La forma general de la salida en función sólo de la entrada resulta

$$\begin{aligned}
y[0] &= (-1)^{0+1} y[-1] + x[0] = 0 + x[0] = x[0] && (3.11)\\
y[1] &= (-1)^{1+1} y[0] + x[1] = x[0] + x[1] && (3.12)\\
y[2] &= (-1)^{2+1} y[1] + x[2] = -(x[0] + x[1]) + x[2] \\
&\quad -x[0] - x[1] + x[2] && (3.13)\\
y[3] &= (-1)^{3+1} y[2] + x[3] = -x[0] - x[1] + x[2] + x[3] && (3.14)\\
y[4] &= (-1)^{4+1} y[3] + x[4] = -(-x[0] - x[1] + x[2] + x[3]) + x[4] \\
&= x[0] + x[1] - x[2] - x[3] + x[4] && (3.15)\\
y[5] &= (-1)^{5+1} y[4] + x[4] = x[0] + x[1] - x[2] - x[3] + x[4] + x[5] && (3.16)\\
y[6] &= (-1)^{6+1} y[5] + x[5] = -(x[0] + x[1] - x[2] - x[3] + x[4] + x[5]) + x[6] \\
&= -x[0] - x[1] + x[2] + x[3] - x[4] - x[5] + x[6] && (3.17)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

En este caso no es sencillo encontrar una forma cerrada para la sucesión de salida $y[n]$ en función de la entrada $x[n]$ (los signos cambian de a dos muestras consecutivas de la entrada por vez), pero tampoco hace falta para demostrar las propiedades. Con un poco de trabajo se puede contras que

$$y[n] = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \displaystyle\sum_{r=0}^{(n-1)/2} (-1)^r (x[2r] + x[2r+1]), & \text{si } n \text{ es impar,} \\ x[n] + (-1)^{n/2} \displaystyle\sum_{r=0}^{n/2-1} (-1)^r (x[2r] + x[2r+1]), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.18)$$

1. **Linealidad**: Si $y_1[n]$ e $y_2[n]$ son las salidas ante entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente, la salida ante una entrada $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ es, para $n = 0$,

$$y_3[0] = x_3[0] = ax_1[0] + bx_2[0] = ay_1[0] + by_2[0].$$

De manera similar, para $n = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} y_3[1] &= x_3[0] + x_3[1] = (ax_1[0] + bx_2[0]) + (ax_1[1] + bx_2[1]) \\ &= a(x_1[0] + x_1[1]) + b(x_2[0] + x_2[1]) \\ &= ay_1[1] + by_2[1]. \end{aligned}$$

Para $n = 2$ resulta

$$\begin{aligned} y_3[2] &= -x_3[0] - x_3[1] + x_3[2] \\ &= -(ax_1[0] + bx_2[0]) - (ax_1[1] + bx_2[1]) + (ax_1[2] + bx_2[2]) \\ &= a(-x_1[0] - x_1[1] + x_1[2]) + b(-x_2[0] - x_2[1] + x_2[2]) \\ &= ay_1[2] + by_2[2] \end{aligned}$$

El procedimiento se puede repetir para distintos valores de n, pero es evidente que $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$, de modo que el sistema es *lineal*.

2. **Causalidad**: De desarrollo recursivo (3.11)-(3.17) o de la forma general (3.18) se observa que $y[n]$ está en función sólo de $x[i]$, con $0 \leq i \leq n$, es decir que la salida actual sólo depende de valores actuales y pasado s de la entrada. Por lo tanto, el sistema es *causal*.

3. **Invariación temporal**: el sistema *no* es invariante en el tiempo por causa del coeficiente $(-1)^n$ que multiplica a $y[n-1]$. Se puede probar con un contraejemplo. Si $x_1[n] = \delta[n]$, la salida $y_1[n]$ es

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$y_1[n]$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	$\cdots$

Si $x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1]$, la salida $y_2[n]$ es

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$y_2[n]$	0	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	$\cdots$

Se observa que $y_2[n] \neq y_1[m-1]$, y por lo tanto el sistema *no* es invariante en el tiempo.

4. **Estabilidad entrada/salida**: Por la forma de la expresión (3.18) parece que el sistema no es estable entrada/salida. La forma más sencilla de comprobarlo es buscando una sucesión acotada que produzca una salida no acotada. Si se elige $x[n]$ variando entre ± 1, por ejemplo

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$x[n]$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	$\cdots$

se encuentra que la salida es

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$y[n]$	1	2	-3	-4	5	6	-7	-8	9	$\cdots$

de modo que aunque $|x[n]| \leq 1 = B_x$, $|y[n]| \leq n + 1$, y por lo tanto no existe una cota que asegure que $|y[n]| \leq B_y \ \forall n$. En consecuencia, el sistema **no** es estable entrada-salida. □

3.3. Salida estacionaria para excitaciones senoidales

EJEMPLO **3.5. Solución estacionaria de un SLIT IIR excitado con entradas senoidales**

Se desea conocer la respuesta del sistema IIR representado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = a\,y[n-1] + b\,x[n], \qquad y[-1] = 0,$$

y compararla con la respuesta de estado estacionario cuando la señal de entrada es

$$x[n] = [c + d\,\mathrm{sen}(\omega_1 n) + e\cos(\omega_2 + \theta)]\; u[n].$$

Los parámetros son $a = 0{,}8$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $e = -1$, $\omega_1 = 0{,}1\pi$, $\omega_2 = 0{,}3\pi$, $\theta = \pi/6$.

Para simplificar el análisis conviene separar la entrada en tres componentes: una de frecuencia cero, $x_0[n] = c$; otra de frecuencia ω_1, dada por $x_1[n] = d\,\mathrm{sen}\,(\omega_1 n)$, $-\infty < n < \infty$, y finalmente otra de frecuencia ω_2 definida como $x_2[n] = e\cos(\omega_2 n + \theta)$, $-\infty < n < \infty$. De este modo la entrada $x[n]$ puede escribirse

$$x[n] = (x_0[n] + x_1[n] + x_2[n])\,u[n].$$

Si $y_0[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$ son las salidas del sistema ante las entradas $x_0[n]$, $x_1[n]$, $x_2[n]$, respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned}
y_0[n] &= \left|H\left(e^{j0}\right)\right| x_0[n], \\
y_1[n] &= \left|H\left(e^{j\omega_1}\right)\right| d\,\mathrm{sen}\left[\omega_1 n + \angle H\left(e^{j\omega_1}\right)\right] \\
&= \left|H\left(e^{j\omega_1}\right)\right| d\,\mathrm{sen}\left[\omega_1\,(n + \Delta_1)\right] \\
y_2[n] &= \left|H\left(e^{j\omega_2}\right)\right| e\cos\left[\omega_2 n + \phi + \angle H\left(e^{j\omega_2}\right)\right], \\
&= \left|H\left(e^{j\omega_2}\right)\right| e\cos\left[\omega_2\,(n + \Delta_2)\right],
\end{aligned}$$

donde

$$\Delta_1 = \frac{\angle H\left(e^{j\omega_1}\right)}{\omega_1}, \qquad \Delta_2 = \frac{\phi + \angle H\left(e^{j\omega_1}\right)}{\omega_2},$$

son los retardos (en fracciones de muestra) de cada salida con respecto a la entrada correspondiente. Estas respuestas se derivan fácilmente. La salida $y[n]$ del sistema con respuesta impulsiva $h[n]$ ante una entrada $x[n]$ está dada por la suma convolución $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$ y en el caso particular en que $x[n]$ es una exponencial compleja, $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ se tiene que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k}\right) e^{j\omega_0 n} = H\left(e^{j\omega_0}\right) e^{j\omega_0 n}.$$

Si

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 n+\theta)} + e^{-(j\omega_0 n+\theta)}\right],$$

con $-\infty < n < \infty$, es fácil ver que

$$y[n] = \frac{A}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right) e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}H\left(e^{-j\omega_0}\right) e^{-j(\omega_0 n+\theta)}.$$

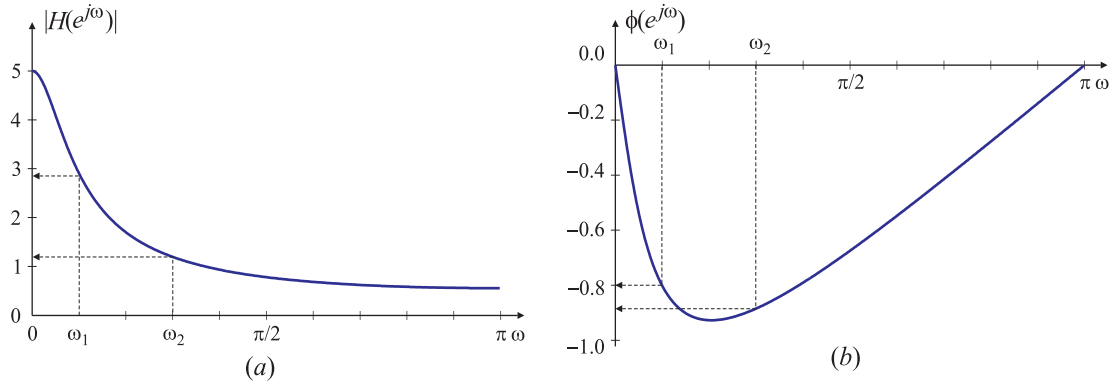


Fig. 3.2. Respuesta en frecuencia en módulo (a) y fase (b) para el filtro IIR.

Como $h[n]$ es real, $H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$, y entonces,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{A}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}H^*\left(e^{j\omega_0}\right)e^{-j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= \frac{A}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{-j(\omega_0 n+\theta)}\right]^* \\ &= \mathrm{Re}\left\{AH\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j(\omega_0 n+\theta)}\right\} = A\,\mathrm{Re}\left\{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\phi(\omega_0)}e^{j(\omega_0 n+\theta)}\right\} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos[\omega_0 n + \phi(\omega_0) + \theta] \end{aligned}$$

donde $\phi(\omega_0) = \arg\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]$.

La respuesta en frecuencia del sistema $y[n] = a\,y[n-1] + b\,x[n]$, $y[-1] = 0$, es

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{b}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{b(1-a\cos\omega)}{1-2a\cos\omega+a^2} + j\frac{-ba\,\mathrm{sen}\,\omega}{1-2a\cos\omega+a^2},$$

que se grafica en la Fig. 3.2 para los valores de los parámetros especificados más arriba. A los valores de las frecuencias ω_0, ω_1 y ω_2 de la señal de entrada se encuentra que

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=0} &= 5 + j0, \\ H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega 1} &= 2{,}02143 - j2{,}08955 = 2{,}90730\,e^{-j0{,}80197}, \\ H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_2} &= 0{,}75731 - j0{,}92519 = 1{,}19562\,e^{-j0{,}88485}, \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} y[n] &= 5 + 2{,}90730\,\mathrm{sen}\,(0{,}1\pi n - 0{,}80197) - 1{,}19652\cos\left(0{,}3\pi n + \tfrac{\pi}{6} - 0{,}88485\right) \\ &= 5 + 2{,}90730\,\mathrm{sen}\,[0{,}1\pi\,(n - 2{,}55274)] - 1{,}19652\cos\left[0{,}3\pi\,(n - 0{,}93886) + \tfrac{\pi}{6}\right]. \end{aligned}$$

De esta última expresión se observa que el filtro retarda la señal de frecuencia $\omega_1 = 0{,}1\pi$ en 2.55 muestras, y la señal de frecuencia $\omega_2 = 0{,}3\pi$ en 0.93 muestras. Este efecto es apreciable en las Figs. 3.3 y **??**, que muestran las señales de entrada y salida del filtro (en estado estacionario) en cada uno de estos casos. Los valores del retardo son muy similares a los calculados.

Las respuestas transitoria y estacionaria para cada una de las componentes de la señal de entrada se comparan en la Fig. 3.5. La respuesta de estado estacionario se indica mediante diamantes (♦), y la transitoria mediante círculos (○). También se grafica la diferencia entre ambas, que revela que cualquiera de las componentes de la salida converge al valor de estado estacionario en 20 muestras, aproximadamente. □

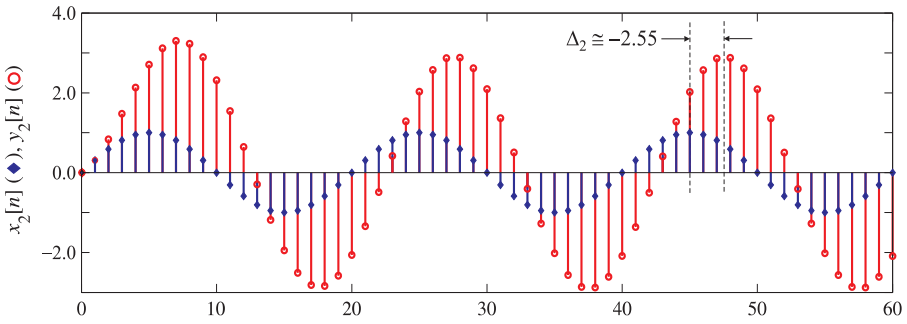


Fig. 3.3. Señal de entrada (♦) $x[n] = \text{sen}\,(0{,}1\pi n)$ y de salida (○) del filtro.

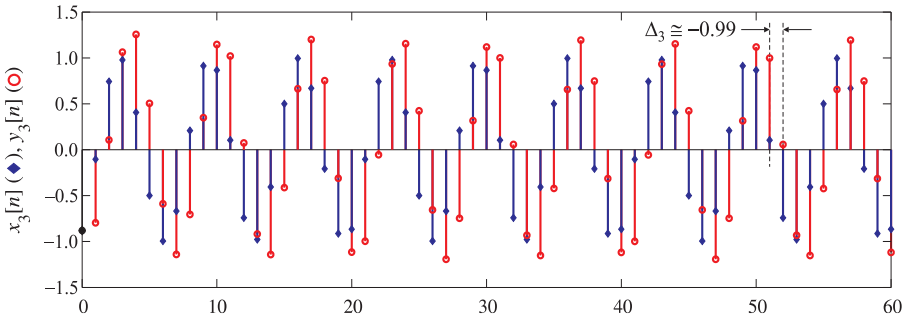


Fig. 3.4. Señal de entrada (♦) $x[n] = -\cos\,(0{,}3\pi n + \pi/6)$ y de salida (○) del filtro.

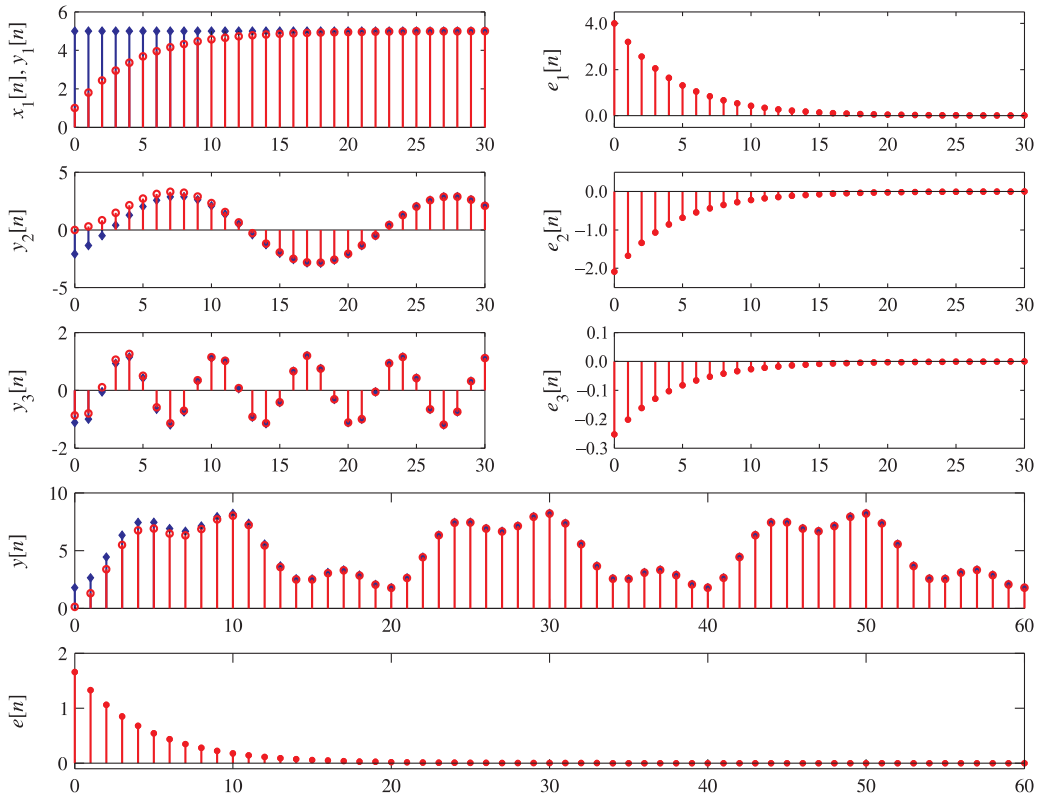


Fig. 3.5. Comparación de las respuestas transitorias (○) y de estado estacionario (♦).

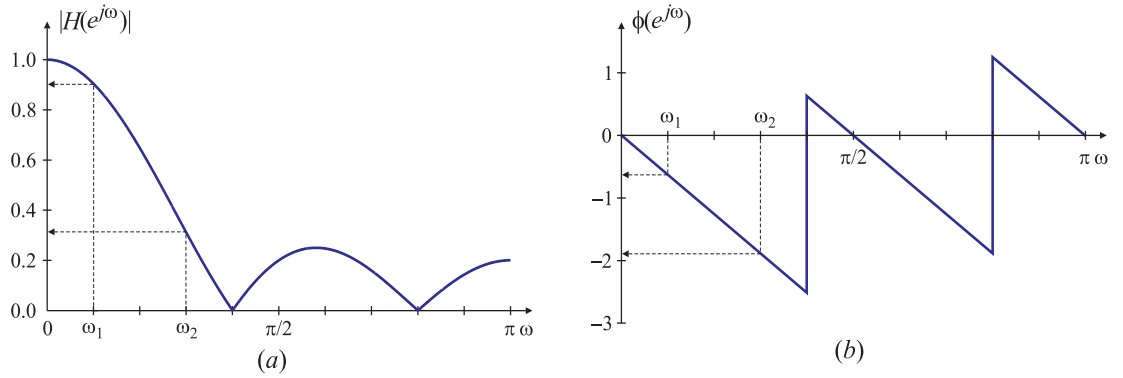


Fig. 3.6. Respuesta en frecuencia en módulo (a) y fase (b) para el filtro FIR promediador.

EJEMPLO **3.6. Solución estacionaria de un SLIT FIR excitado con entradas senoidales**
La misma entrada del ejemplo anterior se aplica a un filtro FIR promediador de $N = 5$ muestras cuya respuesta impulsiva es

$$h[n] = \begin{cases} 1/N, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La ecuación a diferencias está dada por

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[n-m] = \frac{1}{N}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \cdots + x[n-(N-1)]\right).$$

La respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2}\frac{\operatorname{sen}(N\omega/2)}{N\operatorname{sen}(\omega/2)} = e^{-j2\omega}\frac{\operatorname{sen}(5\omega/2)}{5\operatorname{sen}(\omega/2)}, \tag{3.19}$$

y su gráfico en módulo y fase para $N = 5$ se presenta en la Fig. 3.6.

Para las frecuencias que componen la señal de entrada $x[n]$ se encuentra que

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=0} &= +1 + j0, \\ H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega 1} &= +0{,}73138 - j0{,}53138 = 0{,}90403\, e^{-j0{,}62832}, \\ H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_2} &= -0{,}09626 - j0{,}29626 = 0{,}31151\, e^{-j1{,}88496}, \end{aligned}$$

y entonces la salida del sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned} y[n] &= 1 + 0{,}90403\operatorname{sen}(0{,}1\pi n - 0{,}62832) - 0{,}31151\cos(0{,}3\pi n + \tfrac{\pi}{6} - 1{,}88496) \\ &= 1 + 0{,}90403\operatorname{sen}[0{,}1\pi(n-2)] - 0{,}31151\cos[0{,}3\pi(n-2) + \tfrac{\pi}{6}] \end{aligned}$$

La última expresión revela que el filtro retarda las componentes de frecuencias $\omega_1 = 0{,}1\pi$ y $\omega_2 = 0{,}3\pi$ en 2 muestras, como se observa en la Fig. 3.7 y en la Fig. 3.8, respectivamente, que muestran las señales de entrada y de salida de estado estacionario del filtro para cada una de estas dos componentes frecuenciales. Este resultado es compatible con la respuesta de fase lineal (generalizada) del filtro que se observa en la Fig. 3.6(b) y con la ecuación (3.19), de la que se desprende que el retardo de fase introducido por el filtro es de $(N-1)/2 = 2$ muestras.

La Fig. 3.9 compara las respuestas transitoria (○) y estacionaria (♦) para cada una de las componentes de la señal de entrada; también se muestra el error entre ambas. En este caso cualquiera de las

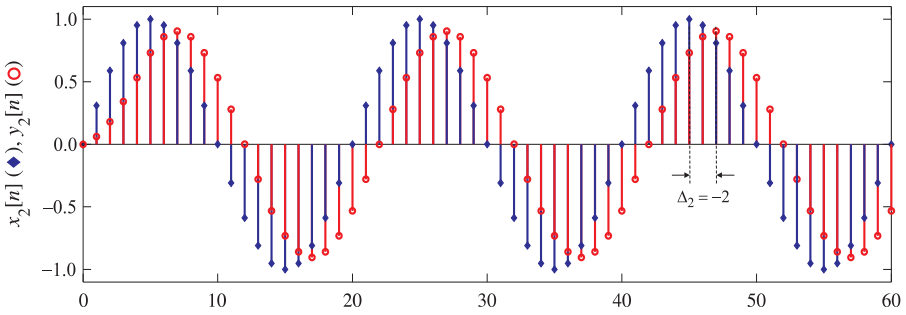


Fig. 3.7. Señal de entrada (♦) $x[n] = \text{sen}\,(0{,}1\pi n)$ y de salida (○) del filtro FIR promediador.

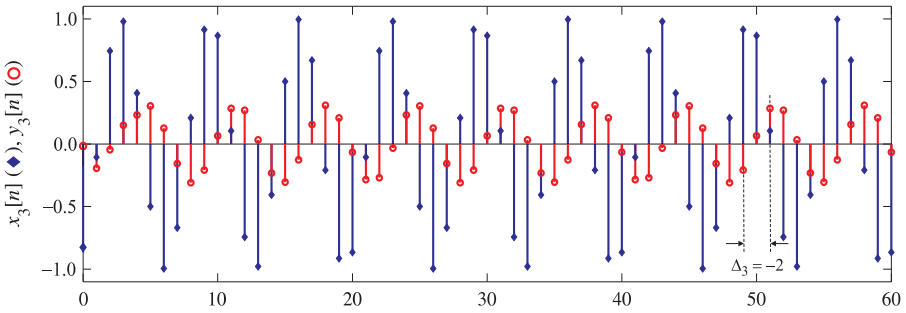


Fig. 3.8. Señal de entrada (♦) $x[n] = -\cos\,(0{,}3\pi n + \pi/6)$ y de salida (○) del filtro.

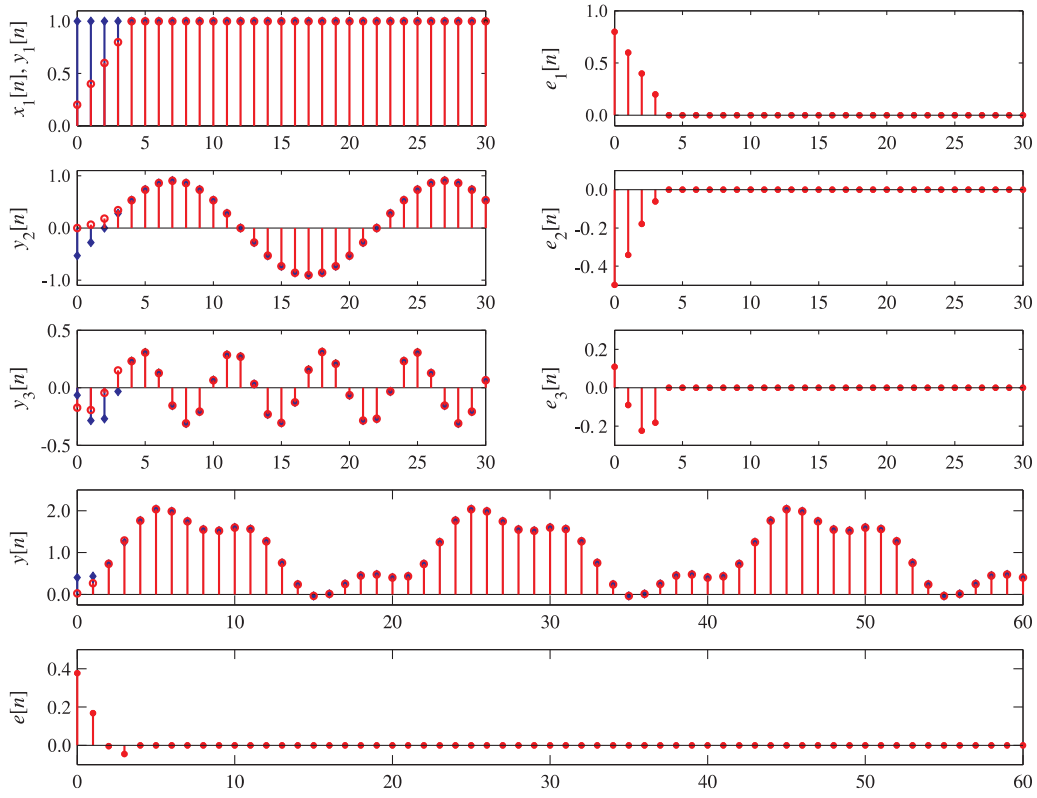


Fig. 3.9. Comparación de las respuestas transitorias (○) y de estado estacionario (♦) del filtro FIR promediador.

componentes de la señal de salida converge a la solución de estado estacionario en sólo $N-1=4$ muestras, y el error es nulo a partir de la muestra $N=5$ en adelante.

La característica de retardar las componentes de distintas frecuencias de la señal de entrada en una misma cantidad de muestras, y la de poseer un transitorio de duración finita son típicas de los sistemas FIR (aunque esto no significa que no puedan diseñarse filtros FIR con retardo que no sea constante en función de la frecuencia). □

3.3.1. Listado del programa MATLAB para calcular la respuesta temporal

```
% respuesta temporal del sistema discreto y[n] = a*y[n-1] + b*x[n]
% cuando x[n] = c + d*sen(w0*n)+ e*cos(w1*n+fi)
%
close all; clear all;
%
% valores numericos:
a  = 0.8;    b  = 1.0;    c  = 1.0;
d  = 1.0;    e  =-1.0;
w0 = 0.1*pi; w1 = 0.3*pi; fi = pi/6;
I  = sqrt(-1);
%
n  = 0:60;            % vector de indices
x1 = c*ones(size(n)); % las tres componentes de la entrada
x2 = d*sin(w0*n);
x3 = e*cos(w1*n+fi);
%
% La funcion transferencia en las distintas frecuencias
H1 = b/(1-a*exp(-I*0));
H2 = b/(1-a*exp(-I*w0));
H3 = b/(1-a*exp(-I*w1));
%
% Las componentes de la salida de estado estacionario
y1ee = H1*x1;
y2ee = abs(H2)*d*sin(w0*n+angle(H2));
y3ee = abs(H3)*e*cos(w1*n+fi+angle(H3));
%
% las respuestas reales (transitorio + estacionario)
NumH = b;
DenH = [1 -a];
y1te = filter(NumH,DenH,x1);
y2te = filter(NumH,DenH,x2);
y3te = filter(NumH,DenH,x3);
%
% ========================================================================
% grafica la salida transitoria y de estado estacionario
% debidas a la entrada x1[n]
%
figure;
subplot(521);
h1=stem(n,y1ee,'b');hold on;
h2=stem(n,y1te,'r');hold off;
ylabel('{\itx}_1[{\itn}], {\ity}_1[{\itn}]','FontSize',10,'FontName','Times');
%
% grafica la diferencia entre las salidas transitoria y estacionaria
subplot(522);
h1=stem(n,y1ee-y1te,'b');
set(h1,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',7,'Xlim',[0 30])
ylabel('{\ite}_1[{\itn}]','FontSize',10,'FontName','Times');
%
% ========================================================================
% grafica la salida transitoria y de estado estacionario
% debidas a la entrada x2[n]
%
subplot(523);
h1=stem(n,y2ee,'b');hold on;
h2=stem(n,y2te,'r');hold off;
ylabel('{\ity}_2[{\itn}]','FontSize',10,'FontName','Times');
%
```

```
% grafica la diferencia entre las salidas transitoria y estacionaria
subplot(524);
h1=stem(n,y2ee-y2te,'b');
set(h1,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',7,'Xlim',[0 30])
ylabel('{\ite}_2[{\itn}]','FontSize',10,'FontName','Times');
%
% ========================================================================
% grafica la salida transitoria y de estado estacionario
% debidas a la entrada x3[n]
%
subplot(525);
h1=stem(n,y3ee,'b');hold on;
h2=stem(n,y3te,'r');hold off;
ylabel('{\ity}_3[{\itn}]','FontSize',10,'FontName','Times');
%
% grafica la diferencia entre las salidas transitoria y estacionaria
subplot(526);
h1=stem(n,y3ee-y3te,'b');
set(h1,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',7,'Xlim',[0 30])
ylabel('{\ite}_3[{\itn}]','FontSize',10,'FontName','Times');
%
% ========================================================================
% grafica la salida transitoria y de estado estacionario
% debidas a la entrada x[n] = x1[n]+x2[n]+x3[n]
%
subplot(514)
h1=stem(n,y1ee+y2ee+y3ee,'b');hold on;
h2=stem(n,y1te+y2te+y3te,'r');hold off;
ylabel('{\ity}[{\itn}]','FontSize',10,'FontName','Times');
%
% grafica la diferencia entre las salidas transitoria y estacionaria
subplot(515);
h1=stem(n,y1ee+y2ee+y3ee-(y1te+y2te+y3te),'b');
set(h1,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',7)
ylabel('{\ite}[{\itn}]','FontSize',10,'FontName','Times');
```

3.3.2. Comandos para graficar la respuesta en frecuencia

```
NumH = b;
DenH = [1 -a];
[H,w]=freqz(NumH,DenH);
subplot(211);plot(w/pi,abs(H));
subplot(212);plot(w/pi,unwrap(angle(H)));
```

EJEMPLO **3.7. Salida de estado estacionario de un transformador de Hilbert**
El sistema caracterizado por la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0 \\ -j, & 0 < \omega < \pi, \end{cases}$$

se conoce como *transformador de Hilbert*. Su respuesta impulsiva es

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} je^{j\omega n}d\omega + \int_{0}^{\pi}(-j)e^{j\omega n}d\omega\right) \\ &= \frac{1}{2\pi n}\left(1 - e^{-j\pi n} - e^{j\pi n} + 1\right) \\ &= \frac{1}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right], \end{aligned}$$

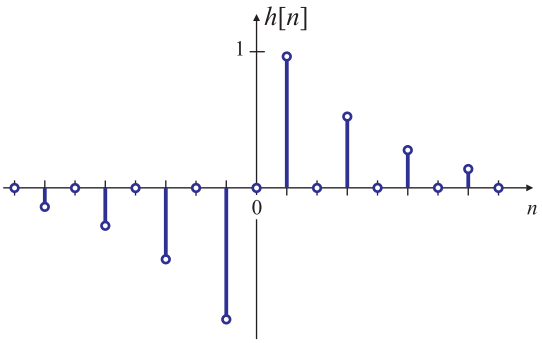


Fig. 3.10. Respuesta impulsiva del transformador de Hilbert.

si $n \neq 0$, y para $n = 0$

$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} jd\omega + \int_{0}^{\pi}(-j)d\omega\right) = \frac{1}{2\pi}(-j\pi + j\pi) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \text{ o } n \text{ par}, \\ 2/(\pi n), & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Como la transformada $H(e^{j\omega})$ es *imaginaria pura*, la antitransformada $h[n]$ es *impar*. El gráfico de $h[n]$ se muestra en la Fig. 3.10.

Si la entrada es $x[n] = A\cos(\omega_0 n) + B\,\mathrm{sen}(\omega_1 n)$, con $0 < \omega_0 < \omega_1 < \pi$, la salida $y[n]$ de estado estacionario se puede calcular como

$$y[n] = A\left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\omega_0}\cos(\omega_0 n + \phi_0) + B\left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\omega_1}\mathrm{sen}(\omega_1 n + \phi_1),$$

donde $\phi_i = \arg\{H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_i}\}$. Es claro que

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = 1, \quad \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(\omega),$$

y por lo tanto, $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$. Entonces:

$$y[n] = A \times 1 \times \cos(\omega_0 n - \pi/2) + B \times 1 \times \mathrm{sen}(\omega_1 n - \pi/2).$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\theta - \pi/2) = \mathrm{sen}\,\theta$, y que $\mathrm{sen}(\theta - \pi/2) = -\cos\theta$, la salida $y[n]$ puede escribirse como

$$\boxed{y[n] = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 n) - B\cos(\omega_1 n).}$$

El resultado también se puede obtener trabajando directamente en el dominio frecuencia. La entrada $x[n]$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos(\omega_0 n) + B\,\mathrm{sen}(\omega_1 n) \\ &= \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right) + j\frac{B}{2}\left(-e^{j\omega_1 n} + e^{-j\omega_1 n}\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el par transformado $e^{j\omega_0 n} \Leftrightarrow 2\pi\sum_r \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$, se tiene que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_r \pi A\left[\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r)\right] + j\pi B\left[-\delta(\omega - \omega_1 + 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_1 + 2\pi r)\right].$$

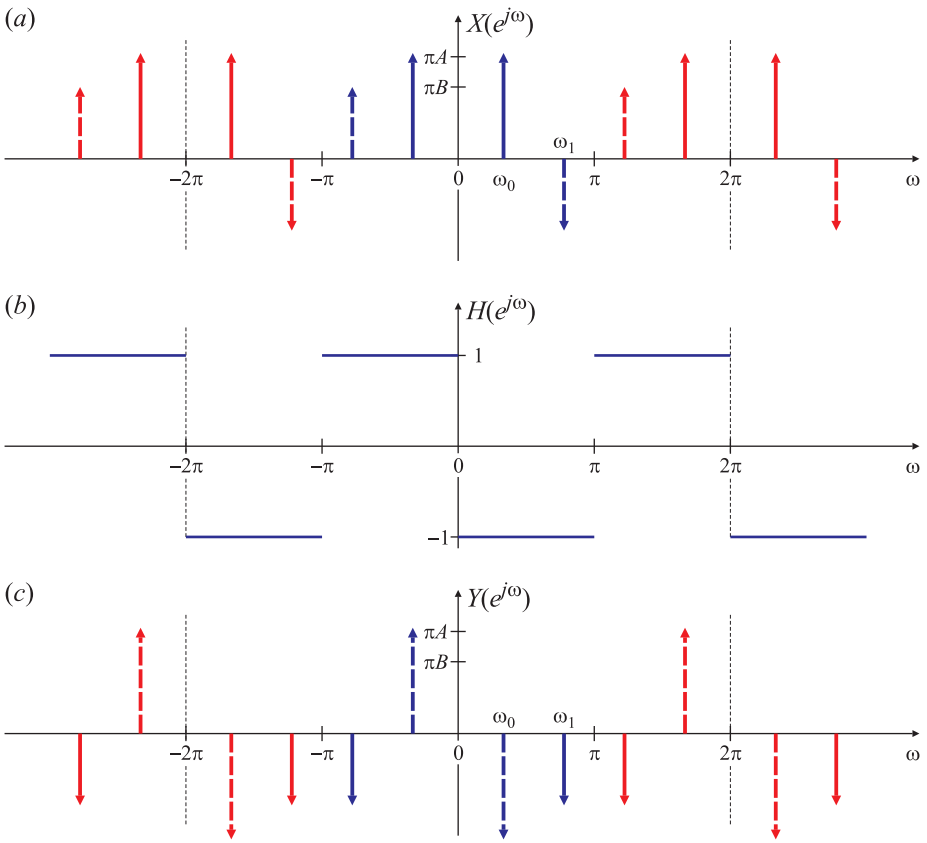


Fig. 3.11. Cálculo de la salida de transformador de Hilbert en el dominio frecuencia..

Este espectro se representa en la Fig. 3.11(a). La salida se puede calcular como

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= \sum_r \pi A\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_i+2\pi r}\delta(\omega-\omega_0+2\pi r)+\pi A\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\omega_i+2\pi r}\delta(\omega+\omega_0+2\pi r)+ \\ &\quad \sum_r -j\pi B\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_1+2\pi r}\delta(\omega-\omega_1+2\pi r)+j\pi B\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\omega_1+2\pi r}\delta(\omega+\omega_1+2\pi r). \end{aligned}$$

Como $H(e^{j\omega})$ es periódica, $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega_i+2\pi r} = H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega_i}$, y entonces

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_r \pi A\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_i}\delta(\omega-\omega_0+2\pi r)+\pi A\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\omega_i}\delta(\omega+\omega_0+2\pi r)+ \\ &\quad \sum_r -j\pi B\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_1}\delta(\omega-\omega_1+2\pi r)+j\pi B\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\omega_1}\delta(\omega+\omega_1+2\pi r). \end{aligned}$$

De acuerdo con la expresión de la respuesta en frecuencia,

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_i} &= H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_1} = -j \\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\omega_i} &= H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\omega_1} = j \end{aligned}$$

como se muestra en la Fig. 3.11(b), se tiene que

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_r -j\pi A\,\delta(\omega-\omega_0+2\pi r)+j\pi A\,\delta(\omega+\omega_0+2\pi r)+ \\ &\quad \sum_r -j\pi B(-j)\delta(\omega-\omega_1+2\pi r)+j\pi B(j)\delta(\omega+\omega_1+2\pi r) \\ &= \sum_r j\pi A\,[-\delta(\omega-\omega_0+2\pi r)+\delta(\omega+\omega_0+2\pi r)] \\ &\quad +(-\pi B)\,[\delta(\omega-\omega_1+2\pi r)+\delta(\omega+\omega_1+2\pi r)]\,. \end{aligned}$$

El espectro de $Y(e^{j\omega})$ se grafica en la Fig. 3.11(c). Antitransformando resulta

$$y[n] = j\tfrac{A}{2}\left(-e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}\right)-\tfrac{B}{2}\left(e^{j\omega_1 n}+e^{-j\omega_1 n}\right)$$

es decir

$$\boxed{y[n] = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 n) - B\cos(\omega_1 n).}$$

resultado que coincide con el calculado en el dominio temporal. □

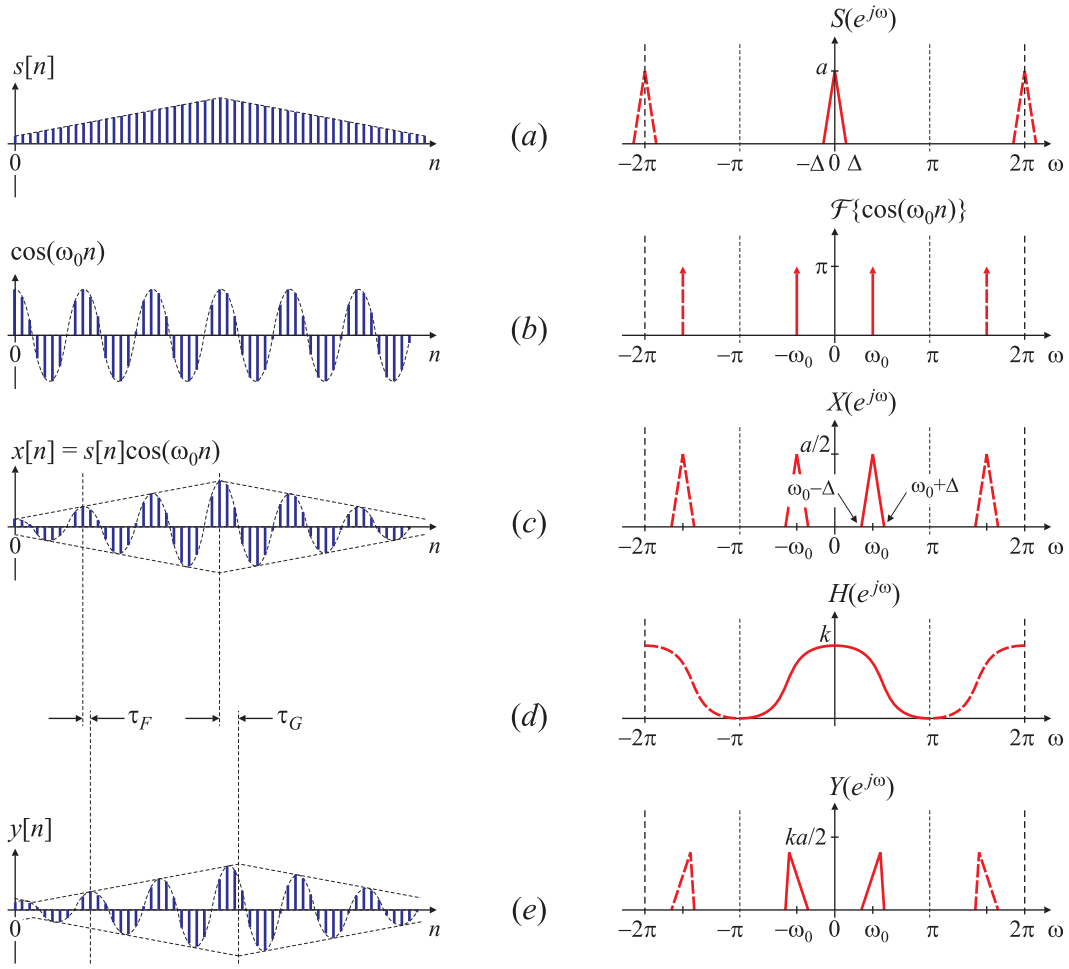


Fig. 3.12. Retardo de grupo y retardo de fase en una señal tipo pasabanda.

3.4. Retardo de grupo y retardo de fase

Una medida conveniente de la linealidad de la fase es el *retardo de grupo*, que describe el efecto de la fase de la respuesta en frecuencia de un sistema sobre una señal de banda angosta. Esta señal está caracterizada como

$$x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n), \tag{3.20}$$

donde $s[n]$ es una señal tipo pasabajo y con ancho de banda pequeño, es decir, $S(e^{j\omega}) = 0$ para $|\omega| > \Delta$, donde Δ es muy pequeño, y $\Delta \ll \omega_0$, como se representa en la Fig. 3.12(a). Es habitual denominar a $s[n]$ como señal *moduladora*, y a la señal $p[n] = \cos\omega_0 n$ como *portadora*. La forma de onda temporal y el espectro de esta señal se grafican en la Fig. 3.12(b) . Como $x[n] = s[n] \times p[n]$, el espectro $X(e^{j\omega})$ es la convolución entre $S(e^{j\omega})$ y $P(e^{j\omega})$, y resulta en una señal de ancho de banda angosta, centrada en $\pm\omega_0$, como se ilustra en la Fig. 3.12(c).

Como

$$P(e^{j\omega}) = \sum_k \pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \pi\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r),$$

la transformada de Fourier de la sucesión discreta (3.20) es

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta})P(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta})[\pi\delta(\omega-\theta-\omega_0)+\pi\delta(\omega-\theta+\omega_0)]\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}S(e^{j(\omega-\omega_0)})+\tfrac{1}{2}S(e^{j(\omega+\omega_0)}) \end{aligned}$$

Si esta señal excita un filtro discreto con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, representada en la Fig. 3.12(d), la transformada de Fourier de la salida $y[n]$ del sistema es

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= \tfrac{1}{2}H(e^{j\omega})S(e^{j(\omega-\omega_0+2\pi k)})+\tfrac{1}{2}H(e^{j\omega})S(e^{j(\omega+\omega_0+2\pi k)}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

como se muestra en la Fig. 3.12(d) . La salida $y[n]$ del filtro está dada por

$$y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

Como el intervalo de integración es $(-\pi,\pi]$, de las infinitas réplicas presentes en (3.21) sólo deben considerarse las correspondientes a $k=0$. Además, ya que la señal $x[n]$ es de banda angosta, su espectro $X(e^{j\omega})$ es nulo en todo el intervalo $(-\pi,\pi]$ con excepción de las bandas $[-\omega_0-\Delta,-\omega_0+\Delta]$ y $[\omega_0-\Delta,\omega_0+\Delta]$, [Fig. 3.12$(c)$] de manera que

$$y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta}\tfrac{1}{2}H(e^{j\omega})S(e^{j(\omega-\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\Delta}^{-\omega_0+\Delta}\tfrac{1}{2}H(e^{j\omega})S(e^{j(\omega+\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega. \tag{3.22}$$

Para calcular de manera explícita la salida se deben analizar cada una de las dos integrales de (3.22). Si se definen

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta}\frac{1}{2}H(e^{j\omega})S(e^{j(\omega-\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega, \\ y_2[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\Delta}^{-\omega_0+\Delta}\frac{1}{2}H(e^{j\omega})S(e^{j(\omega+\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega, \end{aligned}$$

es evidente que $y[n]=y_1[n]+y_2[n]$. Por lo tanto, basta analizar en detalle la primera integral, ya que la segunda se puede derivar de manera similar. En primer lugar, conviene introducir un cambio de variables $\omega=\sigma+\omega_0$, de modo que $d\omega=d\sigma$, y entonces

$$y_1[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{1}{2}H(e^{j(\omega_0+\sigma)})S(e^{j\sigma})e^{j\omega_0 n}e^{j\sigma n}d\sigma. \tag{3.23}$$

Como $\Delta \ll \omega_0$, $H(e^{j(\omega_0+\sigma)})=\left|H(e^{j\omega_0+\sigma})\right|e^{j\arg[H(e^{j(\omega_0+\sigma)})]}$ se puede aproximar utilizando series de Taylor como

$$\left|H(e^{j\omega_0+\sigma})\right| \approx \left|H(e^{j\omega_0})\right|+\frac{\partial}{\partial\omega}\{\left|H(e^{j\omega})\right|\}\Big|_{\omega=\omega_0}\sigma, \tag{3.24}$$

$$\arg[H(e^{j(\omega_0+\sigma)})] \approx \arg[H(e^{j\omega_0})]+\frac{\partial}{\partial\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\}\Big|_{\omega=\omega_0}\sigma, \tag{3.25}$$

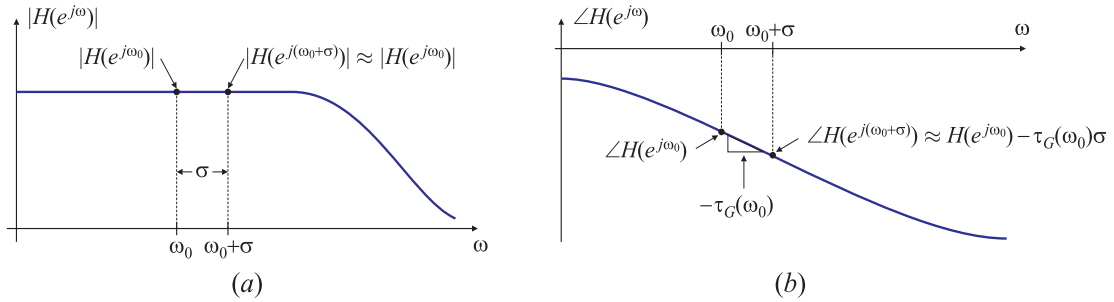


Fig. 3.13. Aproximación de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ en $H(e^{j(\omega_0+\sigma)})$.

como se muestra en la Fig. 3.13(a) y Fig. 3.13(b) , respectivamente. Nuevamente, como el ancho de banda de $S(e^{j\omega})$ o de $X(e^{j\omega})$ es mucho más estrecho que el de $H(e^{j\omega})$, es razonable suponer que

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\{\left|H(e^{j\omega})\right|\}\Big|_{\omega=\omega_0} \approx 0.$$

Sin embargo, esto no es necesariamente cierto para la variación de la fase, que puede ser significativa. Se define el *retardo de grupo* como la variación negativa de la fase de $H(e^{j\omega})$ en función de la frecuencia ω,

$$\tau_G(\omega) = -\frac{\partial}{\partial\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\},$$

lo que permite expresar (3.25) como

$$\arg[H(e^{j(\omega_0+\sigma)})] \approx \arg[H(e^{j\omega_0})] - \tau_G(\omega_0)\sigma, \tag{3.26}$$

y entonces, de (3.24) y (3.26) se tiene que

$$H(e^{j(\omega_0+\sigma)}) \approx \left|H(e^{j\omega_0})\right| e^{j\{\arg[H(e^{j\omega_0})]-\tau_G(\omega_0)\sigma\}}. \tag{3.27}$$

En consecuencia, la salida $y_1[n]$ dada por la ecuación (3.23) se puede escribir como

$$y_1[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{1}{2}\left|H(e^{j\omega_0})\right| e^{j\arg[H(e^{j\omega_0})]}e^{-j\tau_G(\omega_0)\sigma}S(e^{j\sigma})e^{j\omega_0 n}e^{j\sigma n}d\sigma,$$

y reordenando los términos, resulta

$$y_1[n] = \frac{1}{2}\left|H(e^{j\omega_0})\right| e^{j\arg[H(e^{j\omega_0})]}e^{j\omega_0 n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta}^{\Delta}S(e^{j\sigma})e^{j[n-\tau_G(\omega_0)]\sigma}d\sigma. \tag{3.28}$$

De acuerdo a las propiedades de la TDFT,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta}^{\Delta}S(e^{j\sigma})e^{j[n-\tau_G(\omega_0)]\sigma}d\sigma = s[n-\tau_G(\omega_0)].$$

Por lo tanto (3.28) se puede poner como

$$y_1[n] = \tfrac{1}{2}H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}s[n-\tau_G(\omega_0)], \tag{3.29}$$

y de manera análoga, suponiendo que la respuesta impulsiva $h[n]$ de $H(e^{j\omega})$ es real,

$$y_2[n] = \tfrac{1}{2}H^*(e^{j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}s[n-\tau_G(\omega_0)], \tag{3.30}$$

Finalmente, de (3.29) y (3.30) resulta

$$\begin{aligned} y[n] &= \left|H(e^{j\omega_0})\right| s[n-\tau_G(\omega_0)]\cos\{\omega_0 n + \arg[H(e^{j\omega_0})]\} \\ &= \left|H(e^{j\omega_0})\right| s[n-\tau_G(\omega_0)]\cos\{[\omega_0 - \tau F(\omega_0)]n\}, \end{aligned}$$

donde $\tau_F(\omega) = -\arg[H(e^{j\omega})]/\omega$ es el *retardo de fase* del sistema $H(e^{j\omega})$.

En síntesis, definiendo el

$$\textbf{retardo de grupo} \quad \text{como} \quad \tau_G(\omega) = -\frac{\partial}{\partial\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\},$$

$$\textbf{retardo de fase} \quad \text{como} \quad \tau_F(\omega) = -\frac{1}{\omega}\arg[H(e^{j\omega})],$$

la salida del sistema con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ ante una excitación de banda angosta $x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n)$, donde $s[n]$ es una señal tipo pasabajo, con $S(e^{j\omega}) = 0$ para $|\omega| > \Delta$, y $\Delta \ll \omega_0$ es

$$y[n] = \left|H(e^{j\omega_0})\right| s[n-\tau_G(\omega_0)]\cos\{[\omega_0 - \tau_F(\omega_0)]n\}.$$

Esta ecuación muestra que para una señal $x[n]$ de banda angosta, la fase de $H(e^{j\omega})$ aplica un retardo τ_G (retardo de *grupo*) a la envolvente $s[n]$ de la señal $x[n]$, y un retardo de τ_F (retardo de *fase*) a la portadora $\cos(\omega_0 n)$.

EJEMPLO **3.8. Determinación experimental del retardo de grupo**

En la Fig. 3.14 se muestra la respuesta en frecuencia de un filtro elíptico de cuarto orden con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/4$, con ondulación de 1 dB en la banda de paso, y 40 dB en la banda de rechazo. El filtro se implementa como una cascada de dos secciones de segundo orden

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_{1,0} + b_{1,1}e^{-j\omega} + b_{1,2}e^{-j2\omega}}{a_{1,0} + a_{1,1}e^{-j\omega} + a_{1,2}e^{-j2\omega}} \times \frac{b_{2,0} + b_{2,1}e^{-j\omega} + b_{2,2}e^{-j2\omega}}{a_{2,0} + a_{2,1}e^{-j\omega} + a_{2,2}e^{-j2\omega}},$$

donde

Sección	b_i	a_i
1	$b_{1,0} = +0{,}02636248173504$	$a_{1,0} = +1{,}00000000000000$
	$b_{1,1} = +0{,}01905630958554$	$a_{1,1} = -1{,}37540781597787$
	$b_{1,2} = +0{,}02636248173504$	$a_{1,2} = +0{,}55745202060406$
2	$b_{2,0} = +1{,}00000000000000$	$a_{2,0} = +1{,}00000000000000$
	$b_{2,1} = -0{,}76923432315460$	$a_{2,1} = -1{,}31689024623849$
	$b_{2,2} = +1{,}00000000000000$	$a_{2,2} = +0{,}86140502929003$

A continuación se estudia la respuesta del sistema ante dos excitaciones distintas.

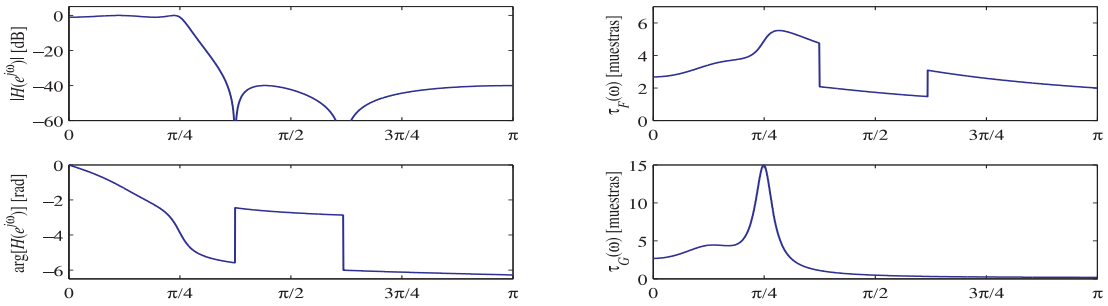


Fig. 3.14. Respuesta en frecuencia de un filtro elíptico de cuarto orden.

- Si el filtro se excita con una señal *senoidal* del tipo $x[n] = A\cos\omega_0 n$, la salida $y[n]$ será

$$\begin{aligned} y[n] &= A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos[\omega_0 n + \angle H(e^{j\omega_0})] \\ &= A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\{\omega_0[n + \angle H(e^{j\omega_0})/\omega_0]\} \\ &= A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\{\omega_0[n - \tau_F(\omega_0)]\} \end{aligned}$$

  A la frecuencia $\omega_0 = \pi/4$, se encuentra que $\left|H(e^{j\omega_0})\right| = 0{,}89125$ y $\arg\{H(e^{j\omega_0})\} = -3{,}86790$ rad (Fig. 3.14), y por lo tanto $\tau_F(\omega_0) = -\arg\{H(e^{j\omega_0})\}/\omega_0 = 4{,}9247$ muestras. En consecuencia, la señal de salida $y[n]$ está dada por

$$y[n] = 0{,}89125A\cos[(\pi/4)(n - 4{,}9247)],$$

  que muestra que hay un retardo de *fase* $\tau_F(\omega_0)$ de casi 5 muestras (en realidad 4,9247 muestras) entre la señal de entrada y la señal de salida.

- Si la excitación se cambia a una señal *modulada* $x[n] = s[n]\cos\omega_0 n$, donde $s[n]$ es una onda triangular, con frecuencia fundamental $\omega_m = 5\pi/400$, la forma de onda de salida será

$$y[n] = s[n - \tau_G(\omega_0)]\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\{\omega_0[n - \tau_F(\omega_0)]\}.$$

  De la Fig. 3.14 se observa que el retardo de *grupo* $\tau_G(\omega)$ a la frecuencia $\omega_0 = \pi/4$ es $\tau_G(\omega_0) = 14{,}91859$ muestras, y por lo tanto,

$$y[n] = 0{,}89125\,s[n - 14{,}9186]\cos[(\pi/4)(n - 4{,}9247)].$$

  En otras palabras, mientras que la portadora $\cos\omega_0 n$ se retarda 5 muestras aproximadamente, la envolvente $r[n]$ de la señal $x[n]$ se demora casi 15 muestras.

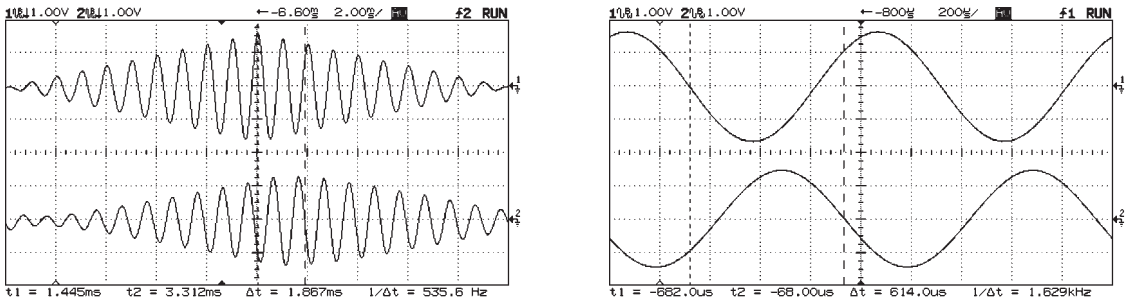
En la Fig. 3.15 se observan las formas de onda de entrada y de salida *experimentales*, obtenidas de implementar el filtro en un sistema de desarrollo basado en el DSP56303 de Motorola. Las señales de entrada y se salida se muestrean a $f_s = 8$ kHz, y por lo tanto los retardos de fase y de grupo expresados en unidades de tiempo, calculados como

$$\tau[\text{unidadesdetiempo}] = \tau[\text{muestras}]/f_s$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo, serán

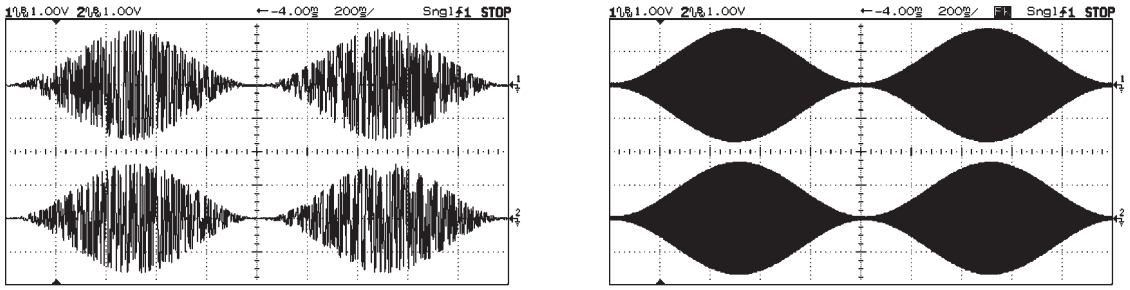
$$\begin{aligned} \tau_F(\omega_0) &= 4{,}9247 \text{ muestras} \equiv 0{,}615 \text{ ms}, \\ \tau_G(\omega_0) &= 14{,}9186 \text{ muestras} \equiv 1{,}864 \text{ ms}. \end{aligned}$$

En la Fig. 3.15(a) se mide el retardo de grupo τ_G, es decir, la demora que sufre la envolvente de la señal al pasar por el filtro, y se aprecia que es muy cercano al valor calculado. En la Fig. 3.15(b) se amplía la zona central de la Fig. 3.15(a), observándose que el retardo de fase τ_F de la portadora, es también similar al valor calculado analíticamente. □



(a) (b)

Fig. 3.15. Retardo de grupo (a) y retardo de fase (b) del filtro elíptico de la Fig. 3.14. Frecuencia de la portadora $\omega_0 = \pi/4$ (1 kHz); frecuencia fundamental de la moduladora $\omega_m = 5\pi/400$ (50 Hz).

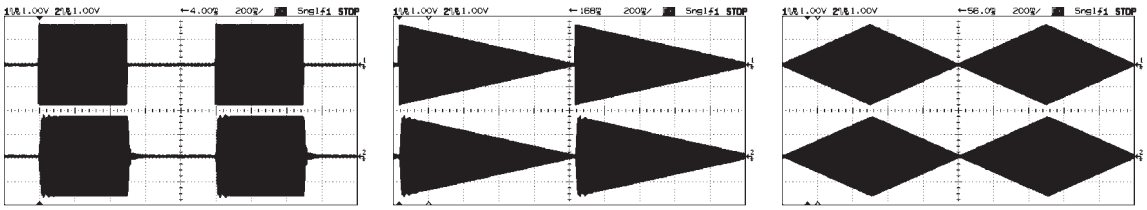


(a) (b)

Fig. 3.16. Medición del retardo de grupo. Señales de entrada y salida graficada en modo normal (a), y en modo "pico a pico" (b).

La medición del retardo de grupo puede ser difícil. Para medir con precisión, se necesita que el ancho de banda de la señal moduladora sea mucho menor que la frecuencia de la portadora, de modo que sean válidas las aproximaciones del módulo y la fase de la respuesta en frecuencia dadas por la ecuación (3.27). Pero esto dificulta la observación de las señales en el osciloscopio, precisamente por la gran diferencia entre ambas frecuencias que puede confundir al sistema de disparo, e impedir la obtención de una imagen estable. Sin embargo, aún cuando logre estabilizarse la imagen, la medición puede ser difícil, como ilustra la Fig. 3.16(a) donde se muestran las señales de entrada y salida del filtro, como se observan normalmente en el osciloscopio. Debido a la diferencia de frecuencias entre la moduladora y la portadora, es difícil elegir un punto de referencia para medir el retardo entre ambas señales. En la Fig. 3.16(b) se muestra la misma señal pero graficada en modo "pico a pico"; esta representación facilita la elección de un punto de referencia.

La Fig. 3.16 indica que para medir el retardo con precisión, también es relevante la forma de onda de la señal moduladora. En la Fig. 3.17 se observan otros tipos de modulaciones: una onda cuadrada [Fig. 3.17(a)], una rampa [Fig. 3.17(b)], y una onda triangular [Fig. 3.17(c)]. Se aprecia que tanto con la onda sinusoidal, con la señal cuadrada o con la rampa es difícil determinar la diferencia de tiempo entre la entrada y la salida, pues la suavidad de la variación de la primera y el transitorio que se observa en la salida de las dos últimas (que, además, no son de ancho de banda limitada) impide elegir una referencia apropiada. Sin embargo, la modulación triangular [Fig. 3.17(c)] parece adecuada para



(a) (b) (c)

Fig. 3.17. Diferentes tipos de señales moduladoras para medir el retardo de grupo: onda cuadrada (a); rampa (b); onda triangular (c).

efectuar la medición. Por ello se utilizó este tipo de modulación en el Ejemplo 3.8.

En los siguientes ejemplos se compara el retardo de grupo calculado analíticamente con el retardo medido para un filtro pasabanda angosto cuyas especificaciones son

Banda de paso:	950 Hz a 1050 Hz
Banda de rechazo:	0 Hz a 900 Hz y 1100 Hz a 4000Hz
Atenuación máxima en la bada de paso (A_p):	1 dB
Atenuación mínima en la banda de rechazo (A_r):	40 dB
Frecuencia de muestreo (F_s)	8000 Hz

En el Ejemplo 3.9 se analiza una implementación tipo IIR, y en el Ejemplo 3.10 una realización tipo FIR.

EJEMPLO **3.9. Medición del retardo de grupo de un filtro IIR**

El filtro se implementa con una aproximación elíptica, que resulta en una función transferencia de orden $N = 8$,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0{,}010 - 0{,}055e^{-j\omega} + 0{,}154e^{-j2\omega} - 0{,}272e^{-j3\omega} + 0{,}326e^{-j4\omega} - 0{,}272e^{-j5\omega} + 0{,}155e^{-j6\omega} - 0{,}055e^{-j7\omega} + 0{,}010e^{-j8\omega}}{1 - 5{,}604e^{-j\omega} + 15{,}702e^{-j2\omega} - 27{,}498e^{-j3\omega} + 32{,}749e^{-j4\omega} - 26{,}995e^{-j5\omega} + 15{,}133e^{-j6\omega} - 5{,}303e^{-j7\omega} + 0{,}929e^{-j8\omega}}$$

La respuesta en frecuencia en módulo y fase se grafica en la Fig. 3.18(a); la Fig. 3.18(b) muestra un detalle de la banda de paso.

El retardo de grupo se midió utilizando una señal moduladora con forma de onda triangular, y frecuencia fundamental de 1 Hz, variando la frecuencia de la portadora se varió en pasos de 5 Hz entre 950 y 1050 Hz, como se resume en la tabla siguiente.

		retardo de grupo		
frecuencia		calculado		medido
Hz	rad	muestras	ms	ms
950	0.2375π	279.9	34.98	30
955	0.2387π	171.7	21.46	19
960	0.2400π	101.5	12.68	15
965	0.2412π	87.8	10.97	11
970	0.2425π	89.9	11.23	11
975	0.2437π	91.5	11.44	11
980	0.2450π	85.7	10.71	11
985	0.2463π	74.8	9.35	9
990	0.2475π	64.6	8.07	8
995	0.2488π	58.3	7.28	7
1000	0.2500π	56.7	7.08	7

		retardo de grupo		
frecuencia		calculado		medido
Hz	rad	muestras	ms	ms
1005	0.2512π	59.6	7.46	7
1010	0.2525π	66.9	8.36	8
1015	0.2537π	76.9	9.61	10
1020	0.2550π	85.5	10.69	11
1025	0.2563π	88.0	11.01	11
1030	0.2575π	84.8	10.59	10
1035	0.2587π	83.7	10.45	10
1040	0.2600π	99.7	12.46	12
1045	0.2612π	168.5	21.07	21
1050	0.2625π	258.7	32.34	32
—	—	—	—	—

En la Fig. 3.19 se muestran las mediciones correspondientes a las frecuencias de portadora $f_p = 950$ Hz, 1000 Hz y 1050 Hz, mientras que en la Fig.3.20 se grafica el retardo de grupo calculado con

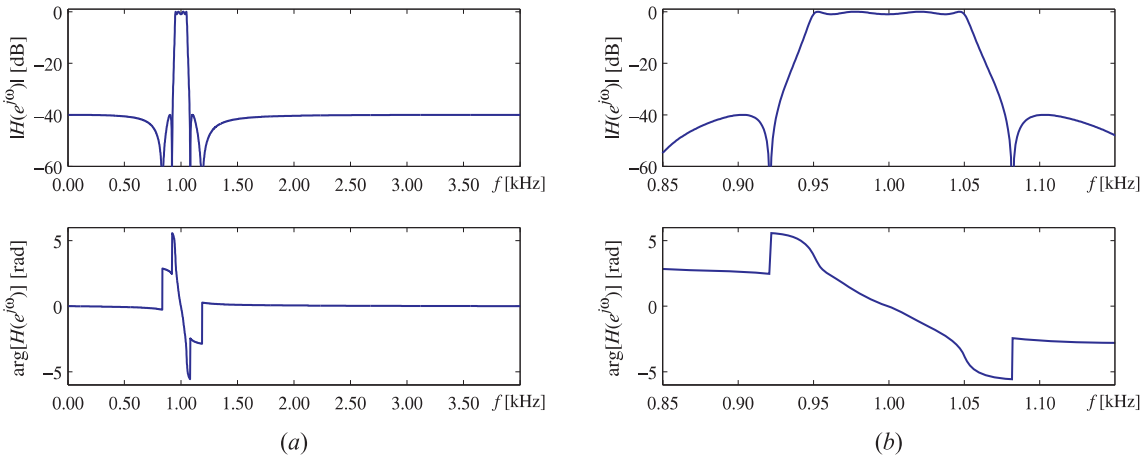


Fig. 3.18. Respuesta en frecuencia del filtro IIR del Ejemplo 3.9: en la banda de Nyquist (a); detalle de la banda de paso (b).

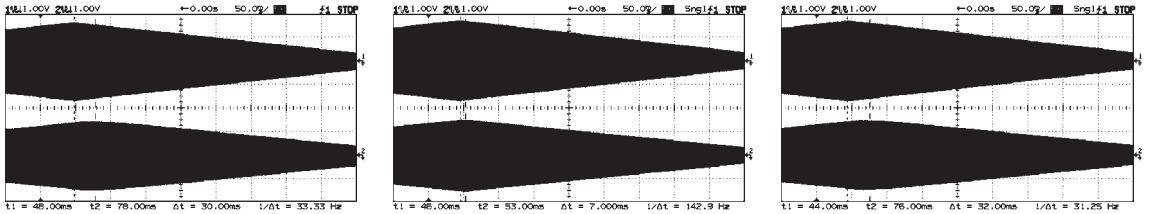


Fig. 3.19. Medidas del retardo de grupo del filtro IIR del Ejemplo 3.9.

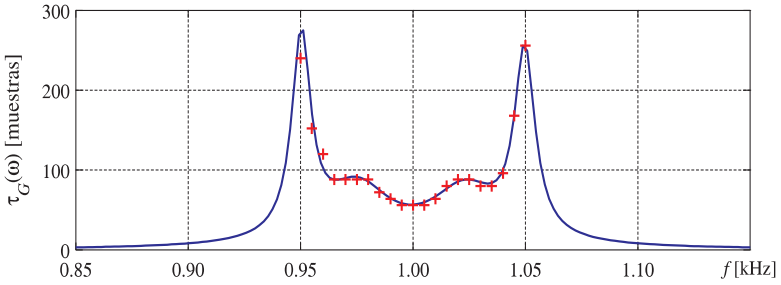


Fig. 3.20. Retardo de grupo calculado (—) y medido (+) para el filtro IIR del Ejemplo 3.9.

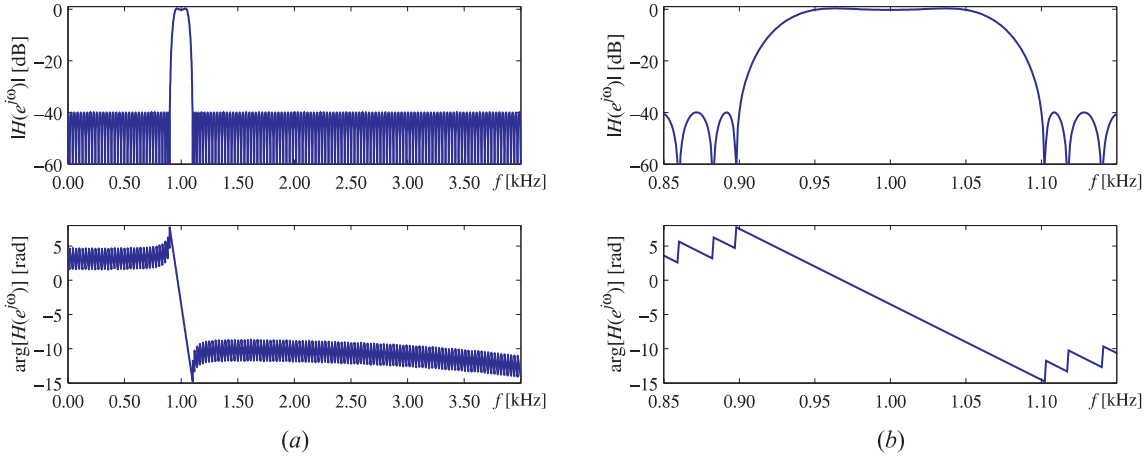


Fig. 3.21. Respuesta en frecuencia del filtro FIR del Ejemplo 3.10: en la banda de Nyquist (a); detalle de la banda de paso (b).

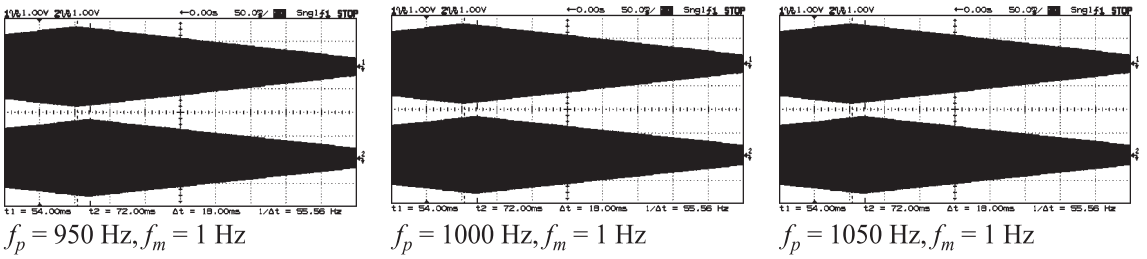


Fig. 3.22. Medidas del retardo de grupo del filtro FIR del Ejemplo 3.10.

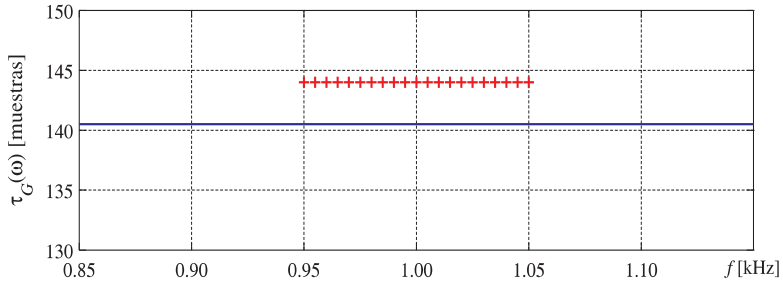


Fig. 3.23. Retardo de grupo calculado (—) y medido (+) para el filtro FIR del Ejemplo 3.10.

MATLAB a partir de la función de sistema, junto con los valores medidos (indicados con "+") observándose que no es constante en función de la frecuencia. □

EJEMPLO **3.10. Medición del retardo de grupo de un filtro FIR**

El filtro se implementa utilizando un algoritmo óptimo, que resulta en una función transferencia de orden $N = 282$. La respuesta en frecuencia en módulo y fase se grafica en la Fig. 3.21(a); un detalle de la banda de paso se muestra en la Fig. 3.21(b). La frecuencia de la portadora se varió en pasos de 5 Hz entre 950 y 1050 Hz; la medida del retardo de grupo a tres frecuencias diferentes se muestra en la Fig. 3.22, utilizando una onda moduladora triangular, y período de 1 s. Como la respuesta en fase es lineal, el retardo de grupo resulta constante en función de la frecuencia, y es $\tau_G = 141$ muestras, como se observa en la Fig. 3.23. En la misma figura se muestra el valor del retardo medido en distintas frecuencias. Se aprecia una ligera diferencia con el valor calculado, que se atribuye a la poca precisión que tiene la medida efectuada con el osciloscopio. □

3.5. Aplicaciones de la TFTD

Aunque más adelante se verán herramientas más poderosas (por ejemplo la transformada $\mathcal{Z}$) la TFTD es útil para resolver sistemáticamente una serie de problemas:

- Hallar la TFTD de señales complejas a partir de las transformadas conocidas de señales más simples (calcular la transformada usando tablas)
- Calcular la TFTD inversa.
- Encontrar la respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante en el tiempo expresado como ecuación a diferencias
- Determinar la respuesta impulsiva a partir de la respuesta en frecuencia de filtros ideales.

A continuación se desarrollan algunos ejemplos de estas aplicaciones. En todos los ejemplos se suponen conocidos los siguientes pares transformados:

$$\begin{aligned} x[n] = \delta[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = 1 \\ x[n] = a^n u[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

y las siguientes propiedades

$$\begin{array}{lcl} \text{Desplazamiento temporal:} & x[n-n_0] & \Longleftrightarrow \quad e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega}) \\ \text{Convolución:} & x[n] * y[n] & \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \\ \text{Derivación frecuencial:} & nx[n] & \Longleftrightarrow \quad j\dfrac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) \\ \text{Convolución frecuencial:} & x[n] \times y[n] & \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) \end{array}$$

donde la convolución frecuencial del último renglón debe entenderse como la convolución periódica, es decir

$$X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j(\omega-\theta)})Y(e^{j\theta})d\theta$$

3.5.1. Cálculo de la TFTD

EJEMPLO **3.11. Determinación de la TFTD de la sucesión** $x[n] = 2(0{,}8)^{n+3}u[n-2]$
Notando que

$$\begin{aligned} x[n] &= 2(0{,}8)^{n+3}u[n-2] \\ &= 2(0{,}8)^5(0{,}8)^{n-2}u[n-2] \\ &= 2(0{,}8)^5 x_1[n-2], \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde

$$x_1[n] = (0{,}8)^n u[n].$$

De acuerdo a la tabla de transformadas,

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-0{,}8e^{-j\omega}}, \tag{3.32}$$

y de la tabla de propiedades,

$$X(e^{j\omega}) = 2(0{,}8)^5 e^{-j2\omega} X_1(e^{j\omega}). \tag{3.33}$$

Finalmente, de (3.32) y (3.33) resulta

$$X(e^{j\omega}) = 2(0{,}8)^5 \frac{e^{-j2\omega}}{1-0{,}8e^{-j\omega}}. \tag{3.34}$$

Para comparar la ventaja de esta manera de calcular las transformadas, se computa la TFTD de (3.31) a partir de la definición. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{2(0{,}8)^{n+3}u[n-2]\}e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} 2(0{,}8)^{n+3}e^{-j\omega n}. \end{aligned}$$

Se efectúa el cambio de variable $n = m+2$, de modo que

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=2}^{\infty} 2(0{,}8)^{n+3}e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{\infty} 2(0{,}8)^{(m+2)+3}e^{-j\omega(m+2)} \\ &= 2(0{,}8)^5 e^{-j2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} (0{,}8)^m e^{-j\omega m} \\ &= 2(0{,}8)^5 \frac{e^{-j2\omega}}{1-0{,}8e^{-j\omega}}. \end{aligned}$$

que coincide con (3.34). □

EJEMPLO **3.12. Cálculo de la TFTD de la sucesión** $x[n] = n(0{,}5)^n u[n]$.
La presencia del factor n sugiere aplicar la propiedad de derivación frecuencial. Se define entonces $x[n] = nx_1[n]$, donde $x_1[n] = (0{,}5)^n u[n]$. De la tabla de transformadas se encuentra que $X_1(e^{j\omega}) = (1-0{,}5e^{-j\omega})^{-1}$, y por lo tanto

$$X(e^{j\omega}) = j\frac{d}{d\omega}X_1(e^{j\omega}) = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-0{,}5e^{-j\omega}}\right) = -j\frac{-0{,}5e^{-j\omega}(-j)}{(1-0{,}5e^{-j\omega})^2} = \frac{0{,}5e^{-j\omega}}{(1-0{,}5e^{-j\omega})^2} \qquad \square$$

EJEMPLO **3.13. Cómputo de la TDFT de** $x[n] = (n+2)(-0{,}7)^{n-1}u[n-2]$
La sucesión $x[n]$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x[n] &= (n+2)(-0{,}7)^{n-1}u[n-2] = (-0{,}7)^{-1}[(n-2)+4](-0{,}7)^{n-2}u[n-2] \\ &= (-0{,}7)^{-1}(n-2)(-0{,}7)^{n-2}u[n-2] + (-0{,}7)^{-1}4(-0{,}7)^{n-2}u[n-2] \\ &= (-0{,}7)^{-1}x_2[n-2] + (-0{,}7)^{-1}4x_1[n-2], \end{aligned}$$

donde $x_1[n] = (-0{,}7)^n u[n]$, y $x_2[n] = nx_1[n]$. Aplicando propiedades resulta

$$X(e^{j\omega}) = (-0{,}7)^{-1}e^{-j2\omega}X_2(e^{j\omega}) + (-0{,}7)^{-1}4e^{-j2\omega}X_1(e^{j\omega}).$$

A partir de los resultados de los Ejemplos 3.11 y 3.12 se tiene que

$$\begin{aligned} X_1(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1+0{,}7e^{-j\omega}}, \\ X_2(e^{j\omega}) &= j\frac{d}{d\omega}X_1(e^{j\omega}) = \frac{-0{,}7e^{-j\omega}}{(1+0{,}7e^{-j\omega})^2}, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= (-0{,}7)^{-1}e^{-j2\omega}\frac{-0{,}7e^{-j\omega}}{(1+0{,}7e^{-j\omega})^2} + (-0{,}7)^{-1}4e^{-j2\omega}\frac{1}{1+0{,}7e^{-j\omega}} \\ &= (-0{,}7)^{-1}\left(\frac{-0{,}7e^{-j3\omega} + 4e^{-j2\omega}(1+0{,}7e^{-j\omega})}{(1+0{,}7e^{-j\omega})^2}\right) \\ &= (-0{,}7)^{-1}e^{-j2\omega}\left(\frac{-0{,}7e^{-j\omega} + 4 + 4\cdot 0{,}7e^{-j\omega})}{(1+0{,}7e^{-j\omega})^2}\right) \end{aligned}$$

de donde resulta finalmente

$$X(e^{j\omega}) = \frac{(-0{,}7)^{-1}e^{-j2\omega}(4+2{,}1e^{-j\omega})}{(1+0{,}7e^{-j\omega})^2}$$ □

3.5.2. Cálculo de la TFTD inversa

EJEMPLO **3.14. Cálculo de la sucesión $x[n]$ cuya TFTD es $X(e^{j\omega}) = (1-ae^{-j\omega})^{-2}$.**
La transformada $X(e^{j\omega})$ se puede escribir como el producto de dos transformadas,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2} = X_1(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega}),$$

donde

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}},$$

lo que sugiere aplicar la propiedad de convolución temporal. Se tiene entonces que

$$x[n] = x_1[n] * x_1[n]$$

donde $x_1[n]$ es la transformada inversa de $X_1(e^{j\omega})$. Según la tabla de transformadas, $x_1[n] = a^n u[n]$, y por lo tanto,

$$x[n] = x_1[n] * x_1[n] = \sum_{m=0}^{n} x_1[m]x_1[n-m] = \sum_{m=0}^{n} a^m a^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} a^n \tag{3.35}$$

de donde resulta

$$x[n] = (n+1)a^n u[n]. \tag{3.36}$$

El factor $u[n]$ resulta de observar que la sumatoria del último término de (3.35) no se ejecuta si $n < 0$.

El Ejemplo 3.12 sugiere que esta transformada inversa también podría calcularse aplicando la propiedad de derivación frecuencial. Sabiendo que

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

es la TFTD de $x_1[n] = a^n u[n]$ se tiene que la TFDT de

$$x_2[n] = nx_1[n] = na^n u[n]$$

es

$$X_2(e^{j\omega}) = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right) = \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}.$$

Como

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{a}X_2(e^{j\omega}),$$

resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{a}x_2[n+1] \\ &= \frac{1}{a}(n+1)a^{n+1}u[n+1] \\ &= (n+1)a^n u[n+1]. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Aunque $u[n+1] = 1$ en $n = -1$, el factor $(n+1)$ se anula, de modo que (3.37) se puede escribir

$$x[n] = (n+1)a^n u[n],$$

que coincide con el resultado (3.36) calculado previamente. □

EJEMPLO **3.15. Transformada inversa de una función racional de $e^{-j\omega}$**
Para calcular la transformada inversa de

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-ce^{j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$$

es conveniente escribir $X(e^{j\omega})$ como un desarrollo en fracciones parciales,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1-be^{-j\omega}}.$$

Los valores de A y B se encuentran igualando los numeradores,

$$1 - ce^{j\omega} = A - Abe^{-j\omega} + B - Bae^{-j\omega} = (A+B) + (Ab+Ba)e^{-j\omega},$$

de donde resulta $A + B = 1$, $Ab + Ba = c$. Operando se encuentra que

$$A = \frac{c-a}{b-a}, \qquad B = \frac{b-c}{b-a}.$$

Por lo tanto

$$X(e^{j\omega}) = \left(\frac{c-a}{b-a}\right)\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \left(\frac{b-c}{b-a}\right)\frac{1}{1-be^{-j\omega}}.$$

De la tabla de transformadas se tiene que

$$x[n] = \left(\frac{c-a}{b-a}\right)a^n u[n] + \left(\frac{b-c}{b-a}\right)b^n u[n].$$

□

3.5.3. Cómputo de la respuesta impulsiva a partir de la ecuación a diferencias

EJEMPLO **3.16. Determinación de la respuesta impulsiva de una ecuación a diferencias**
La respuesta impulsiva de la ecuación a diferencias con coeficientes constantes

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1],$$

satisface

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1].$$

Para expresar $h[n]$ en forma cerrada, se calcula la TFTD aplicando propiedades. Resulta entonces

$$H(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega},$$

de donde

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - (1/4)e^{-j\omega}}{1 - (1/2)e^{-j\omega}}.$$

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ queda expresada como una función racional de $e^{-j\omega}$, y la respuesta impulsiva $h[n]$ puede resolverse como en el Ejemplo 3.15. Sin embargo en este caso es más sencillo resolver aplicando propiedades, notando que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\omega}} - \frac{e^{-j\omega}}{4}\frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\omega}}.$$

Se tiene entonces que

$$h[n] = (1/2)^n u[n] - \frac{1}{4}(1/2)^{n-1}u[n-1].$$ □

EJEMPLO **3.17. Determinación de la respuesta impulsiva de una ecuación a diferencias**
La respuesta en frecuencia de la ecuación a diferencias con coeficientes constantes

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 3x[n] + 4x[n-1]$$

se puede calcular aplicando propiedades como

$$Y(e^{j\omega})(1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) = X(e^{j\omega})(3 + 4e^{-j\omega})$$

de donde

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{3 + 4e^{-j\omega}}{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}} = \frac{3 + 4e^{-j\omega}}{(1 + e^{-j\omega})^2}.$$

La respuesta impulsiva se puede calcular tomando en cuenta los resultados de los Ejemplos 3.12 y 3.14. La función transferencia $H(e^{j\omega})$ se puede escribir como

$$H(e^{j\omega}) = (3 + 4e^{-j\omega})X_1(e^{j\omega}), \quad \text{con} \quad X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 + e^{-j\omega})^2}.$$

Resulta entonces que

$$h[n] = 3x_1[n] + 4x_1[n-1],$$

donde $x_1[n]$ es la transformada inversa de $X_1(e^{j\omega})$. De acuerdo a los resultados del Ejemplo 3.14 (con $a = -1$) resulta $x_1[n] = (n+1)(-1)^n u[n]$, y en consecuencia

$$h[n] = 3(n+1)(-1)^n u[n] + 4n(-1)^{n-1}u[n-1].$$

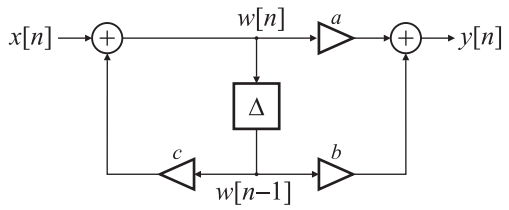


Fig. 3.24. Diagrama bloque del sistema discreto correspondiente al Ejemplo 3.18.

Notando que $4n(-1)^{n-1}u[n-1] = 4n(-1)^{n-1}u[n]$, esta respuesta impulsiva también puede escribirse como

$$\begin{aligned} h[n] &= 3(n+1)(-1)^n u[n] + 4n(-1)^{n-1}u[n] \\ &= 3(n+1)(-1)^n u[n] - 4n(-1)^n u[n] \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$h[n] = (3-n)(-1)^n u[n] \qquad \square$$

EJEMPLO **3.18. Sistemas de ecuaciones a diferencias**
En la Fig. 3.24 se muestra el diagrama bloque de un sistema discreto. La variable de entrada es $x[n]$, la variable de salida es $y[n]$, y $w[n]$ es una variable intermedia. El bloque indicado Δ representa un retardo, por eso si la entrada al bloque es $w[n]$ la salida es $w[n-1]$. Observando el diagrama de la figura, se puede derivar la relación entre $w[n]$ con $x[n]$ y $w[n-1]$, y entre $y[n]$ con $w[n]$ y $w[n-1]$:

$$w[n] = x[n] + c\ w[n-1], \tag{3.38}$$
$$y[n] = a\ w[n] + b\ w[n-1] \tag{3.39}$$

Esta manera de caracterizar el sistema discreto utiliza un *sistema* de ecuaciones a diferencias, en lugar de una única ecuación como ocurre en los Ejemplos 3.16 y 3.17. El sistema se puede expresar en la forma usual despejando $y[n]$ en función de $x[n]$. Esto se puede lograr de dos formas distintas:

- Trabajando en el dominio **temporal**: para encontrar $w[n]$ y $w[n-1]$ en función de $x[n]$ e $y[n]$ las ecuaciones (3.38)-(3.39) se reescriben en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x[n] \\ y[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w[n] \\ w[n-1] \end{pmatrix}$$

de donde resulta

$$w[n] = \frac{1}{b+ac}\left(bx[n] + cy[n]\right).$$

Reemplazando, por ejemplo, en (3.39) se encuentra que

$$\begin{aligned} y[n] &= a\ w[n] + b\ w[n-1] \\ &= \frac{a}{b+ac}\left(bx[n] + cy[n]\right) + \frac{b}{b-ac}\left(bx[n-1] + cy[n-1]\right) \\ &= \frac{ab}{b+ac}x[n] + \frac{ac}{b+ac}y[n] + \frac{b^2}{b+ac}x[n-1] + \frac{bc}{b+ac}y[n-1] \end{aligned}$$

y entonces

$$\left(1 - \frac{ac}{b+ac}\right) y[n] = \frac{ab}{b+ac}x[n] + \frac{b^2}{b+ac}x[n-1] + \frac{bc}{b+ac}y[n-1]$$

es decir

$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cy[n-1]$$

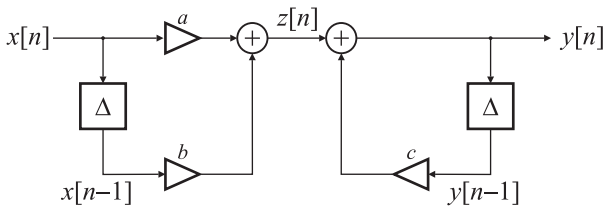


Fig. 3.25. Diagrama bloque alternativo del sistema discreto correspondiente al Ejemplo 3.18.

- Trabajando en el dominio **frecuencial**: en este caso, esto resulta mucho más sencillo. Expresando la TFTD de las ecuaciones (3.38) y (3.39), se tiene que

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + ce^{-j\omega}W(e^{j\omega}), \tag{3.40}$$
$$Y(e^{j\omega}) = aW(e^{j\omega}) + be^{-j\omega}W(e^{j\omega}). \tag{3.41}$$

  De (3.40) resulta que

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ce^{-j\omega}}X(e^{j\omega})$$

  y reemplazando en (3.41),

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{a}{1-ce^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \frac{be^{-j\omega}}{1-ce^{-j\omega}}X(e^{j\omega})$$

  que se puede escribir como

$$Y(e^{j\omega}) - ce^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = aX(e^{j\omega}) + be^{-j\omega}X(e^{j\omega}).$$

  Finalmente, basta antitransformar para obtener

$$y[n] - cy[n-1] = ax[n] + bx[n-1].$$

  que es la misma expresión que se obtuvo trabajando en el dominio tiempo.

Esta ecuación a diferencias se puede representar con el diagrama en bloques de la Fig. 3.25. □

Es interesante comparar los diagramas bloques de las Figs. 3.24 y 3.25. Aunque ambos representan el sistema con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{a+be^{-j\omega}}{1-ce^{-j\omega}}$$

la *implementación* de ambos sistemas es diferente: en el primer caso es necesario resolver dos ecuaciones a diferencias para calcular cada muestra de la salida $y[n]$,

$$w[n] = x[n] + cw[n-1],$$
$$y[n] = aw[n] + bw[n-1],$$

mientras que en el segundo sólo hace falta resolver una única ecuación:

$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cy[n-1].$$

Los bloques Δ están asociados a lugares de memoria donde es necesario almacenar la muestra pasada de $w[n]$ o de $x[n]$ e $y[n]$: la implementación de la Fig. 3.25 necesita el doble de memoria que la de la Fig. 3.24.

Si bien la respuesta en frecuencia de ambas implementaciones es la misma, en casos prácticos donde los coeficientes a, b, c, y/o las operaciones aritméticas se representen con precisión finita, las respuestas de una u otra pueden ser bastante diferentes, sobre todo para sistemas de ecuaciones a diferencias de alto orden.

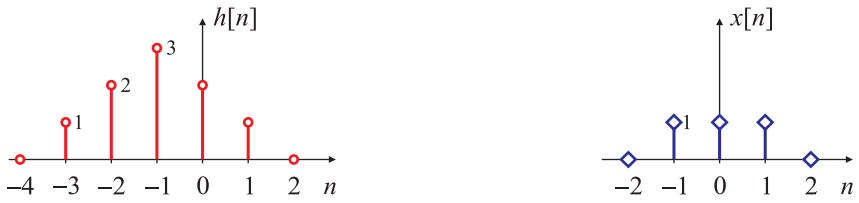


Fig. 3.26. Señales a convolucionar en el Ejemplo 3.19.

3.5.4. Cálculo de la convolución en el dominio frecuencial

EJEMPLO **3.19. Cálculo de la convolución de dos sucesiones**
Si bien la convolución $y[n]$ de dos sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ puede calcularse por definición,

$$y[n] = \sum_m x[m]h[n-m] = \sum_m x[n-m]h[m],$$

en el caso en que las sucesiones sean de longitud finita el cálculo debe realizarse en varias etapas, considerando el solapamiento nulo, parcial a derecha o a izquierda, y total de ambas señales. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1], \\ h[n] &= \delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1], \end{aligned}$$

como se muestra en la Fig. 3.26, se encuentra que:

$$\begin{aligned} n < -4 &\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = 0 \\ -4 \le n \le -2 &\Rightarrow y[n] = \sum_{m=-3}^{n+1} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-3}^{n+1} h[m] \\ -2 \le n \le 0 &\Rightarrow y[n] = \sum_{m=n-1}^{n+1} x[n-m]h[m] = \sum_{m=n-1}^{n+1} h[m] \\ 0 \le n \le 2 &\Rightarrow y[n] = \sum_{m=n-1}^{1} x[n-m]h[m] = \sum_{m=n-1}^{1} h[m] \\ 2 < n &\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = 0 \end{aligned}$$

El resultado de la convolución en cada etapa es

$$\begin{aligned} n < -4 &\Rightarrow y[n] = 0 \\ -4 \le n \le -2 &\Rightarrow y[-4] = \sum_{m=-3}^{-4+1} h[m] = h[-3] = 1 \\ & \quad y[-3] = \sum_{m=-3}^{-3+1} h[m] = h[-3] + h[-2] = 3 \\ & \quad y[-2] = \sum_{m=-3}^{-2+1} h[m] = h[-3] + h[-2] + h[-1] = 6 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-2 \leq n \leq 0 \quad \Rightarrow \quad y[-2] &= \sum_{m=-2-1}^{-2+1} h[m] = h[-3] + h[-2] + h[-1] = 6 \\
y[-1] &= \sum_{m=-1-1}^{-1+1} h[m] = h[-2] + h[-1] + h[-0] = 7 \\
y[0] &= \sum_{m=0-1}^{0+1} h[m] = h[-1] + h[0] + h[1] = 6 \\
0 \leq n \leq 2 \quad \Rightarrow \quad y[0] &= \sum_{m=0-1}^{1} h[m] = h[-1] + h[0] + h[1] = 6] \\
y[1] &= \sum_{m=1-1}^{1} h[m] = h[0] + h[1] = 3] \\
y[2] &= \sum_{m=2-1}^{1} h[m] = h[1] = 1] \\
2 < n \quad \Rightarrow \quad y[n] &= 0
\end{aligned}
$$

que se puede sintetizar como

$$y[n] = \delta[n+4] + 3\delta[n+3] + 6\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 6\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

El cálculo punto a punto para $-7 \leq n \leq 4$ se ilustra en la Fig. 3.27. En estas ocasiones puede ser más conveniente aplicar el teorema de convolución temporal. Según el teorema,

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \Longleftrightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}).$$

Para este ejemplo, $X(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$ se calculan aplicando propiedades:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}, \\
H(e^{j\omega}) &= 1e^{j3\omega} + 2e^{j2\omega} + 3e^{j\omega} + 2e^{j0\omega} + 1e^{-j\omega}.
\end{aligned}
$$

Resulta entonces

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \\
&= e^{j4\omega} + 2e^{j3\omega} + 3e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 1 \\
&\quad + e^{j3\omega} + 2e^{j2\omega} + 3e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega} \\
&\quad + e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}
\end{aligned}
$$

de modo que

$$Y(e^{j\omega}) = e^{j4\omega} + 3e^{j3\omega} + 6e^{j2\omega} + 7e^{j\omega} + 6 + 3e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}.$$

Finalmente, aplicando la propiedad de desplazamiento se calcula fácilmente la transformada inversa

$$y[n] = \delta[n+4] + 3\delta[n+3] + 6\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 6\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

El cálculo de la convolución usando esta técnica evita tener que definir los intervalos de la variable n en cada etapa, y resulta mucho más sencillo que aplicar la definición. □

En algunos casos, donde algunas de las sucesiones es "corta", el calculo de la convolucion por definición o gráficamente puede ser más conveniente, como se muestra en el siguiente ejemplo.

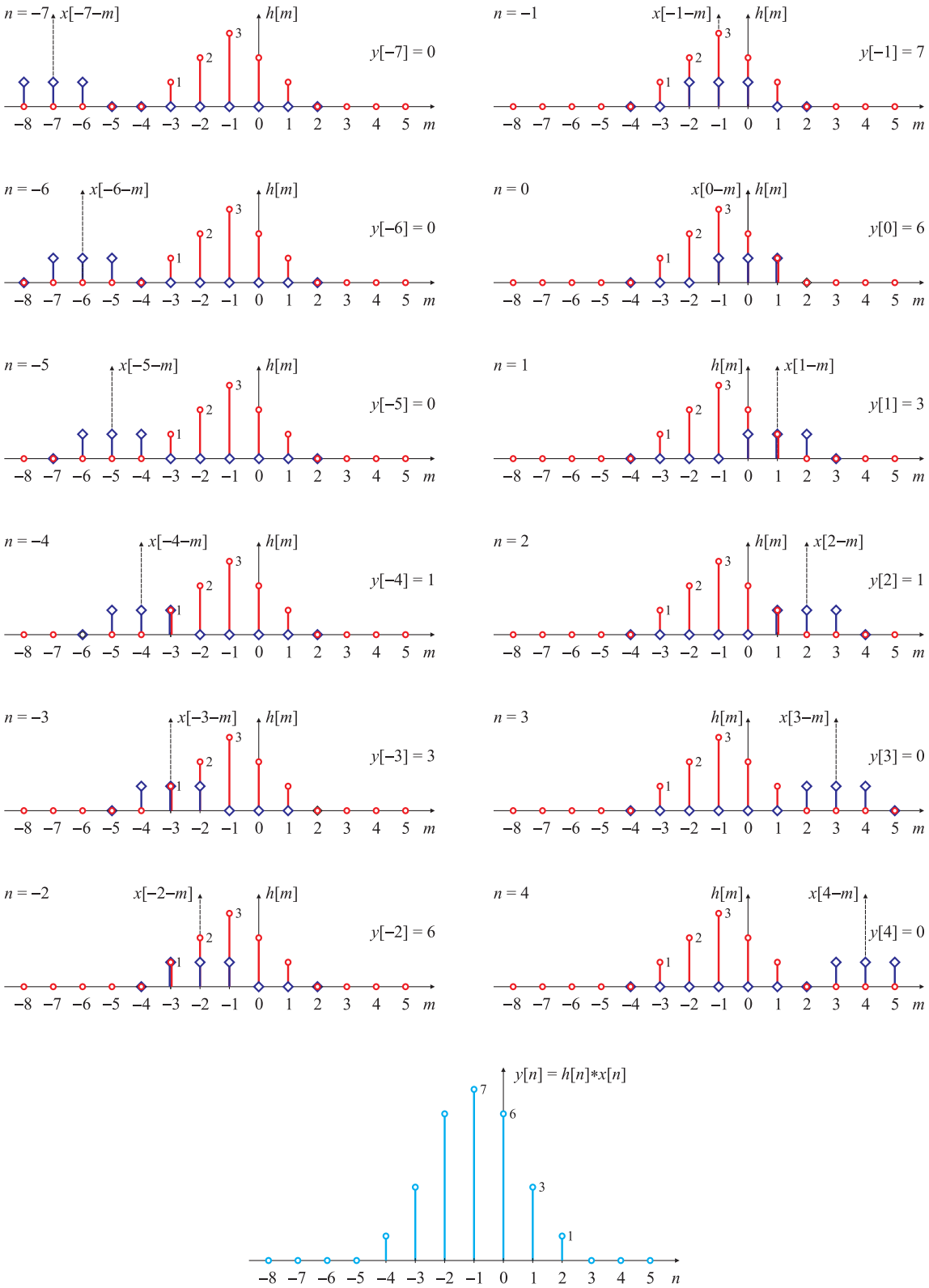


Fig. 3.27. Cálculo gráfico de la convolución de las sucesiones del Ejemplo 3.19.

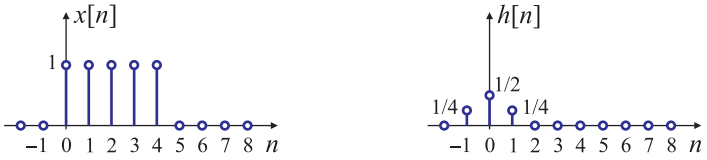


Fig. 3.28. Señal de entrada y respuesta impulsiva del sistema del Ejemplo 3.20.

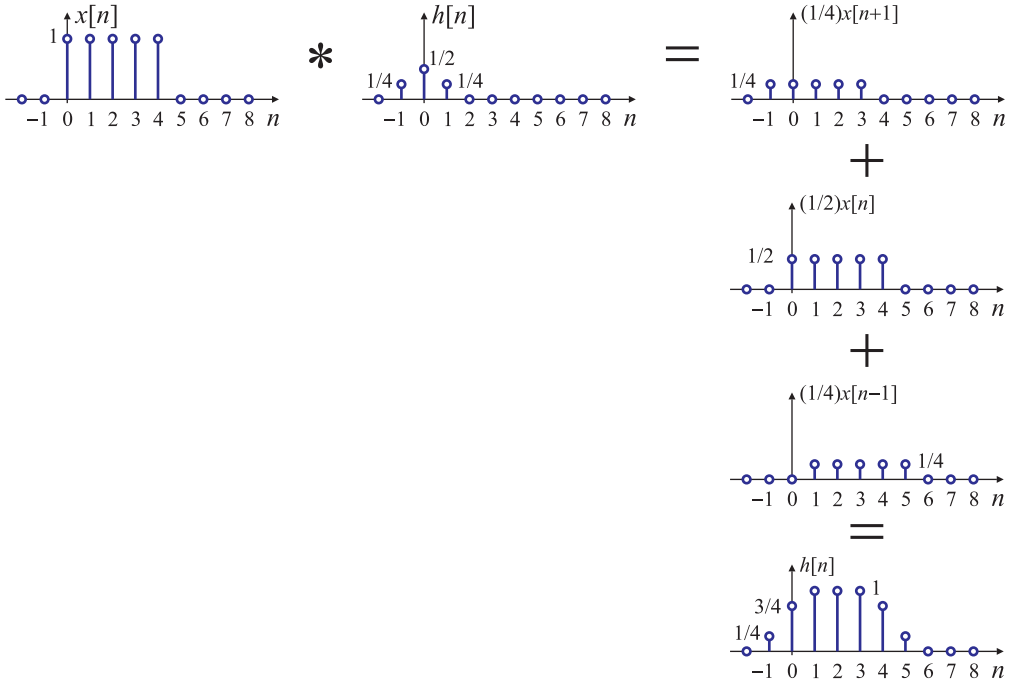


Fig. 3.29. Cálculo gráfico de la convolución de las señales de Ejemplo 3.20.

EJEMPLO **3.20. Cálculo de la convolución de dos sucesiones**
Se desea calcular la salida $y[n]$ de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n] = (1/4)\delta[n+1] + (1/2)\delta[n] + (1/4)\delta[n-1]$ cuando la entrada es $x[n] = u[n] - u[n-5]$ (Fig. 3.28). La salida $y[n]$ se calcula como la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$; esto es

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k].$$

El cálculo puede realizarse aplicando la suma convolución, y como las dos señales son de longitud finita, se deben reconocer las cinco etapas (sin solapamiento a izquierda, solapamiento parcial por izquierda, solapamiento total, solapamiento parcial por derecha, y sin solapamiento a la derecha) y ajustar los índices de la sumatoria para cada caso. Sin embargo, como la respuesta impulsiva tiene sólo tres muestras, $h[n] = (1/4)\delta[n+1] + (1/2)\delta[n] + (1/4)\delta[n-1]$, es más sencillo para este ejercicio efectuar la convolución término a término:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * \left(\tfrac{1}{4}\delta[n+1] + \tfrac{1}{2}\delta[n] + \tfrac{1}{4}\delta[n-1]\right) \\ &= \tfrac{1}{4}x[n+1] + \tfrac{1}{2}x[n] + \tfrac{1}{4}x[n-1] \\ &= \tfrac{1}{4}\delta[n+1] + \tfrac{3}{4}\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \tfrac{3}{4}\delta[n-4] + \tfrac{1}{4}\delta[n-5]. \end{aligned}$$

El cálculo se representa gráficamente en la Fig. 3.29. □

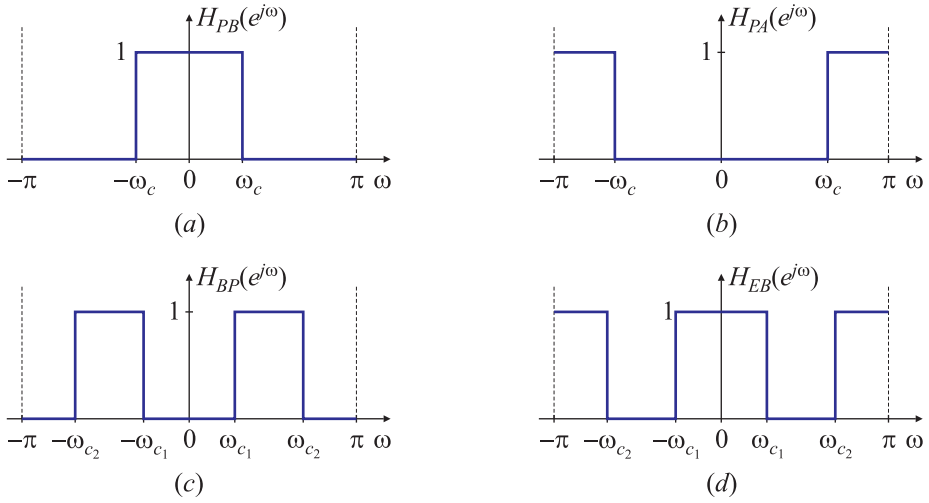


Fig. 3.30. Respuesta en frecuencia de filtros ideales: pasabajos (a); pasaaltos (b); pasabanda (c); eliminabanda (d).

3.5.5. Determinación de la respuesta impulsiva de filtros ideales

En la Fig. 3.30 se grafican las respuestas en frecuencia de los cuatro filtros ideales típicos: pasaaltos [Fig. 3.30(a)], pasaaltos [Fig. 3.30(b)], pasabanda [Fig. 3.30(c)] y eliminabanda [Fig. 3.30(d)]. La respuesta impulsiva de cada uno de estos filtros se puede calcular aplicando la TFTD inversa,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

Por ejemplo, para el filtro pasabajos se encuentra que, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} h_{PB}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{PB}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jn}(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}\omega_c n \\ &= \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left[\pi\left(\frac{\omega_c}{\pi}\right)n\right]}{\pi\left(\frac{\omega_c}{\pi}\right)n} = \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right). \end{aligned}$$

Para el caso en que $n = 0$ se tiene

$$h_{PB}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{PB}(e^{j0})e^{j0n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi},$$

de manera que la respuesta impulsiva del filtro pasabajos puede escribirse como

$$\boxed{h_{PB}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right), \quad -\infty < n < \infty.} \tag{3.42}$$

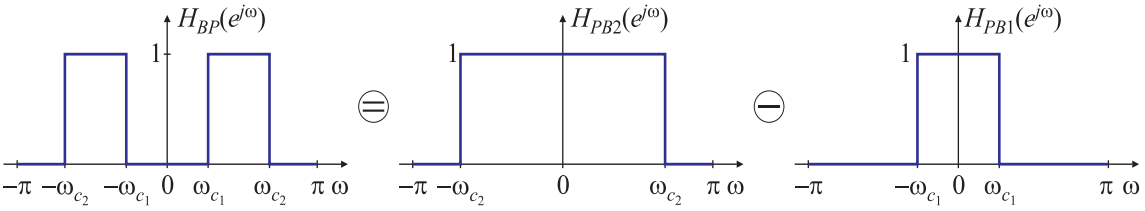


Fig. 3.31. Respuesta en frecuencia del filtro pasabanda como la diferencia entre las respuestas de dos filtros pasabajos.

De la misma manera puede calcularse la respuesta en frecuencia de los demás filtros ideales. Para el caso del pasaaltos, si $n \neq 0$

$$\begin{aligned} h_{PA}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{PA}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega n}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jn}(e^{-j\omega_c n} - e^{-j\pi n} + e^{j\pi n} - e^{j\omega_c n}) = \frac{1}{2\pi jn}(e^{-j\omega_c n} - e^{j\omega_c n}) \\ &= -\frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}\omega_c n = -\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left[\pi\left(\frac{\omega_c}{\pi}\right)n\right]}{\pi\left(\frac{\omega_c}{\pi}\right)n}, \end{aligned}$$

mientras que si $n = 0$,

$$\begin{aligned} h_{PA}[0] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{PA}(e^{j0})e^{j0n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_c} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\pi} d\omega = \frac{1}{2\pi}(-\omega_c + \pi + \pi - \omega_c) \\ &= \frac{1}{2\pi}(2\pi - 2\omega_c) = 1 - \frac{\omega_c}{\pi}. \end{aligned}$$

La respuesta impulsiva para todo n puede escribirse de manera más compacta como

$$\boxed{h_{PA}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right), \quad -\infty < n < \infty.} \tag{3.43}$$

La derivación de esta respuesta impulsiva puede simplificarse observando la relación entre el filtro pasabajos y el pasaaltos, y aplicando propiedades de la TFTD. La respuesta en frecuencia del filtro pasaaltos puede escribirse en función de la respuesta en frecuencia del pasabajos como

$$H_{PA}(e^{j\omega}) = 1 - H_{PB}(e^{j\omega}),$$

como sugieren la Fig. 3.30(a) y la Fig. 3.30(b) . Aplicando la TFTD inversa a esta expresión se observa que

$$h_{PA}[n] = \delta[n] - h_{PB}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right), \quad -\infty < n < \infty,$$

que coincide con (3.43). Esta forma de derivar la respuesta impulsiva es mucho más sencilla y con menos posibilidad de error que el cálculo a partir de la transformada inversa de $H_{PA}(e^{j\omega})$.

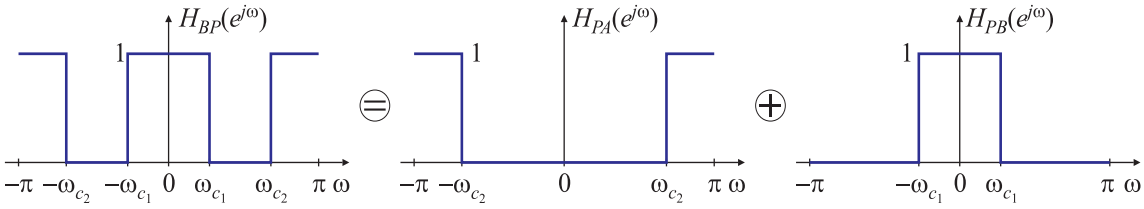


Fig. 3.32. Respuesta en frecuencia del filtro eliminabanda como la suma de las respuestas de un filtro pasaaltos y un pasabajos.

La misma idea puede aplicarse para calcular las respuestas impulsivas de los filtros pasabanda y eliminabanda. Para el caso del filtro pasabanda [Fig. 3.30(c)], su respuesta en frecuencia puede escribirse como la diferencia entre la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos con frecuencia de corte ω_{c_2} y otro con frecuencia de corte ω_{c_1}, como se muestra en la Fig. 3.31:

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = H_{PB2}(e^{j\omega}) - H_{PB1}(e^{j\omega}).$$

La respuesta impulsiva se obtiene entonces combinando las respuestas impulsivas del tipo (3.42)

$$\boxed{h_{BP}[n] = \frac{\omega_{c_2}}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_{c_2}}{\pi}n\right) - \frac{\omega_{c_1}}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_{c_1}}{\pi}n\right), \quad -\infty < n < \infty.} \tag{3.44}$$

La respuesta en frecuencia del filtro eliminabanda [Fig. 3.30(d)] puede escribirse como la suma de las respuestas de un filtro pasabajos con frecuencia de corte ω_{c_1} y la de un pasaaltos con frecuencia de corte ω_{c_2} como se representa en la Fig. 3.32:

$$H_{EB}(e^{j\omega}) = H_{PA}(e^{j\omega}) + H_{PB}(e^{j\omega}).$$

La respuesta impulsiva es entonces la combinación de (3.42) y (3.43)

$$\boxed{h_{BP}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_{c_2}}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_{c_2}}{\pi}n\right) + \frac{\omega_{c_1}}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_{c_1}}{\pi}n\right), \quad -\infty < n < \infty.} \tag{3.45}$$

3.6. Implementación de filtros ideales

"Implementar" un filtro es encontrar una ecuación a diferencias que permita calcular su salida en el instante actual $y[n]$ en función de la entrada actual $x[n]$ y las entradas y salidas pasadas, $x[n-1], x[n-2], \ldots, x[n-M], y[n-1], y[n-2], \ldots, y[n-N]$. La forma general de la ecuación a diferencias es

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$$

y su función transferencia está dada por

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b_0 + b_1 e^{-jw} + \cdots + b_M e^{-jM\omega}}{1 + a_1 e^{-jw} + \cdots + a_N e^{-jN\omega}} = \sum_{k=1}^{M-N} B_k e^{-jk\omega} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{(1 - p_k e^{-j\omega})}$$

que, como se verá más adelante, también puede escribirse como

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{M-N} B_k e^{-jk\omega} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{(1 - p_k e^{-j\omega})},$$

donde $p_k \in \mathbb{C}$ es una constante, de manera que su respuesta impulsiva es de la forma

$$h[n] = \sum_{k=1}^{M-N} B_k \delta[n-k] + \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u[n]. \tag{3.46}$$

Esta es una forma muy general, y comprende también el caso de los sistemas FIR, cuando $A_k = 0$ para todo k.

Si se quiere implementar con ecuaciones a diferencias alguno de los filtros ideales cuyas respuestas impulsivas $h_i[n]$ se calcularon en la sección anterior, se observa que cualquiera de los filtros (3.42) a (3.45) no pueden llevarse a la forma de la ecuación (3.46), porque la respuesta impulsiva de esos filtros está formada por combinaciones de "sinc", mientras que la respuesta impulsiva de los filtros implementados con ecuaciones a diferencia está formada por términos exponenciales de la forma $p_k^n u[n]$. En otras palabras, n*o se puede implementar un filtro ideal utilizando una ecuación a diferencias*.

Entonces, ¿cómo se puede implementar un filtro que se parezca "lo más posible" a un filtro ideal?

Una solución sencilla es *truncar* la respuesta impulsiva $h_i[n]$ del filtro ideal. Como los términos de $h_i[n]$ decaen según $1/|n|$, uno esperaría que tomando un número suficiente de términos la respuesta del filtro ideal y la respuesta del filtro truncado no sean demasiado diferentes. Se define entonces la respuesta impulsiva del filtro truncado $h_T[n]$ como

$$h_T[n] = \begin{cases} h_i[n], & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{3.47}$$

donde $h_i[n]$ es la respuesta impulsiva de alguno de los filtros ideales, dada por las ecuaciones (3.42), (3.43), (3.44) o (3.45). Una manera cómoda de indicar el proceso de truncación es definiendo una función auxiliar, denominada *ventana temporal*, indicada $w[n]$ y definida como

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De esta forma, la respuesta impulsiva del filtro truncado $h_T[n]$ puede escribirse en función de la respuesta impulsiva del filtro ideal $h_i[n]$ y de la ventana $w[n]$ como

$$h_T[n] = h_i[n] \times w[n].$$

La respuesta en frecuencia del filtro truncado se puede calcular como

$$\begin{aligned} H_T(e^{j\omega}) &= \sum_n h_T[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^{M} h_T[n] e^{-j\omega n} = h_T[0] + \sum_{n=1}^{M} h_T[n](e^{-j\omega n} + e^{j\omega n}) \\ &= h_T[0] + 2\sum_{n=1}^{M} h_T[n] \cos(\omega n). \end{aligned} \tag{3.48}$$

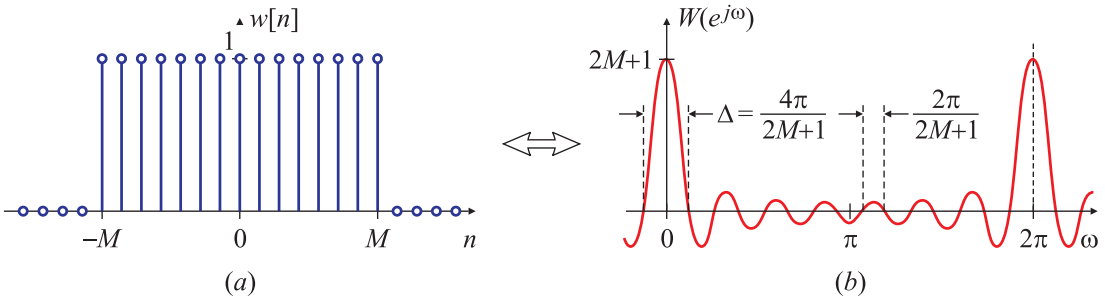


Fig. 3.33. Ventana rectangular: respuesta temporal (a) y frecuencial (b).

Para obtener el resultado final se aprovechó la simetría de las respuestas impulsivas de los filtros ideales, $h_i[n] = h_i[-n]$, dadas por las ecuaciones (3.42) a (3.45) en el anteúltimo paso.

Aunque la expresión de $H_T(e^{j\omega})$ dada por la ecuación (3.48) es correcta, no permite visualizar fácilmente cómo se altera la respuesta en frecuencia del filtro ideal cuando se trunca su respuesta impulsiva.

Otra manera de calcular la respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ del filtro con respuesta impulsiva truncada es aplicando el teorema de convolución (periódica) frecuencial, que relaciona esta respuesta con la respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ del filtro ideal, y la respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ de la ventana temporal:

$$H_T(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_i(e^{j(\omega-\theta)})W(e^{j\theta})d\theta. \tag{3.49}$$

Aunque la expresión de la convolución que aparece en (3.49) es la convolución periódica, y no la convolución lineal estudiada en el Capítulo 2, el proceso de cálculo es similar, y permite intuir cómo resulta la respuesta en frecuencia buscada. En definitiva, para conocer cómo se altera la respuesta de la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada es necesario conocer más en detalle la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular.

3.6.1. Características de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular

La respuesta en frecuencia de la ventana temporal es

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \sum_n w[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^{M} e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\omega(m+M)} \\ &= e^{-j\omega M}\sum_{m=0}^{2M} e^{-j\omega m} = e^{-j\omega M}\frac{1-e^{-j(2M+1)\omega}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\omega M}\frac{e^{-j(2M+1)\omega/2}\left(e^{j(2M+1)\omega/2}-e^{-j(2M+1)\omega/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2M+1}{2}\omega\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned} \tag{3.50}$$

que tiene la forma del núcleo de Dirichlet estudiado en el Capítulo 2. La representación temporal de $w[n]$ y de su respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ se muestran en la Fig. 3.33 para

Tabla 3.1: Variación del área de los lóbulos laterales en función de M.

	número de lóbulo lateral						
M	1	2	3	4	5	6	7
5	118,174	−14,2307	8,9013	−6,9040	6,0455	−5,7987	6,0455
10	117,974	−13,9219	8,3603	−6,0857	4,8729	−4,1415	3,6728
15	117,933	−13,8600	8,2555	−5,9356	4,6737	−3,8881	3,3585
20	117,918	−13,8376	8,2179	−5,8823	4,6042	−3,8016	3,2538
25	117,911	−13,8271	8,2003	−5,8575	4,5719	−3,7616	3,2060
30	117,907	−13,8213	8,1906	−5,8438	4,5543	−3,7399	3,1801
35	1179,05	−13,8177	8,1847	−5,8356	4,5436	−3,7268	3,1645
40	117,903	−13,8154	8,1809	−5,8302	4,5367	−3,7183	3,1543
45	117,902	−13,8139	8,1782	−5,8265	4,5319	−3,7124	3,1474
50	117,901	−13,8127	8,1763	−5,8238	4,5285	−3,7082	3,1424

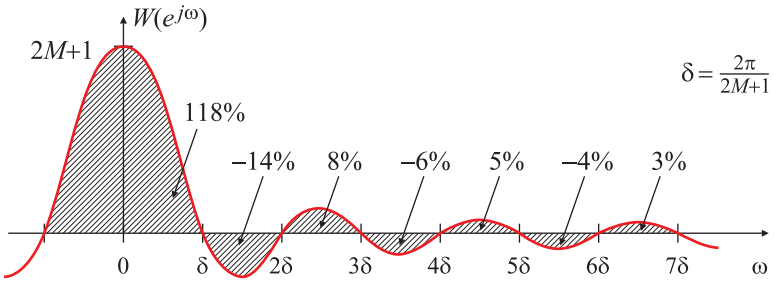


Fig. 3.34. Área de los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular.

$M = 7$. Algunas características destacables de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular son:

- La respuesta en frecuencia tiene $2M + 1$ ceros en el intervalo $0 \leq \omega < 2\pi$, como se desprende de (3.50). En $\omega = 0$ se cancelan simultáneamente el numerador y denominador; aplicando la regla de L'Hôpital, se encuentra que $W(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = 2M + 1$.

- El área cubierta por un período de la respuesta en frecuencia es 2π. Esto se puede demostrar a partir de la transformada inversa de la TDFT

$$w[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

de donde sale inmediatamente (haciendo $n = 0$ y despejando) que

$$\int_0^{2\pi} W(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi w[0] = 2\pi \tag{3.51}$$

pues $w[n] = 1$ para $-M \leq n \leq M$.

- Las áreas de cada lóbulo referidas al área total de la ventana, en función del número de términos M de la ventana se detallan en la Tabla 3.1. Se observa que las áreas convergen rápidamente a los valores aproximados indicados en la Fig. **??**.

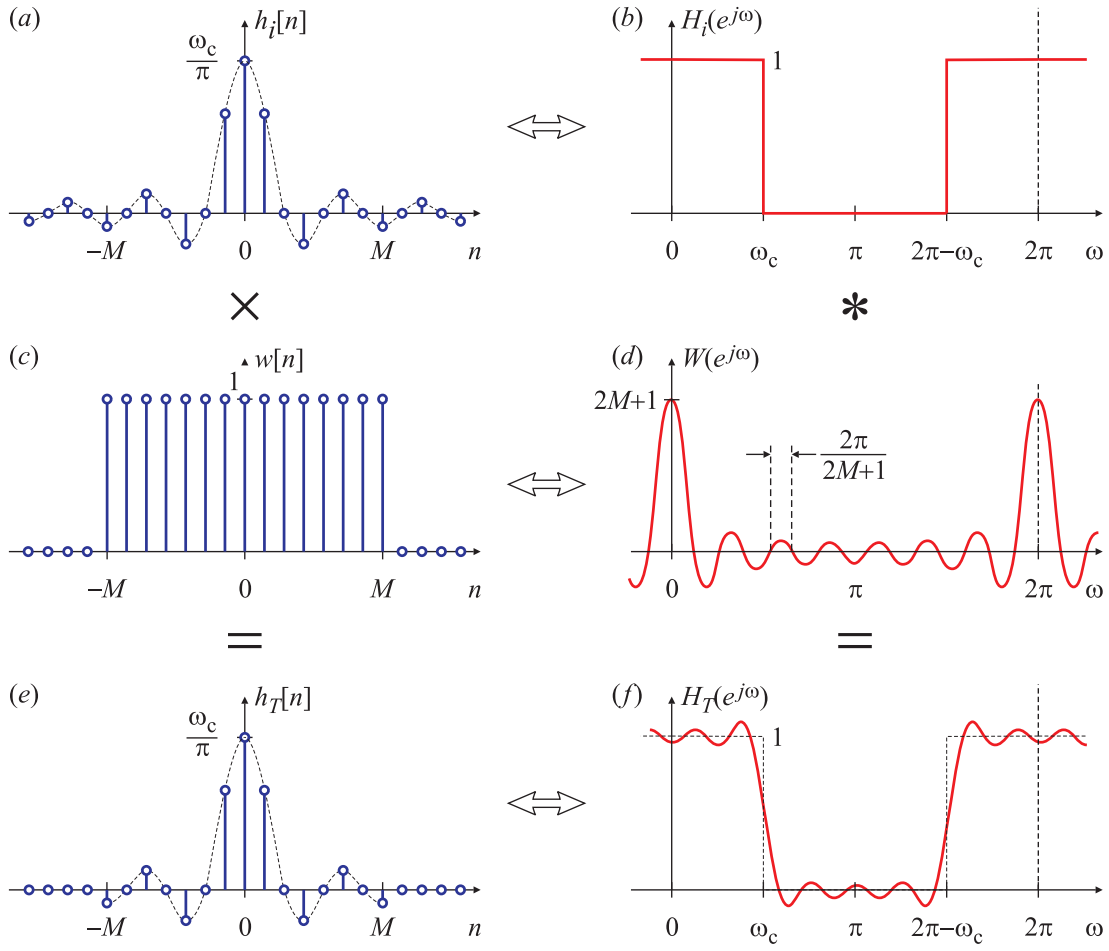


Fig. 3.35. Cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada. Respuesta impulsiva $h_i[n]$ (a) y respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ (b) del filtro ideal; respuesta impulsiva $w[n]$ (c) y respesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ (d) de la ventana rectangular; respuesta impulsiva $h_T[n]$ (e) y respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ (f) del filtro truncado.

- Un parámetro útil es el ancho Δ del lóbulo principal, que como se aprecia en la Fig. 3.33(b), es el doble de la distancia entre ceros, es decir

$$\Delta = \frac{4\pi}{2M+1}.$$

3.6.2. Cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado aplicando el teorema de convolución frecuencial

Conociendo la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, y aplicando el teorema de convolución (periódica) frecuencial, el cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada es directo, y se sintetiza en la Fig. 3.35. La respuesta impulsiva $h_i[n]$ y la respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ del filtro ideal se representan en las Figs. 3.35(a) y (b), mientras que la respuesta temporal $w[n]$ y frecuencial $W(e^{j\omega})$ de la

ventana rectangular se repiten en las Figs. 3.35(c) y (d) . La multiplicación de las respuestas temporales $h_i[n]$ y $w[n]$, que da como resultado la respuesta impulsiva truncada $h_T[n]$, se corresponde con la convolución periódica entre $H_i(e^{j\omega})$ y $W(e^{j\omega})$, como se muestra en las Figs. 3.35(e) y (f) .

El proceso de cálculo de la convolución periódica (en este caso, en el dominio frecuencia) es similar (pero no igual!) al desarrollado en el Capítulo 2 al estudiar el efecto Gibbs. Mientras que en el Capítulo 2 se truncaba el número de armónicas que se utilizaban para reconstruir la señal temporal, en este caso se trunca el número de muestras de la respuesta impulsiva. El efecto de la truncación se manifestaba en la aparición de sobrepicos en la señal *temporal* reconstruida, mientras que ahora estos sobrepicos aparecen en la respuesta en *frecuencia*. Los elementos que se truncan están definidos en un dominio discreto (los coeficientes de la serie de Fourier o las muestras de la respuesta impulsiva) mientras que las señales que se ven alteradas a causa de la truncación están definidas en un dominio continuo (la función periodica o la respuesta en frecuencia, respectivamente). Otra diferencia es que en el caso tratado en el Capítulo 2, la convolución se efectuaba entre una señal periódica (la onda cuadrada) y una señal aperiódica (el sinc); ahora la convolución involucra dos señales periódicas: la respuesta en frecuencia del filtro ideal, que es una onda cuadrada de período 2π, y el núcleo de Dirichlet (o "sinc" periódico), también de período 2π.

Cálculo de la convolución periódica

La integral de convolución periódica (3.49) se puede analizar gráficamente de la misma manera en que fue estudiada la convolución lineal en el Capítulo 2. Hay algunas pequeñas diferencias por el hecho que las dos señales a convolucionar son periódicas (y del mismo período): en general, la convolución lineal (común) entre dos funciones periódicas no está definida: esto significa que puede no converger para algunos valores. Por ejemplo, dada una señal periódica $f(t) = f(t + nT)$, donde T es el período y $n \in \mathbb{Z}$, y que por simplicidad supondremos que es simétrica $f(t) = f(-t)$, la convolución de esta señal con sí misma es

$$g(t) = (f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

y es sencillo ver que esta función no converge para $t = 0$:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)^2 d\tau \to \infty.$$

La expresión de la convolución periódica salva este inconveniente restringiendo el intervalo de integración a un período. En el caso de las respuestas en frecuencia de señales discretas, el período es 2π. Aunque la expresión (3.49) es conveniente, el resultado es el mismo independientemente de dónde se inicie el período de integración. Esto es:

$$(W * H)(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} H(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} H(e^{j(\omega-\theta)}) W(e^{j\theta}) d\theta$$

para cualquier ε real. Por lo tanto, a veces es más conveniente notar

$$(W * H)(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j(\omega-\theta)}) W(e^{j\theta}) d\theta$$

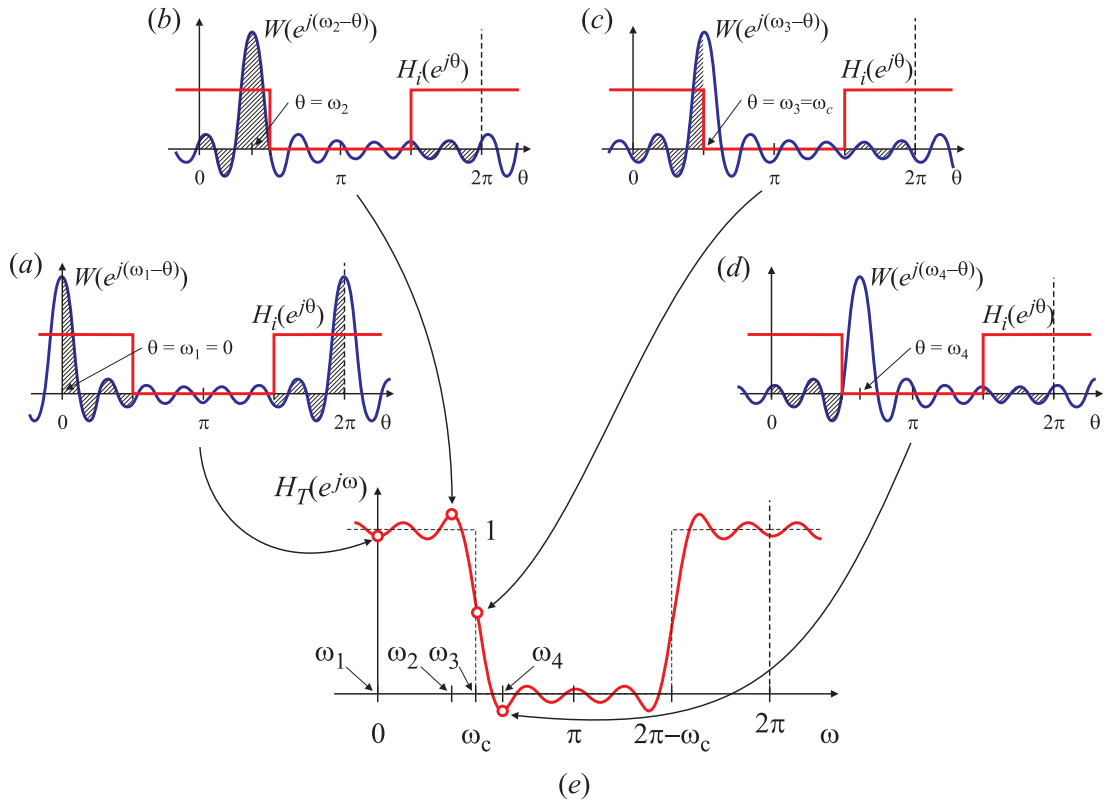


Fig. 3.36. Cálculo gráfico de la convolución periódica.

sobreentendiéndose que la intregral se calcula sobre un período de longitud 2π. Es habitual que el intervalo de integarción sea $[0, 2\pi)$ o $[-\pi, \pi)$.

El procedimiento gráfico del cálculo de la convolución periódica utilizando la expresión

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

se representa en la Fig. 3.36. El cálculo de esta integral supone reflejar $W(e^{j\theta})$ respecto al eje $\theta = 0$ para obtener $W(e^{j(-\theta)})$. Como $W(e^{j\theta})$ es simétrica respecto a θ, $W(e^{-j\theta}) = W(e^{j\theta})$, de manera que no se pueden distinguir en los gráficos de la Fig. 3.36. Esta simetría implica que el valor de la ventana en $\theta = \omega_1$ es igual al valor de la ventana en $\theta = 2\pi - \omega_1$: $W(e^{j\omega_1}) = W(e^{j(2\pi-\omega_1)})$, Además, por la periodicidad en 2π de $W(e^{j\theta})$, resulta que $W(e^{j(\omega_1-\theta)}) = W(e^{j[-(2\pi-\omega_1)-\theta]})$, es decir, desplazar $W(e^{-j\theta})$ en ω_1 unidades hacia la derecha es lo mismo que desplazarla $(2\pi - \omega_1)$ unidades hacia la izquierda.

Para calcular el valor de la convolución periódica en un valor particular $\omega = \omega_1$ se debe desplazar el origen $\theta = 0$ de la respuesta en frecuencia de la ventana hacia este valor particular $\theta = \omega_1$. El caso para $\omega_1 = 0$ se representa en la Fig. 3.36(a) . Las partes sombreadas representan el área de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular multiplicada por la respuesta en frecuencia del filtro ideal que queda comprendida en el intervalo $[0, 2\pi)$; es decir, el área sombreada representa en este caso

$$\int_0^{2\pi} H(e^{j\theta})W(e^{j(-\theta)})d\theta.$$

Esta integral es muy similar al área total de la ventana, pues el único área que se descarta son los pequeños lóbulos comprendidos entre ω_c y $2\pi - \omega_c$, cuya área neta es pequeña por la alternancia de los signos de estos lóbulos. De modo que el valor de la integral es aproximadamente 2π (puede que sea ligeramente mayor o menor), y entonces resulta que

$$H_T(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_1=0} = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} H(e^{j\theta})W(e^{j(-\theta)})d\theta}_{\approx 2\pi} \approx 1,$$

como se muestra en la Fig. 3.36(e) para $\omega = \omega_1$.

En la Fig. 3.36(b) se muestra la evaluación de la integral de convolución para $\omega = \omega_2$. En este valor de frecuencia el área bajo el lóbulo principal contribuye completamente al área total, pero el lóbulo lateral negativo a la derecha del lóbulo principal queda comprendido dentro del rango de frecuencia en donde $H_i(e^{j\theta}) = 0$, y por lo tanto, no contribuye a la reducción del área total, como ocurría en el cálculo para $\omega = \omega_1$. En definitiva, la integral el ligeramente superior a la unidad, y por lo tanto el valor de la convolución también es mayor que 1:

$$H_T(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_2} = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} H(e^{j\theta})W(e^{j(\omega_2-\theta)})d\theta}_{>2\pi} > 1,$$

como se indica en la Fig. 3.36(e) para $\omega = \omega_2$.

Cuando la integral de convolución se calcula para $\omega = \omega_3 = \omega_c$, casi la mitad de $W(e^{j(\omega_3-\theta)})$ queda comprendida dentro del rango de frecuencias donde $H_i(e^{j\theta}) = 0$, como se representa en Fig. 3.36(c) . El área neta es entonces aproximadamente la mitad del área total de la ventana rectangular, de modo que

$$H_T(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_3=\omega_c} = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} H(e^{j\theta})W(e^{j(\omega_2-\theta)})d\theta}_{\approx \pi} \approx \frac{1}{2},$$

como se muestra en la Fig. 3.36(e) para $\omega = \omega_3 = \omega_c$.

Finalmente, en la Fig. 3.36(d) se muestra el cálculo para $\omega = \omega_4$, frecuencia para la cual el lóbulo principal de la ventana rectangular no contribuye al área total de la integral. El área neta es negativa, por efecto del lóbulo lateral negativo a la izquierda del lóbulo principal, como se representa en la Fig. 3.36(e) para $\omega = \omega_4$.

Este análisis cualitativo muestra que el efecto de truncar la respuesta impulsiva en un rango $-M \leq n \leq M$ hace que la respuesta en frecuencia resulte con ondulaciones, cuya frecuencia está dada por el ancho de los lóbulos laterales de la ventana rectangular, y por lo tanto es inversamente proporcional a $2M + 1$ (el largo de la respuesta impulsiva de la ventana temporal). Por otra parte, la altura de las ondulaciones depende solamente del área encerrada bajo la curva de respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, y esta es *independiente de M*, como indica la ecuación (3.51). Lo que sí cambia es la posición de los máximos y mínimos de estas ondulaciones que ocurren aproximadamente en $\omega_c \pm 2\pi/(2M+1)$, como sugieren las Fig. 3.36(b) , (d) , (e). En otras palabras, el incrementar M aumenta la frecuencia de las oscilaciones y desplaza los máximos y mínimos hacia la frecuencia de corte; pero el tamaño de estos sobrepicos es independiente de M. Este comportamiento se verifica en el Ejemplo 3.21.

Estos cálculos aproximados son válidos siempre que el ancho Δ del lóbulo principal de la ventana rectangular sea mucho menor que el ancho de banda de los filtros (que es $2\omega_c$ para el caso de pasabajos). Desde el punto de vista temporal, esto equivale a considerar que M es "grande", es decir, que el filtro con respuesta impulsiva truncada utiliza una cantidad suficientes de términos de la respuesta impulsiva $h_i[n]$ del filtro ideal.

Sea $H_d(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia del filtro que se desea implementar. Como $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ es periódica con período 2π se puede expresar en serie de Fourier

$$H_d\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n},$$

donde los coeficientes de Fourier $h_d[n]$ son precisamente la respuesta impulsiva del sistema, y están dados por

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{3.52}$$

De manera que, dada una especificación de respuesta en frecuencia deseada $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ se puede calcular $h_d[n]$ a partir de (3.52), y determinar la función de sistema $H_d(z)$. En la mayoría de las aplicaciones prácticas la respuesta en frecuencia deseada es contante a tramos con transiciones abruptas entre las bandas, lo que causa que la respuesta impulsiva $h_d[n]$ sea de longitud infinita y no causal.

3.6.3. El filtro causal

Hasta ahora se ha conseguido obtener respuesta impulsiva $h_T[n]$ de longitud finita $2M+1$ dada por la ecuación (3.47). que es adecuada para implementar un filtro FIR. Pero esta respuesta no es causal pues $h_T[n] \neq 0$ para $n < 0$. La forma de obener un filtro causal es desplazando la respuesta impulsiva M muestras hacia la derecha:

$$h_C[n] = h_T[n-M] = \begin{cases} h_i[n-M], & 0 \leq n \leq 2M+1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La respuesta en frecuencia del filtro causal se calcula fácilmente aplicando la propiedad de desplazamiento temporal de la TDFT

$$h_C[n] = h_T[n-M] \quad \Longleftrightarrow \quad H_C(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega}H_T(e^{j\omega}),$$

y teniendo en cuenta (3.48), se encuentra que

$$H_C(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega}\left(h_T[0] + 2\sum_{n=1}^{M} h_T[n]\cos(\omega n)\right). \tag{3.53}$$

El proceso de causalización no altera el módulo de la respuesta en frecuencia, pero sí su fase, como se muestra en la Fig. 3.37. En la Fig. 3.37(a) se representa la respuesta impulsiva del filtro, y en la Fig. 3.37(b) y (c) la respuesta en frecuencia en módulo y en fase. Esta respuesta es la misma de la Fig. 3.35(f), destacando la fase de la respuesta en frecuencia. Los tramos donde la fase vale $(-\pi)$ corresponden a los rangos de frecuencia donde

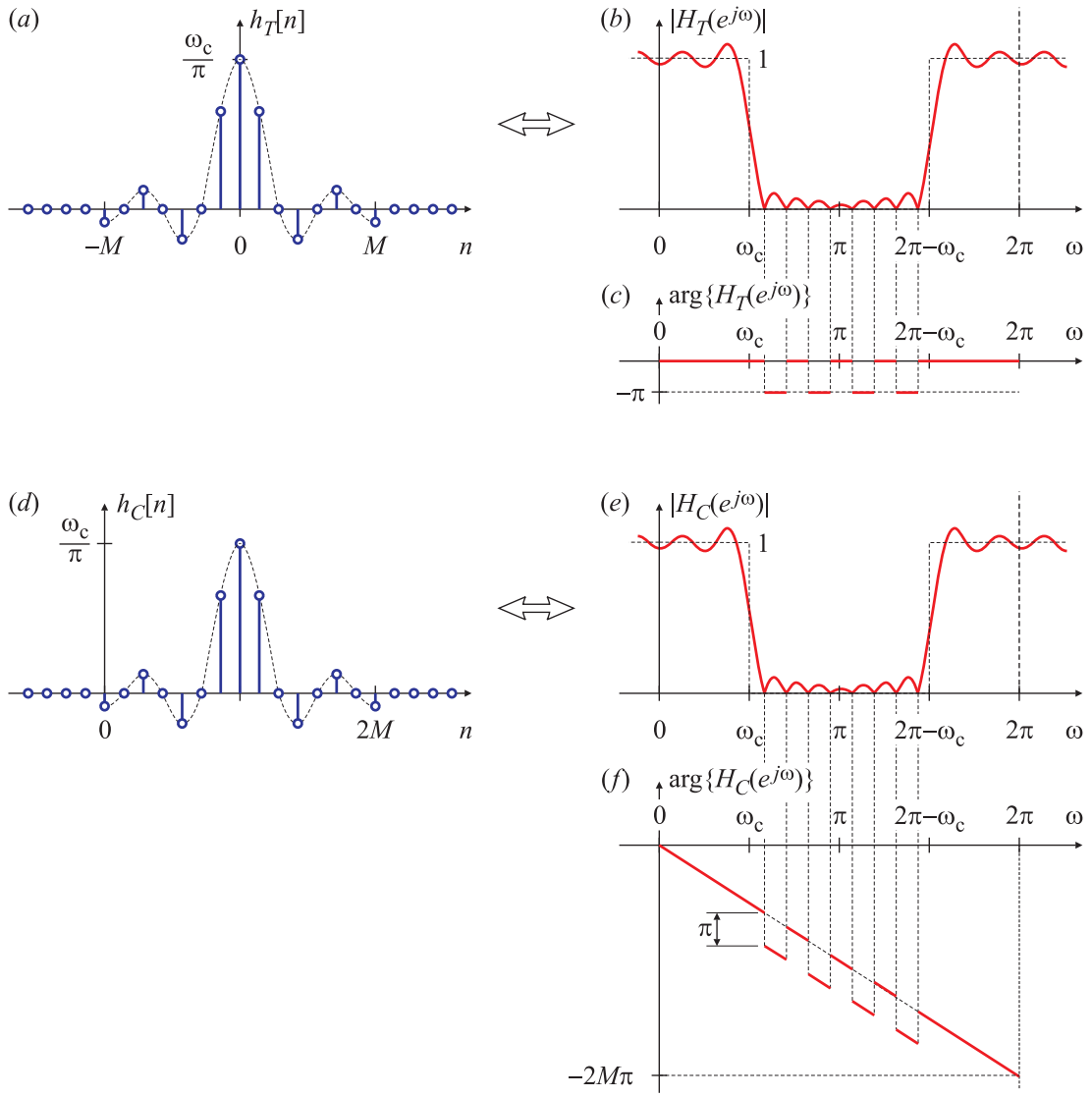


Fig. 3.37. Efectos de causalizar el filtro truncado. Respuesta temporal $h_T[n]$ (a) y frecuencial $H_T(e^{j\omega}$ en módulo (b) y fase (c) del filtro truncado. Respuesta temporal $h_C[n]$ (d) y frecuencial $H_C(e^{j\omega}$ en módulo (e) y fase (f) del filtro truncado causalizado.

$H_T(e^{j\omega})$ es negativo en la Fig. 3.35(f). En la Fig. 3.37(d) se representa la respuesta impulsiva "causalizada", que es la respuesta de la Fig. 3.37(a) pero desplazada M muestras hacia la derecha. El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro causal se representa en la Fig. 3.37(e), que por supuesto es el mismo que la del filtro truncado no causal, Fig. 3.37(e). La que cambia es la fase, que se grafica en la Fig. 3.37(f), donde se tiene en cuenta el desfasaje lineal introducido por el término $e^{-jM\omega}$ en la ecuación (3.53), y los saltos de $(-\pi)$ que tiene la fase del filtro truncado no causal.

EJEMPLO **3.21. Implementacion de un filtro "ideal" causal**
El propósito es diseñar un filtro pasabajos con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/2$. La respuesta en

frecuencia deseada para $-\pi < \omega < \pi$ es

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| < \pi, \end{cases}$$

y se entiende que la respuesta se extiende periódicamente cada 2π. La respuesta impulsiva está dada por la ecuación (3.42), de modo que

$$h_i[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Esta respuesta impulsiva, se representa en la Fig. 3.33(a), se anula para los n pares, de modo que también puede escribirse como

$$h_i[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n \text{ es par}, \\ \frac{2}{|n|\pi}(-1)^{\frac{|n|-1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar}, \end{cases}$$

y algunos de sus valores son:

n	0	±1	±3	±5	±7	±9	±11	±13	±15	$\cdots$
$h_i[n]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$-\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$-\frac{2}{11\pi}$	$\frac{2}{13\pi}$	$-\frac{2}{15\pi}$	$\cdots$

Para implementar el filtro, se elige truncar su respuesta a 15 términos, es decir $M = 7$ muestras a izquierda y derecha de la muestra correspondiente a $n = 0$. La respuesta impulsiva truncada $h_T[n]$ se muestra en la Fig. 3.33(e) o en las Fig. 3.37(a). La respuesta en frecuencia del sistema con respuesta impulsiva truncada es

$$\begin{aligned} H_T(e^{j\omega}) &= \sum_n h_T[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-7}^{7} h_T[n] e^{-j\omega n} \\ &= -\frac{2}{7\pi}e^{j7\omega} + \frac{2}{5\pi}e^{j5\omega} - \frac{2}{3\pi}e^{j3\omega} + \frac{2}{\pi}e^{j\omega} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}e^{-j\omega} - \frac{2}{3\pi}e^{-j3\omega} + \frac{2}{5\pi}e^{-j5\omega} - \frac{2}{7\pi}e^{-j7\omega} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\cos\omega - \frac{4}{3\pi}\cos 3\omega + \frac{4}{5\pi}\cos 5\omega - \frac{4}{7\pi}\cos 7\omega. \end{aligned}$$

Esta respuesta se representa en la Fig. 3.33(f) (o en la Fig. 3.37(b) y (c) en módulo y fase).

Para obtener un sistema causal, la respuesta impulsiva se desplaza $M = 7$ muestras a la derecha, como se indica en la Fig. 3.37(c). La respuesta en frecuencia es

$$\begin{aligned} H_C(e^{j\omega}) &= e^{-j7\omega} H_T(e^{j\omega}) \\ &= e^{-j7\omega}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\cos\omega - \frac{4}{3\pi}\cos 3\omega + \frac{4}{5\pi}\cos 5\omega - \frac{4}{7\pi}\cos 7\omega\right) \end{aligned}$$

y su módulo y fase se grafican en la Fig. 3.37(d) y (e), respectivamente. El máximo de la respuesta en frecuencia en la banda de paso es $H_C(e^{j\omega})_{\text{máx},P} = 1{,}0921$ (0,76 dB) y se alcanza en $\omega_{\text{máx},P} = 0{,}375\pi$. El mayor sobrepico de la banda de rechazo –que corresponde al mínimo de $H_T(e^{j\omega})$– es $H_C(e^{j\omega})_{\text{máx},R} = 0{,}0921$ ($-20{,}71$ dB) y se alcanza en $\omega_{\text{máx},R} = 0{,}625\pi$. Tal como fuera explicado en el análisis cualitativo de la integral de convolución, tanto el sobrepico positivo como el sobrepico negativo tienen la misma magnitud (0,0921 en este caso) porque representan las áreas que se suman o se dejan de sumar al hacer la convolución. Además estos sobrepicos aparecen aproximadamente

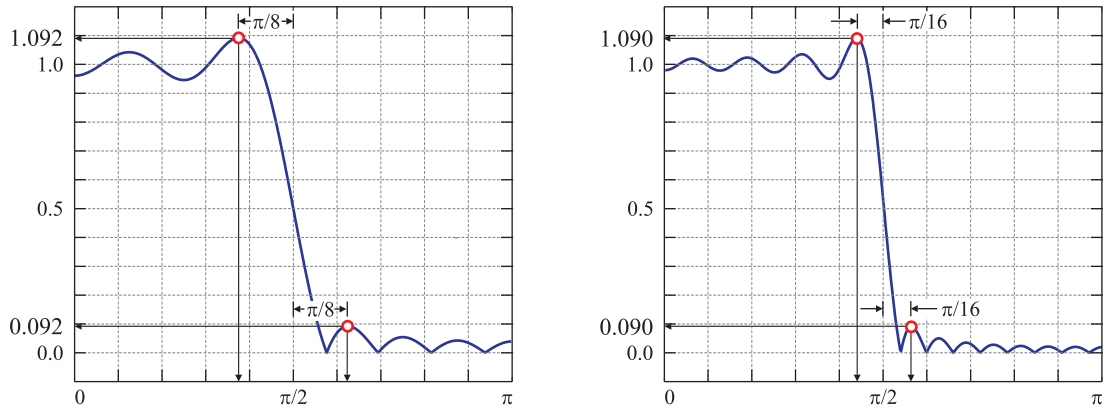


Fig. 3.38. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado para $M = 7$ (a), y para $M = 15$ (b).

a $\pm 2\pi/(2M+1) = \pm(2/15)\pi = \pm 0{,}133\pi$ de la frecuencia de corte ω_c (en realidad, ocurren en $\omega_c \pm 0{,}125\pi$). Estos extremos se detallan en la Fig. 3.38(a).

Si se aumenta el largo del filtro, por ejemplo truncando las muestras de la respuesta impulsiva ideal $h_i[n]$ que están más alla de $M = 15$ muestras a izquierda y derecha de la muestra correspondiente a $n = 0$, se obtiene un filtro FIR de $2M + 1 = 31$ muestras de longitud. La respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada es

$$\begin{aligned} H_T(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\cos\omega - \frac{4}{3\pi}\cos 3\omega + \frac{4}{5\pi}\cos 5\omega - \frac{4}{7\pi}\cos 7\omega + \\ &\quad \frac{4}{9\pi}\cos 9\omega - \frac{4}{11\pi}\cos 11\omega + \frac{4}{13\pi}\cos 13\omega - \frac{4}{15\pi}\cos 15\omega. \end{aligned}$$

Para causalizar el sistema se debe desplazar la respuesta impulsiva $M = 15$ muestras hacia la derecha, resultando en la respuesta en frecuencia del sistema causal

$$\begin{aligned} H_C(e^{j\omega}) &= e^{-j15\omega}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\cos\omega - \frac{4}{3\pi}\cos 3\omega + \frac{4}{5\pi}\cos 5\omega - \frac{4}{7\pi}\cos 7\omega + \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{9\pi}\cos 9\omega - \frac{4}{11\pi}\cos 11\omega + \frac{4}{13\pi}\cos 13\omega - \frac{4}{15\pi}\cos 15\omega\right). \end{aligned}$$

El máximo de la respuesta en frecuencia de la banda de paso alcanza el valor $H_C(e^{j\omega})_{\text{máx},P} = 1{,}0901$ (0,75 dB) en $\omega_{\text{máx},P} = 0{,}4375\pi$, mientras que el máximo de la respuesta en frecuencia en la banda de rechazo toma el valor $H_C(e^{j\omega})_{\text{máx},R} = 0{,}0901$ ($-20{,}9$ dB) y se alcanza en $\omega_{\text{máx},R} = 0{,}5625\pi$. Nuevamente, el valor de los desvíos en la banda de paso y en la banda de rechazo son iguales, y se producen aproximadamente en $\omega_c \pm 2\pi/(2M+1) = \omega_c \pm 0{,}064516\pi$ (el lugar exacto donde ocurren es en $\omega_c \pm 0{,}0625\pi$). Estos valores están indicados en la Fig. 3.38(b). □

La Fig. 3.38 muestra que los valores de los sobrepicos en la banda de paso y en la banda de rechazo para los FIR de 15 y 31 muestras de longitud ($M = 7$ o $M = 15$) son prácticamente iguales. En la Fig. 3.39(a) se muestran las respuestas en frecuencias para filtros de diferente longitud, observandose que el valor del máximo sobrepico, tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo, es prácticamente el mismo. Estos valores se resumen en la Tabla 3.2 donde se indica el valor del máximo sobrepico en la banda de paso

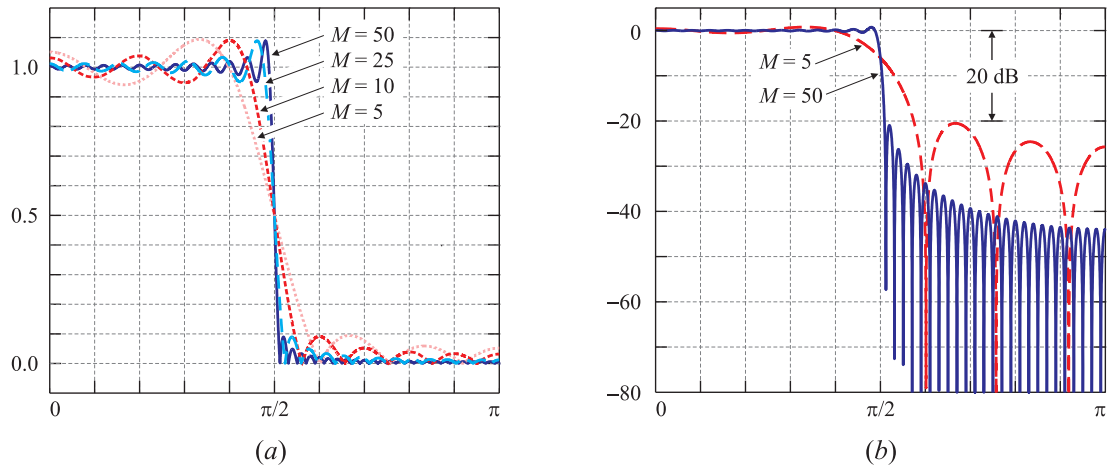


Fig. 3.39. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado en escala lineal (a) y en dB (b) para distintos valores de M.

Tabla 3.2: Magintud y ubicación de los sobrepicos en la banda de paso de filtros truncados de diferente longitud.

M	$\omega_{\text{máx},P}$	$\hat{\omega}_{\text{máx},P}$	$\Delta\omega\,\%$	$\left\lvert H(e^{j\omega})\right\rvert_{\text{máx},P}$
5	$0{,}3334\pi$	$0{,}3182\pi$	$-4{,}5571$	1,0942
10	$0{,}4000\pi$	$0{,}4048\pi$	1,1843	1,0912
25	$0{,}4615\pi$	$0{,}4608\pi$	$-0{,}1654$	1,0897
50	$0{,}4800\pi$	$0{,}4802\pi$	0,0453	1,0896
75	$0{,}4868\pi$	$0{,}4868\pi$	$-0{,}0126$	1,0895
100	$0{,}4900\pi$	$0{,}4900\pi$	0,0121	1,0895
150	$0{,}4933\pi$	$0{,}4934\pi$	0,0141	1,0895

$\left\lvert H(e^{j\omega})\right\rvert_{\text{máx},P}$, la frecuencia exacta $\omega_{\text{máx},P}$, y la estimación de la frecuencia $\hat{\omega}_{\text{máx},P}$ donde aparece el sobrepico, dada por

$$\hat{\omega}_{\text{máx},P} = \omega_c - \frac{2\pi}{2M+1},$$

y el error relativo porcentual entre ellas,

$$\Delta\omega\,\% = 100\frac{\hat{\omega}_{\text{máx},P} - \omega_{\text{máx},P}}{\omega_{\text{máx},P}}.$$

La tabla permite apreciar que efectivamente el valor del sobrepico es independiente de la longitud de la respuesta impulsiva, y que tiende a un valor constante cercano al 9 %. Por otra parte, la estimación de la frecuencia donde ocurre el sobrepico mejora a medida que aumenta M, y el error de estima que se alcanza es despreciable para la mayoría de las aplicaciones.

Las respuestas en frecuencia para $M = 5$ y para $M = 50$ se muestran en la Fig. 3.39(b) graficadas en dB. Se observa que el valor del sobrepico en la banda de paso no afecta demasiado el desempeño del filtro, pero el valor del sobrepico en la banda de rechazo limita

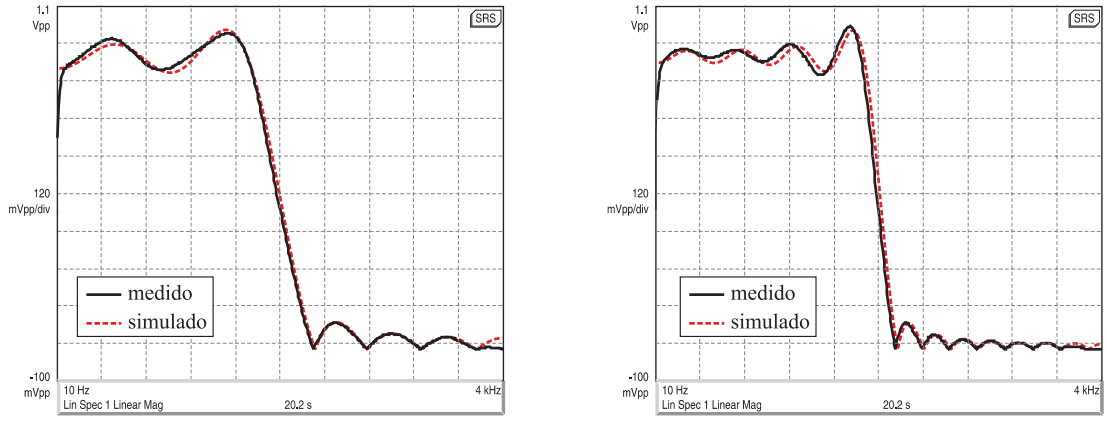


Fig. 3.40. Comparación del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado medido (—) y simulado ($\cdots$) para $M = 7$ (a) y $M = 15$ (b).

la atenuación máxima que es posible obtener en esta banda, que tiene un valor mínimo de -20 dB. El aumento de la cantidad de términos $2M + 1$ de la respuesta impulsiva hace que el filtro corte de manera más abrupta, disminuyendo el ancho de la zona de transición. Como se verá más adelante, este parámetro sirve para estimar el orden necesario de un filtro que cumpla con ciertos requisitos de diseño.

EJEMPLO **3.22. Respuesta en frecuencia de filtros reales**
El desempeño de un filtro FIR *real*, implementado en un procesador digital de señales, es casi idéntico al del filtro "teórico". En la Fig. 3.40 se comparan los módulos de la respuesta en frecuencia del filtro causal diseñado en el ejemplo anterior, con la respuesta del mismo filtro pero implementado en un DSP56303 de Freescale Semiconductor, de punto fijo, con ancho de palabra de 25 bits. Se muestran los casos de un FIR de 15 términos ($M = 7$, Fig. 3.40(a)) y 31 términos ($M = 15$, Fig. 3.40(b)). Las respuestas en frecuencias experimentales fueron medidas con un analizador dinámico de señales SRS 780 (Fig. 3.41). La figura muestra que el comportamiento del filtro real es casi idéntico al calculado teóricamente. Existe una pequeña diferencia en baja y alta frecuencia, que es causada por la respuesta en frecuencia del conversor analógico/digital, que bloquea las componentes de continua, y filtra las señales que están por encima de los 4 kHz. Además, la ganancia del filtro real es distinta de la del filtro teórico porque queda afectada por las ganancias de las etapas de entrada y salidas analógicas, y de los conversores analógico/digital y digital/analógico. □

3.6.4. Minimización del error de la respuesta

Aunque las respuestas en frecuencia de los filtros obtenidas por truncación son bastante diferentes de las de los filtros ideales, esta forma de diseño de filtros es muy utilizada en la práctica. Como las ondulaciones en la banda de paso y de rechazo dependen exclusivamente de la forma de la respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ de la ventana temporal $w[n]$ que se usa para truncar la respuesta impulsiva de longitud infinita $h_i[n]$ del filtro ideal, el desempeño del filtro puede mejorarse cambiando la forma en que se truncan los coeficientes $h_i[n]$.

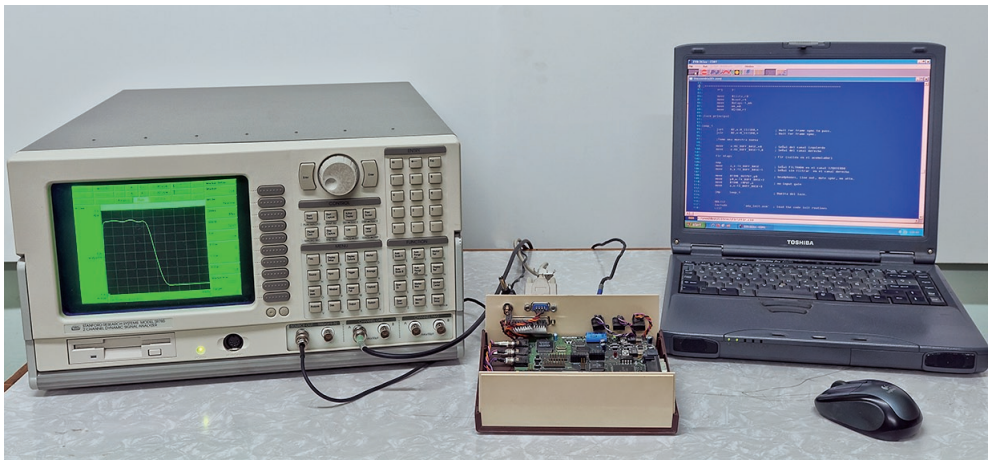


Fig. 3.41. Fotografía del montaje experimental.

Sin embargo, la respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ que se obtiene al realizar la truncación de la respuesta impulsiva $h[n]$ usando una ventana rectangular tiene la característica distintiva que es la respuesta que tiene menor error cuadrático medio respecto de la respuesta en frecuencia del filtro ideal.

Si $H_i\left(e^{j\omega}\right)$ es la respuesta en frecuencia del filtro ideal con respuesta impulsiva $h_i[n]$, y $H_T(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada $h_T[n]$, donde $h_T[n]$ y $h[n]$ están relacionadas por (3.47), es decir

$$h_T[n] = \begin{cases} h_i[n], & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

una medida de la diferencia entre la respuesta real $H_T(e^{j\omega})$ y la respuesta ideal $H_i(e^{j\omega})$ es el error medio cuadrático. Este error mide el área diferencia entre las dos respuestas en frecuencias, y la promedia por el rango de frecuencia. En ecuaciones, el error medio cuadrático $\mathcal{E}$ se define como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_T\left(e^{j\omega}\right) - H_i\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega,$$

donde

$$H_T\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-M}^{M} h[n]e^{-j\omega n}.$$

Según la relación de Parseval, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_T\left(e^{j\omega}\right) - Hi\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_T[n] - h_i[n]|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-M-1}|h_i[n]|^2 + \sum_{n=-M}^{M}|h_T[n] - h_i[n]|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty}|h_i[n]|^2 \\ &= \sum_{n=-M}^{M}|h_T[n] - h_i[n]|^2 + 2\sum_{n=M+1}^{\infty}|h_i[n]|^2. \end{aligned} \tag{3.54}$$

La expresión (3.54) muestra que, fijado $N = 2M + 1$, para que $\mathcal{E}$ sea mínimo (que la integral del error cuadrático sea mínima) la única elección posible es hacer $h_T[n] = h_i[n]$ para $-M \leq n \leq M$. Esta elección de $h_T[n]$ hace que se cancele el primer término de la suma en (3.54); el segundo término es la suma de las muestras desde $M + 1$ hasta infinito de la "cola" del sinc. En otras palabras, para un orden de filtro $N = 2M + 1$ dado, la mejor aproximación a la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva no causal e infinitamente larga *en el sentido de minimizar la integral del error cuadrático* es la *truncación* de los coeficientes de la respuesta impulsiva ideal. Cualquier otra elección de los coeficientes del filtro truncado hará que la primera sumatoria de (3.54) no se anule, y por lo tanto la integral del error medio cuadrático de la respuesta en frecuencia de esa elección será mayor que si se ubiese usado una ventana rectangular.

La minimización de la integral del error medio cuadrático usualmente resulta en respuestas en frecuencia con ondulaciones, como se ha visto en los ejemplos anteriores. En general esta no es la respuesta en frecuencia deseada para los filtros: se prefiere que la respuesta sea plana, o que tenga una ondulación de amplitud reducida en la banda de paso o en la banda de rechazo. En otras palabras, se busca minimizar el máximo de la diferencia, que en ecuaciones podría escribirse como

$$\mathcal{E}_\infty = \max_{\omega \in W} \left| H_T\left(e^{j\omega}\right) - Hi\left(e^{j\omega}\right) \right|.$$

En este caso, no conocemos una manera de vincular este error con la respuesta impulsiva, y por lo tanto no tenemos las herramientas para diseñar la respuesta impulsiva que permita minimizar este error. Por este motivo, estudiaremos un método de diseño muy sencillo de filtros FIR utilizando ventanas que permite satisfacer los requisitos de diseño a costa de necesitar algunas iteraciones de diseño hasta alcanzar el resultado final.

3.6.5. Diseño de filtros FIR usando ventanas

dadhfajdflasjfkñljkfj

3.6.6. Diseño de filtros FIR con banda de transición suave

Como se estudió en la Sección 3.6.2, los filtros FIR obtenidos por truncación de la respuesta impulsiva de un filtro ideal con una ventana rectangular tienen una respuesta en frecuencia con ondulaciones. Una manera de reducir la ondulación a valores aceptables es pesando la respuesta impulsiva de longitud infinita con una ventana temporal apropiada, cuya respuesta impulsiva tienda suavemente a cero, como se estudió en la Sección 3.6.5. Otra forma es modificando la especificación de la respuesta en frecuencia del filtro discreto dejando una banda de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, y permitiendo una transición suave entre ellas.

Para el caso de un filtro pasabajos, la modificación más sencilla es unir el borde de la banda de paso, indicado como ω_p y el borde de la banda de rechazo identificado como ω_s, con una recta (*spline* de primer orden) como se observa en la Fig. 3.42(a). Aplicando la transformada inversa de Fourier a la respuesta en frecuencia $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$ se pueden calcular los coeficientes $h_{LP}\left[n\right]$ de la respuesta impulsiva,

$$h_{LP}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_{LP}\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega.$$

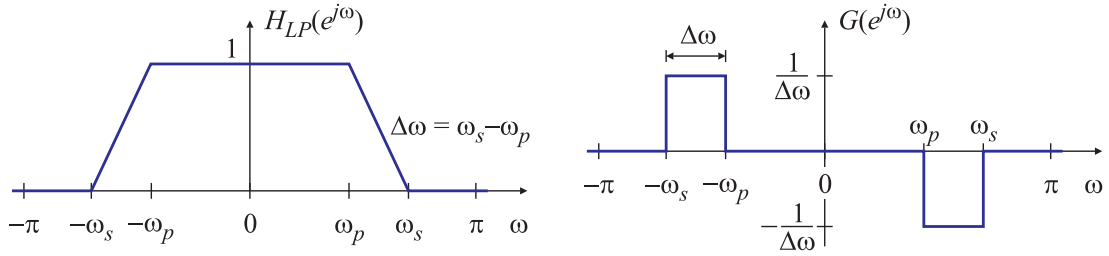


Fig. 3.42. Especificaciones de un filtro pasabajos con banda de transición suave (a). Especificaciones del filtro derivado (b).

Aunque no es una integral difícil de evaluar, el cálculo se complica porque en los tramos $(-\omega_s, -\omega_p)$ y (ω_p, ω_s) $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$ varía linealmente con ω.

Una manera más sencilla de obtener la respuesta impulsiva es a partir de la transformada inversa de Fourier de la *derivada* $G\left(e^{j\omega}\right)$ de la especificación de la respuesta en frecuencia $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$, Fig. 3.42$(b)$, y aplicando la propiedad de derivación frecuencial de la TFTD.

La propiedad de derivación frecuencial de la TFTD establece que si $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$ es la TFTD de la sucesión $h_{LP}[n]$, es decir $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{LP}[n]\, e^{-j\omega n}$, y si se define $G(e^{j\omega})$ como la derivada en frecuencia de $H_{LP}(e^{j\omega})$, $G\left(e^{j\omega}\right) = \frac{d}{d\omega} H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$, la relación entre $h_{LP}[n]$ y la sucesión $g[n]$, la TFTD inversa de $G(e^{j\omega})$ resulta

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= \frac{d}{d\omega} H_{LP}\left(e^{j\omega}\right) \\ &= \frac{d}{d\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{LP}[n] \left(e^{-j\omega n}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jn h_{LP}[n])\, e^{-j\omega n}. \end{aligned}$$

Como $G\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]\, e^{-j\omega n}$, resulta que $g[n] = -jn h_{LP}[n]$.

La respuesta $G(e^{j\omega})$ (la derivada en frecuencia de $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$) es fácil de calcular, porque es nula salvo en la banda de transición $\pm\Delta\omega$, donde $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$, como se muestra en la Fig. 3.42(b), que puede pensarse como un par de pasabajos desplazados en frecuencia. Como la respuesta impulsiva de los pasabajos es conocida, y la propiedad de despazamiento frecuencial es fácil de aplicar, se sencillo calcular $g[n]$ a partir de $G\left(e^{j\omega}\right)$, y después computar $h_{LP}[n]$ como

$$h_{LP}[n] = \frac{j}{n} g[n]. \tag{3.55}$$

Utilizando la respuesta en frecuencia del pasabajos auxiliar

$$H_A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1/\Delta\omega, & -\Delta\omega/2 < \omega < \Delta\omega/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

cuya respuesta impulsiva es

$$h_A[n] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} n\right), \tag{3.56}$$

se puede escribir

$$G(e^{j\omega}) = H_A(e^{j(\omega+\omega_c)}) - H_A(e^{j(\omega-\omega_c)}),$$

donde $\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2$. La propiedad de desplazamiento frecuencial establece que las respuestas impulsivas de $H_A(e^{j(\omega+\omega_c)})$ y $H_A(e^{j(\omega-\omega_c)})$ están relacionadas con $h_A[n]$ según

$$\begin{aligned} h_A[n] &\Leftrightarrow H_A(e^{j\omega}), \\ h_A[n]e^{-j\omega_c n} &\Leftrightarrow H_A(e^{j(\omega+\omega_c)}), \\ h_A[n]e^{j\omega_c n} &\Leftrightarrow H_A(e^{j(\omega-\omega_c)}), \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} g[n] &= h_A[n]e^{-j\omega_c n} - h_A[n]e^{j\omega_c n} \\ &= [-2j\,\mathrm{sen}(\omega_c n)]h_A[n]. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Reemplazando (3.57) y (3.56) en (3.55) se encuentra que

$$\begin{aligned} h_{LP}[n] &= \frac{j}{n} g\,[n] \\ &= \frac{2}{n}\,\mathrm{sen}(\omega_c n) h_A[n] \\ &= \frac{1}{\pi n}\,\mathrm{sen}(\omega_c n)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} n\right) \\ &= \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,(\omega_c n)}{\omega_c n}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} n\right), \end{aligned}$$

y en consecuencia, la respuesta impulsiva del filtro pasabajos con banda de transición suavizada puede escribirse como

$$h_{LP}[n] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\, n\right) \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right). \tag{3.58}$$

Esta expresión muestra que la respuesta impulsiva del filtro pasabajos con banda de transición suavizada puede escribirse como s la respuesta impulsiva de un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte ω_c [$h_{PBI}[n] = \omega_c/\pi\,\mathrm{sinc}(\omega_c n/\pi)$] pesada por una función temporal $w[n] = \mathrm{sinc}[\Delta\omega n/(2\pi)]$. En definitiva, el filtro con banda de trancisión suavizada es similar al diseño utilizando ventanas; lo único que cambia es que la ventana utilizada en este caso causa que la variación de la respuesta en frecuencia desde la banda de paso a la banda de rechazo varíe en forma lineal.

Obviamente, este cálculo puede hacerse directamente antitransformando $G(e^{j\omega})$. Es sencillo verificar que si $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} g[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_s}^{-\omega_p} \frac{1}{\Delta\omega} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_p}^{\omega_s} \frac{-1}{\Delta\omega} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn\Delta\omega}\left(e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_s}^{-\omega_p} - e^{j\omega n}\Big|_{\omega_p}^{\omega_s}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn\Delta\omega}\left[\cos(-\omega_p n) - \cos(-\omega_s n) + j\,\mathrm{sen}(-\omega_p n) - j\,\mathrm{sen}(-\omega_s n)\right. \\ &\quad \left. - \cos(\omega_s n) + \cos(\omega_p n) - j\,\mathrm{sen}(\omega_s n) + j\,\mathrm{sen}(\omega_p n)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi jn\Delta\omega}\left(2\cos\omega_p n - 2\cos\omega_s n\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\cos\alpha - \cos\beta = 2\,\mathrm{sen}[(\alpha+\beta)/2]\,\mathrm{sen}[(-\alpha+\beta)/2]$, y eligiendo $\alpha = \omega_s n$ y $\beta = \omega_p n$, resulta

$$g[n] = \frac{1}{2\pi jn\Delta\omega}\left(2\cos\omega_p n - 2\cos\omega_s n\right) = \frac{2}{\pi jn\Delta\omega}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_s+\omega_p}{2}n\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_s-\omega_p}{2}n\right).$$

Aprovechando las constantes $\Delta\omega$ y ω_c definidas más arriba, es decir que $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$, $\omega_c = (\omega_s+\omega_p)/2$, resulta

$$g[n] = \frac{2}{\pi jn\Delta\omega}\,\mathrm{sen}\,(\omega_c n)\,\mathrm{sen}\,(\Delta\omega n),$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} h_{LP}[n] &= \frac{j}{n}g[n] = \frac{2}{\pi n^2\Delta\omega}\,\mathrm{sen}\,(\omega_c n)\,\mathrm{sen}\,(\Delta\omega\, n/2) = \frac{\mathrm{sen}\,(\Delta\omega\, n/2)}{\Delta\omega\, n/2}\frac{\mathrm{sen}\,(\omega_c n)}{\pi\, n} \\ &= \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\,n\right)\frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right), \qquad n \neq 0. \end{aligned}$$

El caso $n = 0$ se analiza más fácilmente a partir de $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$, ya que

$$h_{LP}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

es el área bajo la curva de respuesta en frecuencia de $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$, dividida por 2π. Entonces,

$$h_{LP}[0] = \frac{2\omega_p + (\omega_s - \omega_p)}{2\pi} = \frac{\omega_p+\omega_s}{2\pi} = \frac{\omega_c}{\pi},$$

y en consecuencia, la respuesta impulsiva del filtro pasabajos modificado es

$$h_{LP}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\,n\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right),$$

que (lógicamente!) coincide con la calculada en (3.58). La ventaja de la derivación anterior es que se utilizan propiedades bien conocidas de la TFTD, que permiten una mejor interpretación.

Un inconveniente de este diseño es que el filtro resultante no es causal, y que su respuesta impulsiva es doblemente infinita. Si se requiere un filtro de longitud N (por simplicidad se supone que N es impar), la expresión de la respuesta impulsiva es

$$h_{LP}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2\pi}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]\mathrm{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right].$$

La elección del orden del filtro es un poco más complicada porque la ventana que resulta en este caso tiene forma rectangular en el dominio frecuencia, (es $H_A(e^{j\omega})$) y entonces no tenemos manera de relacionar el ancho de la ventana con la longitud de la respuesta impulsiva. Por lo tanto, la estimación del orden para cumplir con algún juego de especificaciones debe hacerse por prueba y error.

Se pueden obtener transiciones más suaves si se utilizan polinomios interpoladores (*splines*) de mayor orden para unir las bandas de paso y de rechazo. La respuesta impulsiva de

un filtro diseñado de manera tal que las frecuencias esquina de las bandas de paso y de rechazo se unen con un polinomio de orden P es

$$h_{LP}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi P}\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right)\right]^P \text{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi}\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right], \tag{3.59}$$

con $0 \leq n \leq N-1$. En general, el efecto de P en la respuesta en frecuencia no es obvio. Para un filtro de longitud N y banda de transición $\Delta\omega$ el valor óptimo de P que minimiza la integral cuadrática del error (Burrus, Soewito y Gopinath, 1992) es

$$P = \left\lceil \frac{\Delta\omega}{4\pi}(N-1) \right\rceil, \tag{3.60}$$

donde $\lceil\cdot\rceil$ es la función techo: $\lceil x \rceil$ es el menor de los enteros mayores que x. Esta expresión muestra que para una banda de transición de ancho $\Delta\omega$ prefijado, el aumento de la "suavidad" de la transición (un P mayor) implica un incremento de la longitud N del FIR. Una interpolación de orden alto con una banda de transición $\Delta\omega$ dada es equivalente a una interpolación de menor orden con una banda de transición más angosta.

EJEMPLO **3.23. Diseño de un filtro pasabajos**
Se desea diseñar un filtro FIR pasabajos con $\omega_p = 0{,}3\pi$ y $\omega_s = 0{,}4\pi$, y $N = 41$. De (**??**) resulta $\Delta\omega = 0{,}10\pi$, y $\omega_c = 0{,}35\pi$. Aplicando (3.60), se encuentra que el P óptimo es $P = 1$, y de (3.59) se tiene que

$$h_{LP}^{(1)}[n] = 0{,}35\,\text{sinc}\left[0{,}10\,(n-20)\right]\text{sinc}\left[0{,}35\,(n-20)\right].$$

Para comparar, se calculan filtros utilizando polinomios interpoladores de segundo orden $(P = 2)$ y de cuarto orden $(P = 4)$, obteniéndose

$$\begin{aligned} h_{LP}^{(2)}[n] &= 0{,}35\{\text{sinc}\left[0{,}050\,(n-20)\right]\}^2\,\text{sinc}\left[0{,}35\,(n-20)\right], \\ h_{LP}^{(4)}[n] &= 0{,}35\{\text{sinc}\left[0{,}025\,(n-20)\right]\}^4\,\text{sinc}\left[0{,}35\,(n-20)\right], \end{aligned}$$

con $0 \leq n \leq 40$. En la Fig. 3.43 se comparan las respuestas en frecuencia de los filtros, observándose que la respuesta con $P = 2$ tiene mayor ondulación que la de $P = 1$, pero menor que la de $P = 4$. Aumentando la longitud del FIR se puede obtener una menor ondulación en la banda de paso, pues de acuerdo con (3.60) el P óptimo es mayor. En la Fig. 3.44 se comparan la respuesta en frecuencia del filtro de longitud $N = 41$, y $P = 1$ con la respuesta del filtro de longitud $N = 81$, $P = 2$, y puede apreciarse que efectivamente la ondulación es menor. □

3.7. Método de muestreo en frecuencia

Una manera sencilla de diseñar filtros FIR es a partir de la especificación de la respuesta en frecuencia deseada $H_d\left(e^{j\omega_k}\right)$ para un conjunto de frecuencias ω_k, $k = 0, 1, ..., N-1$. Por ejemplo, en la Fig. 3.45 se muestra la respuesta en frecuencia deseada $H_d(e^{j\omega})$, y los N valores donde se desea que pase la respuesta en frecuencia del filtro a diseñar. Ya que la respuesta en frecuencia de un filtro FIR de longitud N, dada por

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\; e^{-j\omega n} \tag{3.61}$$

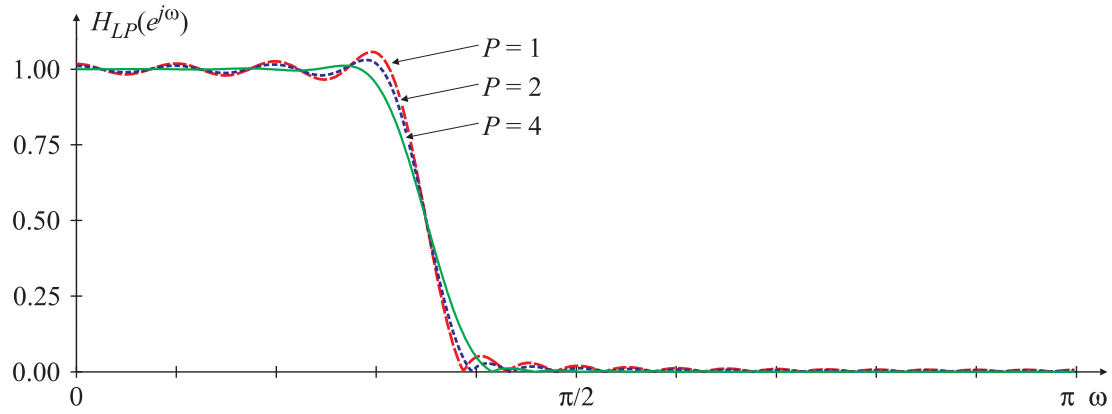


Fig. 3.43. Respuesta en frecuencia de un filtro con banda de transición suavizada para $N = 41$, y $P = 1, 2, 4$..

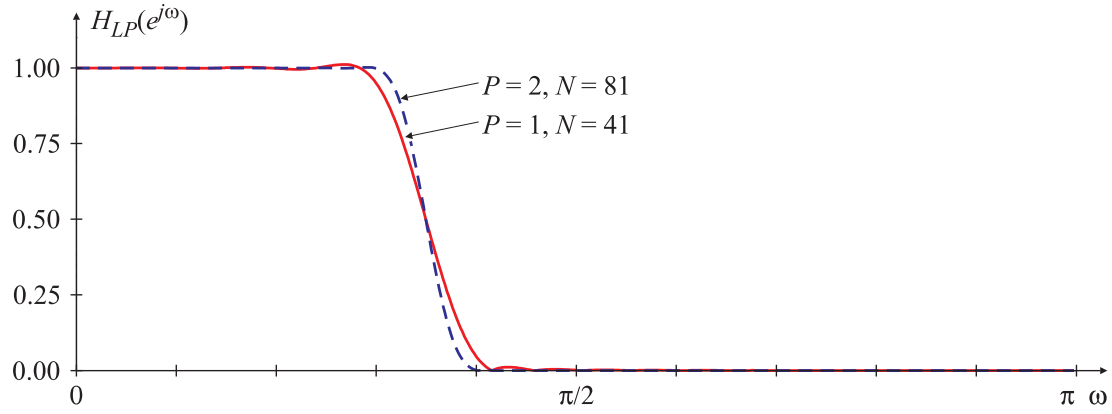


Fig. 3.44. Comparación de la respuesta en frecuencia para $N = 41, P = 1$ y $N = 81, P = 2$.

es un polinomio de grado $N-1$ en $e^{-j\omega}$ con N coeficientes $h[n]$, $n = 0, 1, ..., N-1$, la especificación de la respuesta deseada en N frecuencias ω_k, $k = 0, 1, ..., N-1$ distintas permite determinar de manera única los coeficientes $h[n]$ desconocidos.

Si la magnitud de la respuesta en frecuencia deseada a la frecuencia ω_k, $H_d\left(e^{j\omega_k}\right)$ se nota $H[k]$, como se indica en la Fig. 3.45, evaluando (3.61) en cada una de las frecuencias ω_k e igualándolo al valr deseado $H[k]$, se puede armar un sistema de N ecuaciones (la ecuación (3.61) evaluada en las N frecuencias ω_k) con N incógnitas (los valores de la respuesta impulsiva $h[n]$):

$$
\begin{aligned}
H[0] &= H_d\left(e^{j\omega_0}\right) = h[0] + h[1]\,e^{-j\omega_0} + \cdots + h[N-1]\,e^{-j(N-1)\omega_0},\\
H[1] &= H_d\left(e^{j\omega_1}\right) = h[0] + h[1]\,e^{-j\omega_1} + \cdots + h[N-1]\,e^{-j(N-1)\omega_1},\\
&\vdots\\
H[k] &= H_d\left(e^{j\omega_k}\right) = h[0] + h[1]\,e^{-j\omega_k} + \cdots + h[N-1]\,e^{-j(N-1)\omega_k},\\
&\vdots\\
H[N-1] &= H_d\left(e^{j\omega_{N-1}}\right) = h[0] + h[1]\,e^{-j\omega_{N-1}} + \cdots + h[N-1]\,e^{-j(N-1)\omega_{N-1}},
\end{aligned}
$$

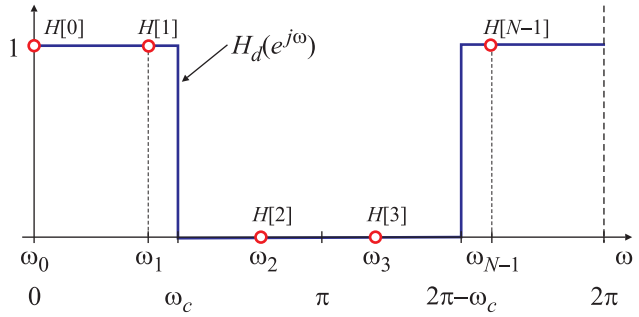


Fig. 3.45. Especificaciones del filtro prototipo.

que puede expresarse en forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H[0] \\ H[1] \\ \vdots \\ H[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & \cdots & e^{-j(N-1)\omega_0} \\ 1 & e^{-j\omega_1} & \cdots & e^{-j(N-1)\omega_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\omega_{N-1}} & \cdots & e^{-j(N-1)\omega_{N-1}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}$$

y entonces,

$$\mathbf{h} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}.$$

Si el filtro FIR proviene de la causalización de un filtro truncado, como los de la Sección 3.6.2, el cálculo podría refinarse aún mas debido a la simetría de $h[n]$; por ejemplo, podrían especificarse solamente las frecuencias comprendidas entre 0 y π, de manera de calcular sólo la mitad de las muestras de la respuesta impulsiva $h[n]$ del filtro real. Sin embargo se sigue con la estrucutra representada hasta ahora para mantener la presentación simple.

Las frecuencias donde se "muestrea" la respuesta en frecuencia deseada son arbitrarias, pero una simplificación importante –evitar la inversión de la matriz **W**– se obtiene si las N frecuencias ω_k están equiespaciadas. Esto es, si

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

resulta

$$\begin{aligned} H[k] &= H_d\left(e^{j\omega_k}\right) = H_d\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \\ &= h[0] + h[1]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + h[2]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}k2} + \cdots + h[N-1]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-1)}, \end{aligned}$$

que puede escribirse en forma más compacta como

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\; e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \tag{3.62}$$

que, como se verá en el capítulo siguiente, es la transformada discreeta de Fourier (TDF) de $h[n]$. Por lo tanto los coeficientes $h[n]$ del filtro FIR pueden computarse a partir de la

TDF inversa de $H[k]$. Este resultado puede obtenerse de manera sencilla si se multiplica (3.62) por el factor $e^{j\frac{2\pi}{N}k\,m}$

$$H\,[k]\;e^{j\frac{2\pi}{N}k\,m} = \sum_{n=0}^{N-1} h\,[n]\;e^{-j\frac{2\pi}{N}k\,n}\,e^{j\frac{2\pi}{N}k\,m},$$

y se suma para $k = 0, 1, ..., N-1$

$$\sum_{k=0}^{N-1} H\,[k]\;e^{j\frac{2\pi}{N}k\,m} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} h\,[n]\;e^{-j\frac{2\pi}{N}k\,(n-m)}.$$

Intercambiando el orden de la suma se obtiene

$$\sum_{k=0}^{N-1} H\,[k]\;e^{j\frac{2\pi}{N}k\,m} = \sum_{n=0}^{N-1} h\,[n] \sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^k. \tag{3.63}$$

Analizando la segunda sumatoria, se observa que

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^k = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)N}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}} = \frac{1-e^{-j2\pi(n-m)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}}.$$

Si $n-m \neq rN$, para r entero, la suma da cero pues $e^{j2\pi\ell} = 1$. Sin embargo, si $n-m = rN$, tanto el numerador como el denominador se anulan. Para analizar que sucede en este caso, es más sencillo analizar la sumatoria, ya que

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^k\Bigg|_{n-m=rN} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}rN}\right)^k = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^k = \begin{cases} N, & n-m = rN \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

o bien

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k\,n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\,[n-rN]\,, \tag{3.64}$$

para r entero. Volviendo a la expresión (3.59), limitando los valores de m al rango $0 \leq m \leq N-1$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{N-1} H\,[k]\;e^{j\frac{2\pi}{N}k\,m} = \sum_{n=0}^{N-1} h\,[n]\;N\,\delta\,[n-m] = Nh\,[m]\,.$$

Cambiando nuevamente n por m, finalmente se encuentra que los coeficientes del filtro FIR cuya respuesta en frecuencia pasa por los puntos $H[k]$ elegidos se pueden calcular a partir de la expresión

$$h\,[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H\,[k]\;e^{j\frac{2\pi}{N}k\,n}. \tag{3.65}$$

Relación entre $h_d[n]$ y $h[n]$

La relación entre la respuesta impulsiva $h_d[n]$ del filtro ideal o prototipo con respuesta en frecuencia $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ y la respuesta impulsiva $h[n]$ del filtro obtenido muestreando $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ en determinadas frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, ..., N-1$ se puede establecer como sigue. El filtro prototipo tiene una respuesta en frecuencia

$$H_d\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_d[\ell]\ e^{-j\omega\ell},$$

donde

$$h_d[\ell] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right)\ e^{j\omega\ell}d\omega.$$

Por otra parte, en cada una de las frecuencias ω_k, se tiene

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_k} = H[k] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_d[\ell]\ e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell},$$

y de acuerdo a la expresión(3.65),

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\ e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_d[\ell]\ e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}k\,n}.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias,

$$h[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_d[\ell]\ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(\ell-n)},$$

donde la segunda sumatoria es la conocida expresión (3.64). Por lo tanto,

$$h[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d[n+rN]. \tag{3.66}$$

La expresión anterior indica que $h[n]$ es la suma de infinitas réplicas de $h_d[n]$, donde cada réplica está desplazada un múltiplo entero de N muestras, observando el resultado de la suma solamente en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Por lo tanto, si $h_d[n]$ es una sucesión de longitud finita de longitud menor o igual que N, entonces $h[n] = h_d[n]$ para $0 \leq n \leq N-1$. En cambio, si $h_d[n]$ es una sucesión de longitud infinita existirá una superposición temporal (o *aliasing*, en inglés) de muestras de $h_d[n]$ de manera que $h[n]$ puede ser muy diferente a $h_d[n]$.

Algunas consideraciones sobre la especificación de la respuesta deseada

En la presentación anterior se supuso que las especificaciones de la respuesta en frecuencia deseada $H_d\left(e^{j\omega_k}\right)$ son adecuadas al tipo de respuesta impulsiva que se busca: por ejemplo, si se desea que la respuesta impulsiva $h[n]$ sea real, el módulo $\left|H_d\left(e^{j\omega_k}\right)\right|$ de la respuesta en frecuencia deberá ser una función par, y la fase $\arg\left[H_d\left(e^{j\omega_k}\right)\right]$ una función impar.

Una manera sencilla de diseñar filtros es especificando la respuesta en frecuencia como una función *real* (es decir, con fase nula) que corresponde a una respuesta impulsiva $h_d[n]$ simétrica respecto a $n = 0$, y posiblemente con $-\infty \leq n \leq \infty$. Con el cálculo con la TDF inversa se obtiene una respuesta impulsiva $h[n]$ de longitud finita definida para $0 \leq n \leq N-1$. Debido a la periodicidad de la TDF las últimas $(N-1)/2$ muestras, si N es impar, o las ultimas $N/2$ muestras si N es par, respectivamente, corresponden a las muestras para $n < 0$ de la respuesta no causal $h_d[n]$. Por lo tanto, de la causalización de la respuesta impulsiva resulta que

$$h_c[n] = \begin{cases} h[n + (N-1)/2], & 0 \leq n < (N-1)/2, \\ h[n - (N-1)/2], & (N-1)/2 \leq n \leq N-1. \end{cases} \qquad (N \text{ impar})$$

$$h_c[n] = \begin{cases} h[n + N/2], & 0 \leq n < N/2, \\ h[n - N/2], & N/2 \leq n \leq N-1. \end{cases} \qquad (N \text{ par})$$

donde $h[n]$ es el resultado de la TDF inversa sobre $H_d\left(e^{j\omega_k}\right)$, y $h_c[n]$ la respuesta impulsiva del filtro causal.

EJEMPLO **3.24. Diseño de un filtro pasabajos ($N = 4$)**

En este ejemplo se diseña un filtro pasabajos con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/2$. Adoptando $N = 4$, las frecuencias ω_k donde se evalúa $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ son

$$\omega_k = \frac{2\pi}{4}k = \left\{0, \frac{2\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}\right\} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

y $H[k] = \{1, 1, 0, 1\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
h[0] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, e^{-j\omega_k 0} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k] = \frac{1+1+0+1}{4} = \frac{3}{4}, \\
h[1] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, e^{-j\omega_k 1} = \frac{1}{4}\left(1 + 1e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0 + 1e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1+j+(-j)}{4} = \frac{1}{4}, \\
h[2] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, e^{-j\omega_k 2} = \frac{1}{4}\left(1 + 1e^{-j2\frac{\pi}{2}} + 0 + 1e^{-j2\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1+(-1)+(-1)}{4} = -\frac{1}{4}, \\
h[3] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, e^{-j\omega_k 3} = \frac{1}{4}\left(1 + 1e^{-j3\frac{\pi}{2}} + 0 + 1e^{-j3\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1+(-j)+j}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

La respuesta impulsiva causalizada es

$$h_c[n] = \{h[2],\, h[3],\, h[0],\, h[1]\} = \left\{-\frac{1}{4},\, \frac{1}{4},\, \frac{3}{4},\, \frac{1}{4}\right\}$$

La respuesta impulsiva $h[n]$ se grafica en la Fig. 3.46(a), y el módulo de la respuesta en frecuencia en la Fig. 3.46(b). El valor de la especificación del módulo de la respuesta deseada en cada frecuencia se ha indicado con círculos: aunque el filtro diseñado cumple con los requisitos de diseño, la respuesta en frecuencia difiere bastante de la de un filtro ideal. Además, como la respuesta impulsiva no es simétrica, el filtro no es de fase lineal, tal como se aprecia en el gráfico de la fase y del retardo de grupo de la Fig. 3.46(c) y (d), respectivamente. □

En el siguiente ejemplo se analiza el diseño de un filtro FIR cuya longitud se incrementa en una muestra.

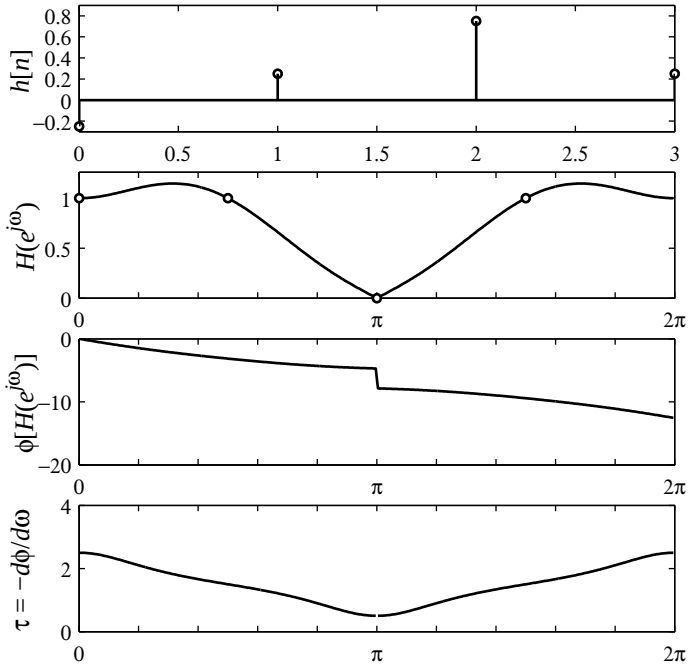


Fig. 3.46. Respuesta del filtro diseñado por el método de muestreo en frecuencia con $H_d(e^{j\omega_k}) = 1,1,0,1$.

EJEMPLO **3.25. Diseño de un filtro pasabajos ($N = 5$)**

Para el mismo filtro del ejemplo anterior, se desea diseñar un filtro de longitud $N = 5$. En consecuencia, las frecuencia de interés son

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k = \left\{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\right\},$$

y el módulo de la respuesta en frecuencia deseado es

$$H_d\left(e^{j\omega_k}\right) = \{1,1,0,0,1\}.$$

La respuesta impulsiva se puede calcular con MATLAB usando el comando `ifft`, obteniéndose

$$\begin{aligned} h[n] &= \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \frac{2}{5}\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right), \frac{2}{5}\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right), \frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right\} \\ &\approx \{0{,}6000, 0{,}3236, -0{,}1236, -0{,}1236, 0{,}3236\}, \end{aligned}$$

y en consecuencia, la respuesta impulsiva del filtro es

$$h_c[n] = \{-0{,}1236, 0{,}3236, 0{,}6000, 0{,}3236, -0{,}1236\},$$

que se ilustra en la Fig. 3.47(a). La respuesta en frecuencia del filtro se grafica en la Fig. 3.47(b), y se observa que pasa por los valores especificados. En este caso, como la respuesta impulsiva resulta simétrica, el filtro es de fase lineal, tal como se evidencia en las Fig. 3.47(c) y (d). □

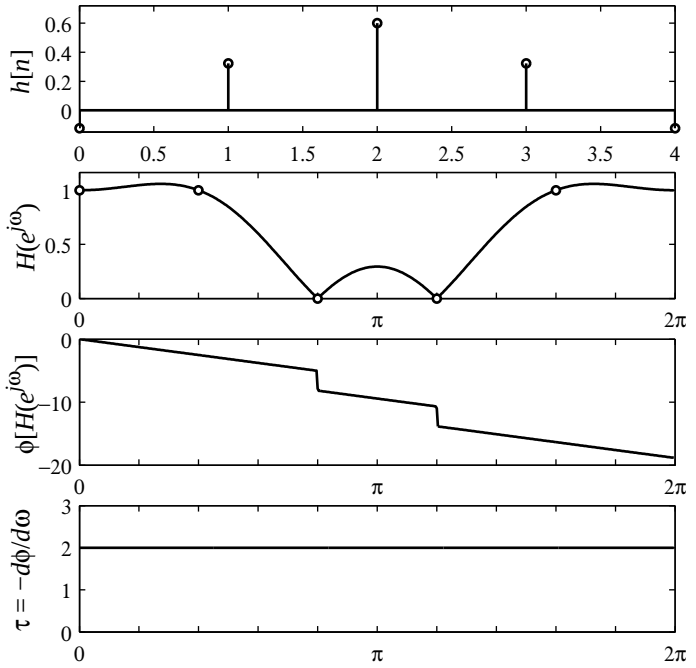


Fig. 3.47. Respuesta del filtro diseñado por el método de muestreo en frecuencia con $H_d(e^{j\omega_k}) = 1,1,0,0,1$.

Diseño de filtros de fase lineal

Si se desea que el filtro resultante sea de fase lineal, la respuesta impulsiva debe verificar

$$h[n] = \pm h[N-1-n],$$

donde el signo positivo corresponde a los filtros FIR de fase lineal tipo I y II, y el signo negativo a los de tipo III y IV, respectivamente. Esto se traduce en que las muestras de la respuesta en frecuencia deseada deben satisfacer

$$|H[k]| = \quad |H[N-k]|, \qquad 0 \le k \le (N-1)/2, \qquad \text{si } N \text{ es impar}$$

$$|H[k]| = \begin{cases} |H[N-k]|, & 0 \le k \le N/2-1, \\ 0, & k = N/2, \end{cases} \qquad \text{si } N \text{ es par}$$

y además

$$\arg(H[k]) = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{N-1}{2}k, & 0 \le k \le \lfloor (N-1)/2 \rfloor, \\ \dfrac{2\pi}{N}\dfrac{N-1}{2}(N-k) & \lfloor (N-1)/2 \rfloor \le k \le N-1, \end{cases} \qquad \text{(Tipos I y II)},$$

o

$$\arg(H[k]) = \begin{cases} \pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{N}\dfrac{N-1}{2}k, & 0 \le k \le \lfloor (N-1)/2 \rfloor, \\ \mp\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{N}\dfrac{N-1}{2}(N-k) & \lfloor (N-1)/2 \rfloor \le k \le N-1, \end{cases} \qquad \text{(Tipos III y IV)}.$$

donde $\lfloor\cdot\rfloor$ es la función piso, definida como el mayor entero menor que su argumento, y el símbolo $\lceil\cdot\rceil$ define la función techo: el menor entero mayor que su argumento[1]. Por ejemplo, $\lfloor 2{,}4\rfloor = 2$, $\lfloor -2{,}4\rfloor = -3$, $\lceil 2{,}4\rceil = 3$, $\lceil -2{,}4\rceil = -2$. En particular, es sencillo verificar que

$$\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \dfrac{N}{2} - 1, & \text{si } N \text{ es par,} \\ \dfrac{N-1}{2}, & \text{si } N \text{ es impar,} \end{cases} \qquad \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & \text{si } N \text{ es par,} \\ \dfrac{N+1}{2}, & \text{si } N \text{ es impar.} \end{cases}$$

Las ecuaciones de la fase tienen en cuenta que, para obtener un filtro causal, el retardo de fase del FIR es de $(N-1)/2$. Como cada cero del módulo de la respuesta en frecuencia introduce un desfasaje de π radianes, este aporte debe tenerse en cuenta al especificar la fase. El siguiente programa de MATLAB para el diseño de filtros FIR de fase lineal por el método del muestreo en frecuencia tiene en cuenta estos hechos.

```
function h=firfs(Hd)
%h = firfs(Hd)
%      Esta funcion calcula la respuesta impulsiva de un filtro FIR
%      por el metodo de muestreo en frecuencia.
%      El vector Hd tiene la informacion del MODULO de la respuesta en
%      frecuencia. La funcion se encarga de acomodar la fase para
%      obtener un FIR de fase lineal

N   = length(Hd);
k   = 0:N-1;
DPi = zeros(size(Hd));          % DPi: vector con los saltos de pi
DPi(find(Hd==0)) = 1;
DPi = pi*cumsum(DPi);
Ang = -j*(2*pi*k/N*(N-1)/2+DPi);% fase lineal + saltos de pi
Hdc = Hd.*exp(Ang);
h   = real(ifft(Hdc));          % no debiera hacer falta...
```

En el siguiente ejemplo se repite el diseño del Ejemplo 3.24 pero con especificación de fase lineal.

EJEMPLO **3.26. Diseño de un filtro pasabajos ($N = 4$, fase lineal)**

Las especificaciones de la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/2$ para obtener un filtro FIR de fase lineal de longitud $N = 4$ son

$$\begin{aligned} |H[k]| &= \{1, 1, 0, 1\}, \\ \arg(H[k]) &= \left\{ \tfrac{2\pi}{4}\tfrac{4-1}{2} \times 0, \tfrac{2\pi}{4}\tfrac{4-1}{2} \times 1, *, \tfrac{2\pi}{4}\tfrac{4-1}{2} \times 3 + \pi \right\}, \end{aligned}$$

donde el símbolo "$*$" indica que la fase es irrelevante porque el módulo de la respuesta en frecuencia es nulo, y al último elemento se le ha sumado un desfasaje de π radianes por el cambio de fase introducido por el cero. En consecuencia,

$$H[k] = \left\{ 1, -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - j\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + j\tfrac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

La TDF inversa de $H[k]$ es

$$h[n] = \left\{ \tfrac{1-\sqrt{2}}{4}, \tfrac{1+\sqrt{2}}{4}, \tfrac{1+\sqrt{2}}{4}, \tfrac{1-\sqrt{2}}{4} \right\}.$$

La Fig. **??** muestra la respuesta del filtro; compare con la respuesta del Ejemplo 3.24 (Fig. 3.46). El efecto del aliasing temporal en la respuesta impulsiva del filtro se observa en la Fig. 3.49, que muestra

[1] Estas funciones se corresponden con los comandos MATLAB `floor(·)` y `ceil(·)`, respectivamente.

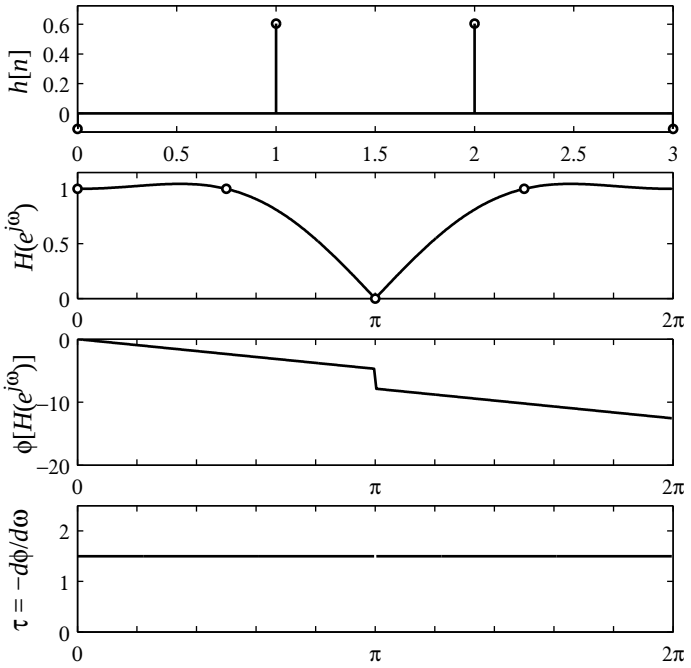


Fig. 3.48. Respuesta del filtro FIR de fase lineal diseñado por el método de muestreo en frecuencia con $H_d(e^{j?_k}) = 1, -((v2)/2) - j((v2)/2), 0, -((v2)/2) + j((v2)/2)$.

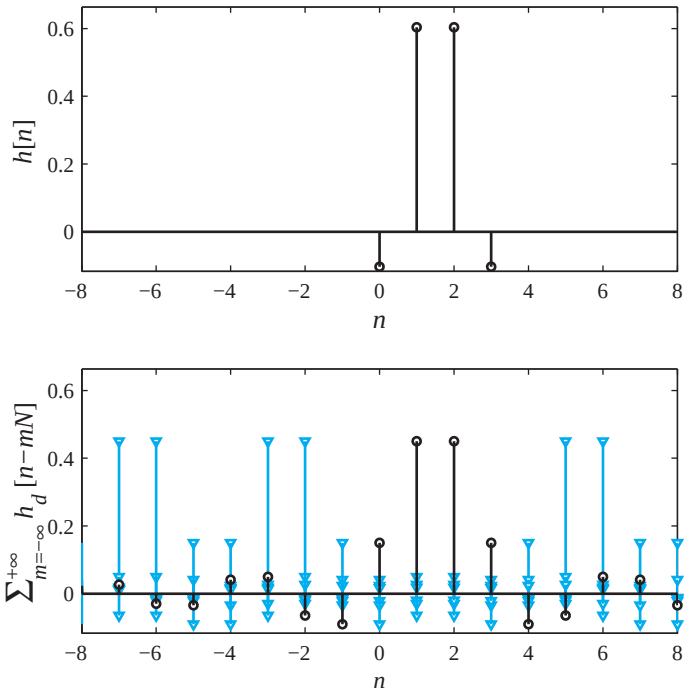


Fig. 3.49. Respuesta impulsiva del filtro del Ejemplo 3.26, y la suma de las réplicas de la respuesta impulsiva del filtro ideal.

la respuesta impulsiva $h[n]$ del filtro FIR diseñado (vea la Fig. **??**) y las réplicas (cada $N = 4$) de la

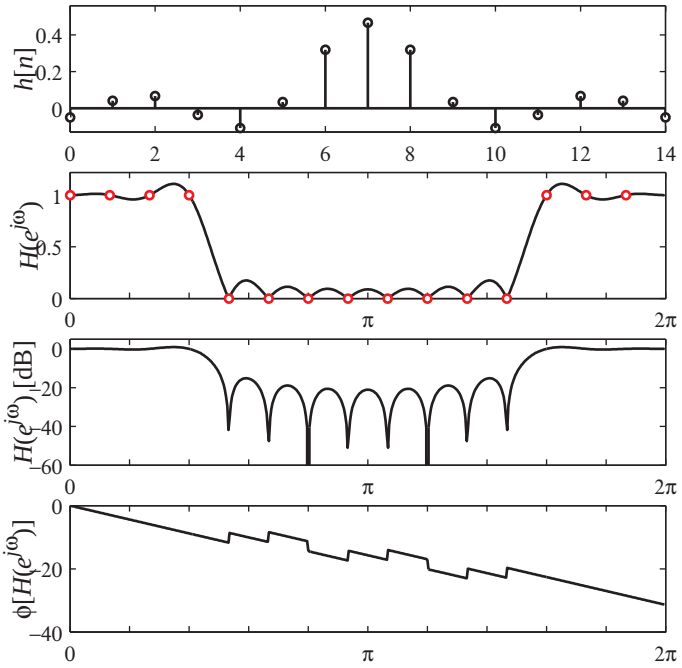


Fig. 3.50. Respuesta en frecuencia del filtro del Ejemplo 3.26, con $N = 15$.

respuesta impulsiva $h_d[n]$ del filtro ideal

$$h_d[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right), \quad -\infty \leq n \leq \infty.$$

Es evidente que cada una de las muestras de la respuesta impulsiva es la suma de las infinitas réplicas de $h_d[n]$, para $0 \leq n \leq 3$. También puede apreciarse que la respuesta impulsiva $h[n]$ no es exactamente igual a ninguna de las réplicas de $h_d[n]$. □

En los ejemplos anteriores la respuesta del filtro diseñada difiere bastante de la del filtro ideal. Esto puede atribuirse a que el muestreo en frecuencia no tiene la resolución suficiente, o bien que la respuesta impulsiva es de longitud reducida. La Fig. 3.50 muestra la respuesta del filtro del Ejemplo 3.26 para $N = 15$. Aún en este caso puede apreciase que la ganancia del filtro en la banda de rechazo tiene picos de amplitud significativa (la atenuación en la banda de rechazo es menor a 20 dB). Este comportamiento se debe al efecto Gibbs, y puede disminuirse proponiendo una transición suave. Esta aproximación se observa en la Fig. 3.51, donde las muestras vecinas a la zona de transición se cambiaron de 1 a 0.4. Con este procedimiento la atenuación en la banda de rechazo excede los 40 dB.

El ajuste de la ganancia propuesta en la zona de transición puede hacerse por prueba y error, como en este caso, o bien aplicando métodos de programación lineal de forma de encontrar los valores que permitan obtener las mayores atenuaciones en la banda de rechazo con la zona de transición más angosta posible. Estos resultados se encuentran tabulados, por ejemplo en Proakis (1992).

3.7.1. Implementación

Un filtro FIR diseñado por la técnica de muestreo en frecuencia se puede implementar de manera recursiva. Partiendo de la expresión de la transformada z de la respuesta impul-

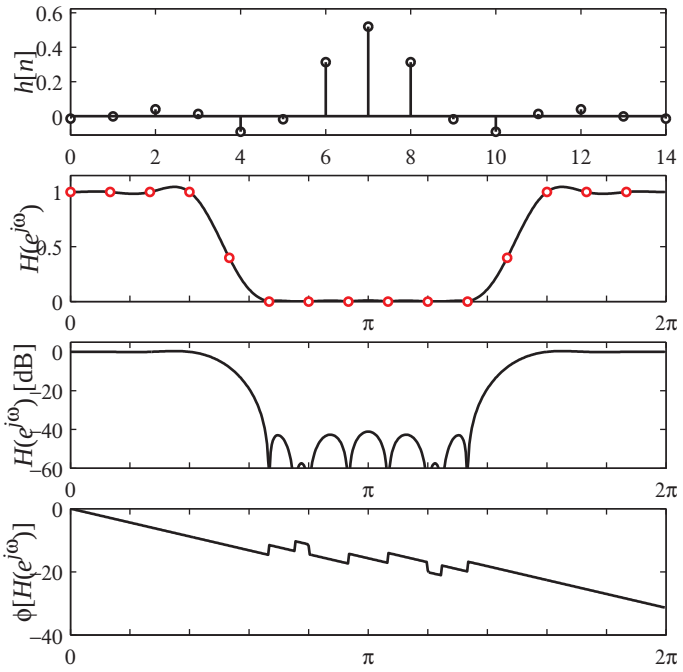


Fig. 3.51. Respuesta en frecuencia del filtro del Ejemplo 3.26, con $N = 15$, donde se han alterado las muestras vecinas a la zona de transición.

siva

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\, z^{-n}$$

y de acuerdo con (3.65).

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, \frac{1}{N} \frac{1-\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}\right)^N}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \\ &= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}. \end{aligned}$$

Una realización basada en la última expresión se muestra en la Fig. 3.52. La estructura usa resonadores recursivos (y por lo tanto de tipo IIR) para realizar la función transferencia de un filtro FIR. El polo de cada resonador en el círculo unidad es cancelado exactamente por cada uno de los N ceros de $\left(1-z^{-N}\right)$. Tal cancelación puede no ocurrir en la práctica debido a la representación de los coeficientes de los filtros utilizando aritmética de precisión finita, y en consecuencia, puede resultar en un filtro inestable. Sobre el círculo unidad es relativamente sencillo demostrar que

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, \frac{\sin\left[(\omega N - 2\pi k)/2\right]}{\sin\left[(\omega N - 2\pi k)/(2N)\right]}\, e^{j\pi k\frac{N-1}{N}}$$

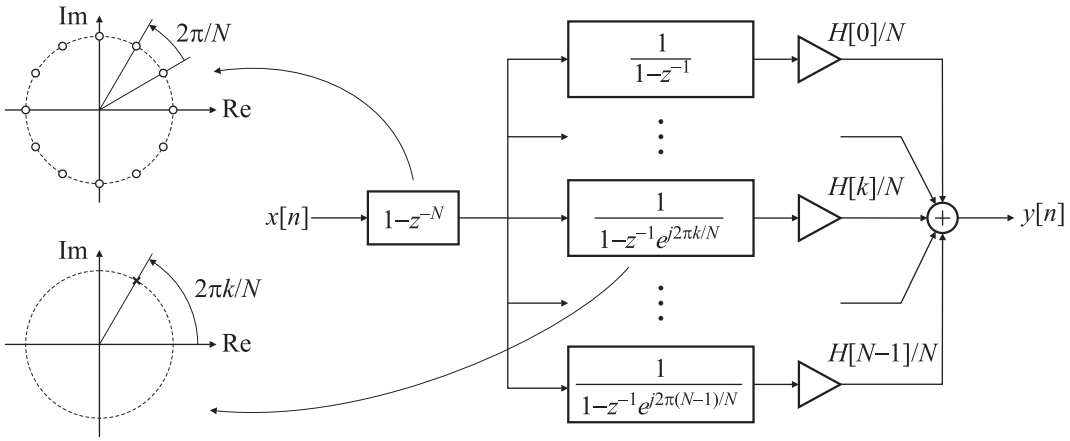


Fig. 3.52. Implementacion IIR del filtro FIR diseñado por muestreo en frecuencia.

y en consecuencia,

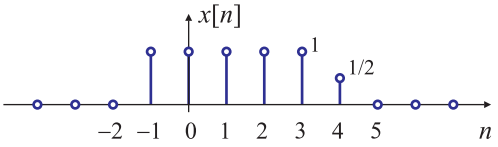
$$H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=2\pi k/N} = H[k], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

de modo que la respuesta en frecuencia del filtro FIR diseñado por el método de muestreo en frecuencia tiene exactamente la respuesta deseada, $H[k] = H_d\left(e^{j\omega_k}\right)$, donde $\omega_k = 2\pi k/N, 0 \leq k \leq N-1$.

3.8. Ejercicios: Sistemas discretos

Ejercicio 1. Calcule la salida $y[n]$ de cada uno de los siguientes sistemas para la entrada $x[n]$ que se muestra en la figura.

(1) $y[n] = x[n-2]$
(2) $y[n] = x[4-n]$
(3) $y[n] = x[2n]$.
(4) $y[n] = x[n-1]\,\delta[n-3]$.
(5) $y[n] = 5\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$.
(6) $y[n] = x\left[n^2\right]$.



Ejercicio 2. Determine si cada uno de los sistemas (a)-(e) de la Lista I, con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$, satisface las propiedades (1)-(5) de la Lista II. Justifique sus respuestas.

Lista I: Sistemas	**Lista II: Propiedades**
(a) $y[n] = x[n]x[n-1]$	(1) Sin memoria.
(b) $y[n] = x[-n]$	(2) Invariante en el tiempo
(c) $y[n] = x[n] + nx[n+1]$	(3) Lineal.
(d) $y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$	(4) Causal.
(e) $y[n] = \begin{cases} x[n], & \text{si } x[n] \geq 0, \\ 0, & \text{si } x[n] < 0. \end{cases}$	(5) Estable.

Ejercicio 3. Verifique que una sucesión $x[n]$ absolutamente sumable ($\sum_n |x[n]| = M_x < \infty$) tiene energía finita ($E = \sum_n |x[n]|^2 < \infty$). Compruebe que la recíproca no es cierta. **Ayuda**: demuestre primero que si $\sum_n |x[n]| = M_x$, entonces $|x[n]| < N_x$ para todo n.

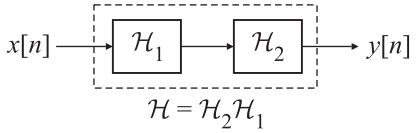
Ejercicio 4. Para el sistema definido por la ecuación a diferencias $y[n] = (x[n])^2 + 1$,

1. Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$.
2. Determine $\sum_n |h[n]|$.
3. ¿Contradice este resultado la condición de estabilidad BIBO?

Ⓒ **Ejercicio 5.** Dos sistemas discretos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ se conectan en cascada para formar un nuevo sistema $\mathcal{H}$, como se muestra en la figura. Determine si los siguientes postulados son verdaderos o no.

1. $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son lineales $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ es lineal.

2. $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son invariantes en el tiempo $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ es invariante en el tiempo.
3. Si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son causales $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ es causal.
4. $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son lineales e invariantes en el tiempo $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ es lineal e invariante en el tiempo.
5. $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son lineales e invariantes en el tiempo $\Rightarrow$ $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2\mathcal{H}_1$ (el intercambio del orden de la conexión no cambia al sistema compuesto H).
6. Repita el inciso 5 suponiendo que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son lineales y *variantes* en el tiempo.
7. $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ no son lineales $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ no es lineal.
8. $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son estables $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ es estable.
9. Muestre a través de ejemplos que los recíprocos de los incisos 1 a 8 no se verifican en general.



Ejercicio 6. Cuando el sistema lineal $\mathcal{H}$ se excita con la entrada $x_0[n] = \delta[n]$ la salida es $y_0[n] = h_0[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$. En cambio, si la entrada es $x_1[n] = \delta[n-1]$ la salida resulta $y_1[n] = h_1[n] = -\delta[n] - \delta[n-1]$. Calcule, si es posible,

1. la salida $y_2[n]$ ante una entrada $x_2[n] = a\delta[n] + b\delta[n-1]$;
2. la salida $y_3[n]$ ante una entrada $x_3[n] = a\delta[n-1] + b\delta[n-2]$.

Ejercicio 7. Para el sistema lineal $\mathcal{S}$ con respuesta impulsiva $h_\ell[n] = a^n b^{-\ell} u[n-\ell]$, con $n \geq \ell \geq 0$, y $|a| < 1$, $|b| < 1$

1. Determine si es invariante en el tiempo.
2. Calcule la respuesta $y_1[n]$ del sistema ante una entrada escalón $x_1[n] = u[n]$.
3. Calcule la salida $y_2[n]$ cuando se lo excita con una entrada $x_2[n] = u[n-1]$. Compare $y_2[n]$ con $y_1[n]$.

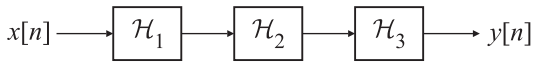
En cada inciso analice los casos en que (*i*) $a = b$ y (*ii*) $a \neq b$.

Ejercicio 8. Considere tres sistemas con las siguientes relaciones entrada-salida:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &: \quad y[n] = x[-n], \\ \mathcal{H}_2 &: \quad y[n] = a\,x[n-1] + b\,x[n] + c\,x[n+1], \\ \mathcal{H}_3 &: \quad y[n] = x[-n], \end{aligned}$$

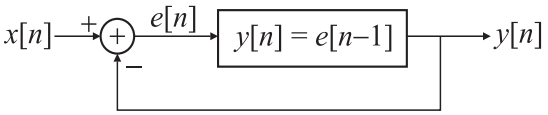
donde a, b, c son números reales. Encuentre la relación entrada-salida para el sistema interconectado. ¿Bajo qué condiciones sobre los números a, b, c, el sistema tiene alguna de las siguientes propiedades?

1. El sistema interconectado es lineal e invariante en el tiempo.
2. La relación entrada-salida del sistema completo es idéntica a la del Sistema 2.
3. El sistema completo es causal.



Ejercicio 9. Considere el sistema de la figura. Suponga que $y[n] = 0$ para $n < 0$.

1. Dibuje la señal de salida cuando $x[n] = \delta[n]$.
2. Dibuje la señal de salida cuando $x[n] = u[n]$.

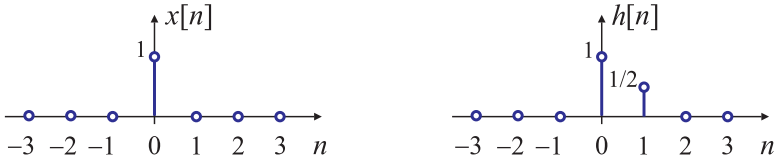


Ejercicio 10. Calcular la suma convolución de $x[n] = u[n] - u[n-20]$ con $h[n]$, si:

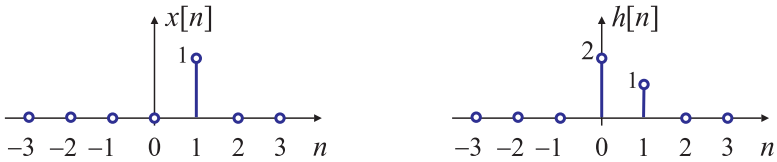
1. $h[n] = \delta[n]$.
2. $h[n] = \delta[n-3] - 2\delta[n-6]$.

Ejercicio 11. Calcular mediante la convolución discreta la respuesta de un sistema lineal invariante al desplazamiento, en los siguientes casos:

1. Sistema 1:



2. Sistema 2:



Ejercicio 12. Ante una entrada $x[n]$, la salida $y[n]$ de un SLIT con respuesta impulsiva $h[n]$ es

$$y[n] = \sum_m h[m]x[n-m] = \sum_m x[m]h[n-m].$$

Para cada uno de los siguientes casos determine explícitamente los extremos de cada sumatoria. Suponga que las señales no son de longitud finita.

1. $h[n]$ y $x[n]$ son anticausales ($h[n] = x[n] = 0$ para todo $n \geq 0$).
2. $h[n]$ y $x[n]$ son causales.
3. $h[n]$ es causal y $x[n]$ es anticausal.
4. $h[n]$ es anticausal y $x[n]$ es causal.

Ejercicio 13. Sean $x[n]$, con $L_1 \leq n \leq U_1$ y $h[n]$, con $L_2 \leq n \leq U_2$ dos señales de duración finita, es decir, $x[n] = 0$ si $n \in)L_1, U_1($ y $h[n] = 0$ si $n \in)L_2, U_2($.

1. Determine el rango $L \leq n \leq U$ donde la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ es no nula en términos de L_1, L_2, U_1, U_2.
2. Demuestre que la salida $y[n]$ está dada por

$$y[n] = \sum_{k=\text{máx}(L_1, n-U_2)}^{\text{mín}(U_1, n-L_2)} x[k]h[n-k] = \sum_{k=\text{máx}(L_2, n-U_1)}^{\text{mín}(U_2, n-L_1)} x[n-k]h[k].$$

3. Verifique sus resultados calculando la convolución de las señales:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} 2, & -1 \leq n \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Ejercicio 14. Calcule la salida del sistema cuya respuesta impulsiva es $h[n] = a^n u[n]$ si la señal de entrada $x[n] = u[n] - u[n-10]$. Determine el rango $L_1 \leq n \leq L_2$ donde la salida $y[n]$ es no nula.

Ejercicio 15. Para las señales que se indican a continuación calcule analítica y gráficamente la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$. Revise las soluciones de acuerdo a los resultados del Ejercicio 13.

1. $$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & 0 \leq n \leq 6, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. $$x[n] = \begin{cases} \alpha^n, & -3 \leq n \leq 5, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Ⓒ **Ejercicio 16.** Efectúe las siguientes operaciones, y elabore sobre sus resultados:

1. Multiplique los números enteros 131 y 122.
2. Calcule la convolución de las señales {1,3,1} y {1,2,2}.
3. Multiplique los polinomios $1 + 3x + x^2$ y $1 + 2x + 2x^2$.

4. Multiplique los números 1.31 y 12.2.

Ejercicio 17. Demuestre que si la entrada a un SLIT discreto es una señal periódica $\tilde{x}[n]$ de período N, la salida $\tilde{y}[n]$ también es periódica con el mismo período N.

Ejercicio 18. Si $z[n] = x[n] * y[n]$, y $w[n] = x[n - N_1] * y[n - N_2]$, determine la relación entre $z[n]$ y $w[n]$.

Ejercicio 19. Verifique que la convolución:

1. es *conmutativa*: $x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$. Realice una demostración formal.
2. es *asociativa* $(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
3. Estas propiedades se satisfacen sólo si las sucesiones involucradas son **estables**, es decir que son **absolutamente sumables**. Como contraejemplo, verifique que la asociatividad *no* se cumple si $x[n] = c =$ constante, $y[n] = u[n]$, y $z[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

Ejercicio 20. Determine, si es posible, la respuesta al impulso de los sistemas definidos por las siguientes ecuaciones entrada-salida:

1. $y[n] = x[n] - x[n-4]$, el sistema es causal.
2. $y[n] = x[n] - x[n-4]$, el sistema *no* es causal.
3. $y[n] = 2x[n] + 4x[n-1] + 2x[n-2]$, el sistema es causal.
4. $y[n] + y[n-1] = x[n-1]$, el sistema es causal.
5. $y[n] + y[n-1] = x[n-1]$, el sistema *no* es causal.
6. $y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$, el sistema es causal.

Ejercicio 21. Para el sistema lineal causal descripto por la ecuación a diferencias de segundo orden

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2x[n-1],$$

1. Determine la respuesta homogénea del sistema, es decir, las respuestas posibles si $x[n] = 0$ para todo n.
2. Calcule la respuesta impulsiva del sistema.
3. Calcule la respuesta del sistema si $x[n] = u[n]$.

Ejercicio 22. Para el sistema caracterizado por la ecuación a diferencias finitas

$$y[n] = a\,x[n] + b\,y[n-1], \qquad y[-1] = 0.$$

1. Obtenga la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema y exprésela en forma cerrada. ¿Es causal o no? ¿Por qué?
2. Calcule la respuesta a una entrada escalón unitario $x[n] = u[n]$, dando valores a los parámetros a y b de forma tal que la amplitud de la respuesta de estado estacionario sea unitaria ($|y_{ee}| = \lim_{n\to\infty} y[n] = 1$)

Ejercicio 23. Para el sistema *causal* caracterizado por la ecuación a diferencias finitas

$$y[n] = ny[n-1] + x[n], \qquad y[-1] = 0.$$

1. Determine la respuesta impulsiva $h[n]$ para todo n.
2. ¿El sistema es lineal?
3. ¿El sistema es invariante en el tiempo?
4. ¿El sistema es estable?

Ejercicio 24. Analice si el sistema descrito por la ecuación a diferencias finitas

$$y[n] - (-1)^n y[n-1] = x[n],$$

con $y[-1] = 0$, es:

1. lineal;
2. causal;
3. entrada-salida estable ("BIBO" estable);
4. invariante en el tiempo.

(I) **Ejercicio 25.** ¿Por qué la respuesta impulsiva de un sistema causal debe verificar $h[n] = 0$ para $n < 0$?

Ejercicio 26. Si $x_e[n]$ y $x_o[n]$ son las partes par e impar de $x[n]$, demuestre que una señal de energía finita verifica

$$\sum_n |x[n]|^2 = \sum_n |x_e[n]|^2 + \sum_n |x_o[n]|^2 .$$

Ayuda: demuestre primero que $4x_e[n]x_o[n] = (x[n])^2 - (x[-n])^2$.

Ejercicio 27. La correlación entre dos señales $x[n]$ e $y[n]$ se define como

$$r_{xy}[n] = \sum_k x[k]y[k-l].$$

Determine la relación entre la convolución $x[n] * y[n]$ y la correlación $r_{xy}[n]$.

Ⓜ **Ejercicio 28.** *Convolución de dos sucesiones de distinta duración.*

MATLAB no puede ser utilizado directamente para calcular la convolución de dos señales arbitrarias de longitud infinita. Se provee una función llamada `conv` que calcula la convolución entre dos sucesiones de duración finita. La función `conv` asume que las dos sucesiones comienzan en la muestra $n = 0$, y se invoca mediante

```
≫ y = conv(x,h)
```

El inconveniente es que esta función no soporta "información temporal" para trabajar correctamente con funciones que comiencen en otro índice distinto de $n = 0$. El propósito de este ejercicio es solucionar este inconveniente.

Implemente una función `conv_m` que permita tener en cuenta la información temporal de las señales. La función deberá tener como entrada no sólo las sucesiones a convolucionar, sino también un par de vectores que indiquen la extensión temporal de cada una de ellas. Por ejemplo, la sucesión $x[-3] = 1$, $x[-2] = 2$, $x[-1] = 3$, $x[0] = 4$, $x[1] = 3$, $x[2] = 2$ se especificará mediante las sucesiones

```
x  = [ 1  2  3  4  3  2];
nx = [-3 -2 -1  0  1  2];
```

La función deberá invocarse de la siguiente manera

```
[y,ny] = conv_m(x,nx,h,nh)
```

Pruebe su función efectuando la correlación de las siguientes sucesiones

```
x = [3 11  7  0 -1  4  2]; nx = [-3:3];
h = [2  3  0 -5  2  1];    nh = [-1:4];
```

y revise los resultados de los ejercicios 10, 11, 13, 14 y 15.

Ayuda: Los resultados del Ejercicio 13 son de utilidad para calcular correctamente la información temporal de la señal resultado de la convolución (`ny` en los ejemplos previos).

Comentario: Las sucesiones temporales discretas pueden graficarse utilizando el comando `stem`. Por ejemplo, `stem(nx,x)` grafica la sucesión temporal $x[n]$. La entrada $x[n]$, la respuesta impulsiva del sistema $h[n]$, y la salida $y[n]$ se pueden graficar con los siguientes comandos:

```
figure;
subplot(3,1,1);stem(nx,x); ylabel('x[n]');
subplot(3,1,2);stem(nh,h); ylabel('h[n]');
subplot(3,1,3);stem(ny,y); ylabel('y[n]');
```

El tamaño de los círculos puede cambiarse por medio de la propiedad `MarkerSize`. Por ejemplo:

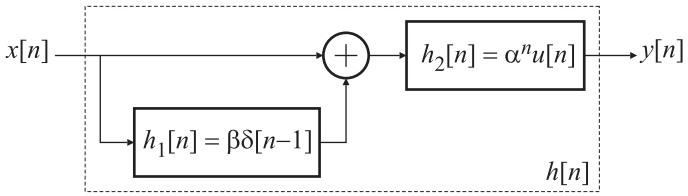
```
h = stem(ny,y)
set(h,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b')
```

hace que los círculos sean más pequeños, y estén coloreados de azul.

3.9. Ejercicios: Respuesta en frecuencia

Ejercicio 1. Para el sistema con respuesta impulsiva $h[n]$ que se muestra en la figura,

1. calcule la respuesta impulsiva $h\,[n]$ y la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$;
2. encuentre una ecuación a diferencias que relacione la salida $y\,[n]$ con la entrada $x\,[n]$;
3. determine si es causal;
4. encuentre bajo qué condiciones es estable.



Ejercicio 2. Calcule la salida $y[n]$, $-\infty < n < \infty$, para el sistema discreto con respuesta en frecuencia

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{1+e^{-j2\omega}+4e^{-j4\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j2\omega}}\right),$$

cuando la entrada es $x[n] = \cos(\pi n/2)$, $-\infty < n < \infty$.

Ejercicio 3. Para el sistema discreto con respuesta impulsiva $h\,[n] = (j/2)^n\,u\,[n]$, donde $j = \sqrt{-1}$, determinar la respuesta en estado estacionario (es decir, para n grande) cuando la excitación es $x\,[n] = \cos(\pi n)\;u\,[n]$.

Ejercicio 4. Para el sistema representado por la ecuación a diferencias $y\,[n] = (-1)^n\,x[n]$,

1. Determine y justifique si es
   a) lineal;
   b) causal;
   c) invariante al desplazamiento;
   d) BIBO estable.
2. Calcule la DTFT $Y\left(e^{j\omega}\right)$ de $y[n]$ en función de la DTFT $X\left(e^{j\omega}\right)$ de $x[n]$.
3. En base al resultado del inciso anterior, grafique el módulo de los espectros de $x[n]$ e $y[n]$ cuando $x[n] = \cos \pi n/6$.

(I) **Ejercicio 5.** En la tabla se muestran las entradas y salidas de cinco sistemas. Determine si cada uno de ellos puede ser lineal e invariante en el tiempo. Si la respuesta es afirmativa, especifique si puede haber más de un SLIT con el mismo par de señales entrada/salida. Justifique sus respuestas.

Sistema	Entrada	Salida
A	$(1/2)^n$	$(1/4)^n$
B	$e^{j\frac{n}{8}}u[n]$	$2e^{j\frac{n}{8}}u[n]$
C	$e^{j\frac{n}{8}}$	$2e^{j\frac{n}{8}}$
D	$e^{j\frac{n}{8}}u[n]$	$e^{j\frac{n}{6}}u[n]$
E	$e^{j\frac{n}{8}}$	$e^{j\frac{n}{6}}$

Ejercicio 6. Determine analíticamente la DTFT de cada una de las siguientes sucesiones. Grafique el módulo y la fase de $X\left(e^{j\omega}\right)$ usando MATLAB.

1. $x[n] = 3\,(0{,}9)^n\,u[n]$.
2. $x[n] = 2\,(0{,}8)^{n+2}\,u[n-2]$.
3. $x[n] = n\,(0{,}5)^n\,u[n]$.
4. $x[n] = (n+2)\,(-0{,}7)^{n-1}\,u[n-2]$.

(I) **Ejercicio 7.** Usando la propiedad de desplazamiento frecuencial, muestre que la DTFT de un pulso sinusoidal $x[n] = \cos(\omega_0 n)\,R_N[n]$ con

$$R_N[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

es

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\text{sen}[(\omega-\omega_0)\,(2N+1)\,/2]}{\text{sen}[(\omega-\omega_0)\,/2]}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\text{sen}[(\omega+\omega_0)\,(2N+1)\,/2]}{\text{sen}[(\omega+\omega_0)\,/2]}\right\}.$$

Ejercicio 8. Sea $H\left(e^{j\omega}\right)$ la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n]$, donde $h[n]$ es compleja.

1. Demuestre que $H^*\left(e^{-j\omega}\right)$ es la respuesta en frecuencia de un sistema con respuesta impulsiva $h^*[n]$.
2. Muestre que si $h[n]$ es real, la respuesta en frecuencia es conjugada simétrica, *i.e.* $H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$.

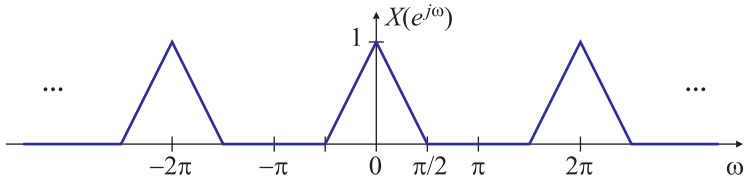
Ejercicio 9. Si $X\left(e^{j\omega}\right)$ la transformada de Fourier de la sucesión $x[n]$ (que se supone compleja), demuestre los siguientes pares transformados:

1. $x^*[n] \Leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right)$.
2. $x^*[-n] \Leftrightarrow X^*\left(e^{j\omega}\right)$.

3. $\text{Re}\{x[n]\} \Leftrightarrow X_e(e^{j\omega}) \doteq \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\right]$, el conjugado simétrico de $X(e^{j\omega})$.

4. $j\,\text{Im}\{x[n]\} \Leftrightarrow X_o(e^{j\omega}) \doteq \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\right]$), el conjugado antisimétrico de $X(e^{j\omega})$.

Ejercicio 10. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de la sucesión $x[n]$. Determine las transformadas de $y_s[n]$, $y_d[n]$ y de $y_e[n]$ en función de $X(e^{j\omega})$, si $X(e^{j\omega})$ es como se muestra en la figura.



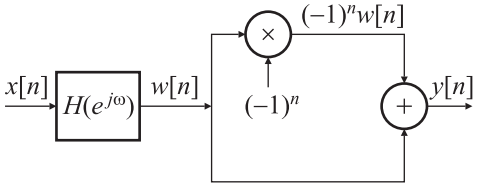
1. Muestreador: $y_s[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$

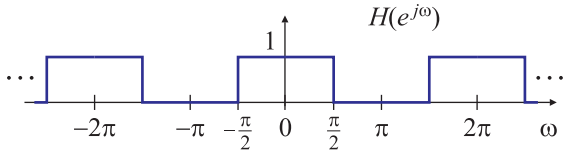
2. Compresor: $y_d[n] = x[2n]$.

3. Expansor: $y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$

Ejercicio 11. Para el sistema de la figura, determine la salida $y[n]$ cuando la entrada $x[n]$ es un impulso unitario $\delta[n]$, y $H(e^{j\omega})$ es el filtro pasabajos ideal con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$





Ejercicio 12. Si $X(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de la sucesión $x[n]$, demuestre las siguientes propiedades:

1. la transformada de Fourier de $nx[n]$ es $j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$.

2. (Teorema de Parseval)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) Y^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega.$$

Ejercicio 13. Un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo está caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \sqrt{2}x[n-1] + x[n-2].$$

1. Calcule la respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\omega}\right)$.
2. Determine la salida de estado estacionario ante una entrada

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 1.$$

Ejercicio 14. La respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante en el tiempo es

$$h[n] = \frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1].$$

1. Calcule y grafique la respuesta en frecuencia.
2. Calcule la respuesta de estado estacionario $y_{ee}[n]$ ante una entrada

$$x[n] = \left[3 + 2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}n + \theta_1\right) + 4\cos\left(\tfrac{\pi}{3}n + \theta_2\right)\right] u[n].$$

   Exprese el desfasaje entre la entrada y la salida en muestras.
3. Calcule la respuestra transitoria $y_{tr}[n]$

Ejercicio 15. Un sistema lineal e invariante en el tiempo está descripto por la ecuación a diferencias

$$y[n] = \sum_{m=0}^{3} x[n-2m] - \sum_{m=1}^{3} (0{,}81)^m\, y[n-2m].$$

Calcule analíticamente la respuesta de estado estacionario del sistema ante las siguientes excitaciones:

1. $x[n] = 5 + 10\,(-1)^n$.
2. $x[n] = 1 + \cos\left(0{,}5\pi n + \pi/2\right)$.
3. $x[n] = 2\operatorname{sen}\left(\pi n/4\right) + 3\cos\left(3\pi n/4\right)$.
4. $x[n] = \sum_{k=0}^{5} (k+1)\cos\left(\pi k n/4\right)$
5. $x[n] = \cos\left(\pi n\right)$.

Ⓜ Para cada caso, genere con MATLAB la señal $x[n]$, $0 \leq n \leq 200$, y procésela con la función `filter` para obtener $y[n]$. Compare la respuesta obtenida con las respuestas de estado estacionario calculadas para cada caso.

Ejercicio 16. Dos sistemas y lineales e invariantes en el tiempo $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ y $H_2\left(e^{j\omega}\right)$ se conectan en cascada. El sistema $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ tiene la respuesta en frecuencia

$$H_1\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| < \pi, \end{cases}$$

y el sistema $H_2\left(e^{j\omega}\right)$ está descrito por la ecuación a diferencias $y[n] = x[n] - x[n-1]$. La entrada al sistema es $x[n] = \cos(0{,}6\pi n) + 3\delta[n-5] + 2$, para $-\infty < n < \infty$. Aplicando las propiedades de linealidad e invariación temporal, determine la respuesta del sistema (puede hacerse directamente por inspección). Justifique sus pasos.

(I) **Ejercicio 17.**La convolución dos sucesiones $x[n]$ e $y[n]$ es idénticamente nula: $x[n] * y[n] \equiv 0$. A partir de este resultado, ¿puede afirmar que alguna de las dos sucesiones es idénticamente nula? Considere estos casos:

1. Las sucesiones son de longitud finita.
2. Las sucesiones son de longitud infinita.
3. Una de las sucesiones es de longitud finita, y la otra de longitud infinita.

Si la respuesta es afirmativa, justifique, y en caso contrario elabore un contraejemplo.

Ejercicio 18. Un filtro pasabajos ideal con retardo nulo tiene respuesta impulsiva $h_{PB}[n]$, y respuesta en frecuencia

$$H_{PB}\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/5, \\ 0, & \pi/5 \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

En base a la respuesta impulsiva de este filtro se construyen los tres filtros que se indican a continuación. Para cada caso calcule la respuesta en frecuencia, grafíquela para $|\omega| \leq \pi$, y determine el tipo de filtro (pasabajos, pasa altos, pasabanda, eliminabanda).

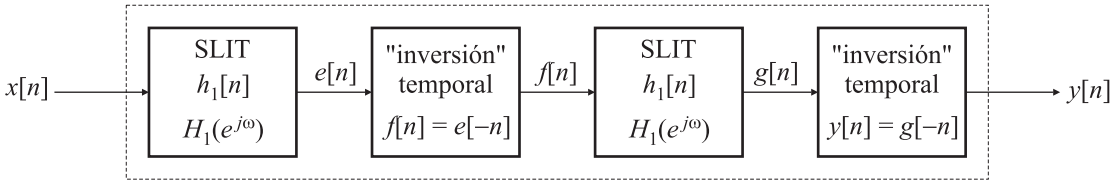
1. $h_1[n] = (-1)^n h_{PB}[n] = e^{j\pi n} h_{PB}[n]$.
2. $h_2[n] = 2h_{PB}[n] \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$.
3. $h_3[n] = \frac{1/10}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{10} n\right) h_{PB}[n]$.

(I) **Ejercicio 19.** Un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n]$ tiene respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\omega}\right)$.

1. Demuestre que el sistema es FIR (es decir, que su respuesta impulsiva tiene un longitud finita), sabiendo que:
   a) El sistema es causal;
   b) $H\left(e^{j\omega}\right) = H^*\left(e^{-j\omega}\right)$;
   c) La transformada de Fourier de $h[n+1]$ es real;

2. Si además de las condiciones anteriores, se verifican las dos condiciones que se listan a continuación, ¿tiene información suficiente para caracterizar completamente el sistema?. En caso afirmativo, determine la respuesta impulsiva $h[n]$. En caso contrario, especifique las condiciones que debe satisfacer $h[n]$.
   a) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\omega}\right) d\omega = 2$;
   b) $H\left(e^{j\pi}\right) = 0$.

(I) **Ejercicio 20.** En la cascada de sistemas discretos que se muestra en la figura, el inversor temporal está definido por las ecuaciones $f[n] = e[-n]$ e $y[n] = g[-n]$. Si las sucesiones $x[n]$ y $h_1[n]$ son reales,



1. Exprese $E\left(e^{j\omega}\right)$, $F\left(e^{j\omega}\right)$, $G\left(e^{j\omega}\right)$ e $Y\left(e^{j\omega}\right)$ en función de $X\left(e^{j\omega}\right)$ y $H_1\left(e^{j\omega}\right)$.
2. Encuentre la respuesta $H\left(e^{j\omega}\right)$ del sistema completo.
3. Determine la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema completo en función de $h_1[n]$.

(I) **Ejercicio 21.** Calcule la salida de un SLIT con respuesta en frecuencia

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} e^{j\omega 3}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16}\left(\frac{3}{2}\right), \\ 0, & \frac{2\pi}{16}\left(\frac{3}{2}\right) \leq |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

si la entrada es un tren de impulsos unitarios con período $N = 16$:

$$x\left[n\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - 16m].$$

Ayuda: Para calcular $X(e^{j\omega})$ tenga en cuenta que $\sum_n e^{-j\omega n} = \sum_r 2\pi\delta(\omega + 2\pi r)$.

Ejercicio 22. Un sistema con respuesta impulsiva $g[n]$ es el *sistema inverso* del sistema con respuesta impulsiva $h[n]$ si $h[n] * g[n] = \delta[n]$. Si $h[n] = a^n u[n-1]$, con $|a| < 1$,

1. calcule la respuesta en frecuencia $G(e^{j\omega})$ y la respuesta impulsiva $g[n]$ del sistema inverso;
2. determine si el sistema inverso es causal y estable.
3. Si $|a| > 1$, ¿existe el sistema inverso? En caso afirmativo ¿es estable? ¿es causal?

3.10. Solución de algunos ejercicios

Ejercicio 7

Para el sistema lineal $\mathcal{S}$ con respuesta impulsiva $h_\ell[n] = a^n b^{-\ell} u[n-\ell]$, con $n \geq \ell \geq 0$, y $|a| < 1$, $|b| < 1$

1. Determine si es invariante en el tiempo.
2. Calcule la respuesta $y_1[n]$ del sistema ante una entrada escalón $x_1[n] = u[n]$.
3. Calcule la salida $y_2[n]$ cuando se lo excita con una entrada $x_2[n] = u[n-1]$. Compare $y_2[n]$ con $y_1[n]$.

En cada inciso analice los casos en que (*i*) $a = b$ y (*ii*) $a \neq b$.

1. Evidentemente, el sistema es *variante en el tiempo*. La respuesta impulsiva $h_0[n]$ ante una entrada impulsiva $x_0[n] = \delta[n]$ (aplicada en $n = 0$) es

   $$h_0[n] = a^n u[n],$$

   mientras que la respuesta $h_1[n]$ ante una entrada $x_1[n] = \delta[n-1]$ aplicada en $n = 1$ es

   $$h_1[n] = a^n b^{-1} u[n-1].$$

   Es claro que $h_1[n] \neq h_0[n-1]$, y por lo tanto el sistema es *variante en el tiempo*.

2. Si la entrada $x_1[n]$ es un escalón, $x_1[n] = u[n]$ la respuesta está dada por

   $$\begin{aligned} y_1[n] &= \sum_\ell x[\ell] h_\ell[n] = \sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell] a^n b^{-\ell} u[n-\ell] = \sum_{\ell=0}^{n} a^n b^{-\ell} \\ &= a^n \frac{(b^{-1})^{n+1} - 1}{b^{-1} - 1} = a^n b^{-n} \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

   Si $a = b$, $h_\ell[n] = a^n a^{-\ell} u[n-\ell] = a^{n-\ell} u[n-\ell]$. En este caso el sistema es invariante en el tiempo, ya que la respuesta impulsiva $h_0[n]$ ante una entrada impulsiva $x_0[n] = \delta[n]$ (aplicada en $n = 0$) es

   $$h_0[n] = a^n u[n],$$

   mientras que la respuesta $h_1[n]$ ante una entrada $x_1[n] = \delta[n-1]$ aplicada en $n = 1$ es

   $$h_1[n] = a^{n-1} u[n-1].$$

   Ahora $h_1[n] = h_0[n-1]$, y por lo tanto el sistema es *invariante en el tiempo*. La respuesta del sistema ante una entrada escalón es, de acuerdo con (3.67)

   $$y_1[n] = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}. \tag{3.68}$$

   El cáculo por definición da el mismo resultado:

   $$\begin{aligned} y_1[n] &= \sum_\ell x[\ell] h_\ell[n] = \sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell] a^{n-\ell} u[n-\ell] = \sum_{\ell=0}^{n} a^{n-\ell} \\ &= a^n \frac{(a^{-1})^{n+1} - 1}{a^{-1} - 1} = \frac{a^{-1} - a^n}{a^{-1} - 1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}. \end{aligned}$$

3. Si la entrada $x_2[n]$ es un escalón demorada una muestra, $x_2[n] = u[n-1]$, la salida $y_2[n]$ resulta

$$\begin{aligned} y_2[n] &= \sum_\ell x[\ell]h_\ell[n] = \sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell-1]a^n b^{-\ell}u[n-\ell] = \sum_{\ell=1}^{n} a^n b^{-\ell} \\ &= a^n\left[\frac{(b^{-1})^{n+1}-1}{b^{-1}-1} - 1\right] = a^n b^{-n}\frac{1-b^n}{1-b}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Aunque $x_2[n] = x_1[n-1]$, comparando (3.67) con (3.69) se nota que $y_2[n] \neq y_1[n-1]$, ya que

$$\begin{aligned} y_1[n-1] &= a^{n-1}b^{-n+1}\frac{1-b^n}{1-b} \\ y_2[n] &= a^n b^{-n}\frac{1-b^n}{1-b} = \frac{b}{a}y_1[n-1]. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Si $a = b$, el sistema es *invariante* en el tiempo, como se observa de (3.70), que resulta en $y_2[n] = y_1[n-1]$. El cálculo por definición da el mismo resultado:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \sum_\ell x[\ell]h_\ell[n] = \sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell-1]a^{n-\ell}u[n-\ell] = \sum_{\ell=1}^{n} a^{n-\ell} \\ &= a^n\left[\frac{(a^{-1})^{n+1}-1}{a^{-1}-1} - 1\right] = \frac{1-a^n}{1-a}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

En este caso ($a = b$) si se comparan (3.68) con (3.71) se observa también que $y_2[n] = y_1[n-1]$.

4

Series y Transformadas de Fourier

El material de estudio de este capítulo es el Capítulo 8, "The Discrete Fourier Transform" del libro de Oppenheim, A., Schafer, R., y Buck, J., *Discrete-Time Signal Processing*, segunda edición, Prentice-Hall, Inc., 1998, pp. 541–628.

En estas notas se estudian algunos aspectos de la dualidad tiempo-frecuencia entre las señales continuas y discretas, y se incluyen algunos comentarios sobre matrices circulantes, que resultan útiles para expresar la convolución circular de sucesiones discretas (vea el Ejercicio 26).

4.1. Dualidad tiempo-frecuencia

Las herramientas de análisis frecuencial que se han desarrollado hasta ahora suelen aplicarse a una variedad de señales (biológicas, sísmicas, electromagnéticas, etc.). El objetivo del análisis frecuencial es extraer información de la señal observada. Las herramientas de análisis frecuencial ayudan al diagnóstico en el caso de señales biológicas, por ejemplo a partir de un electrocardiograma. En el caso de señales sísmicas, son útiles para detectar la presencia o ausencia de explosiones, o para determinar las características y ubicación del epicentro de un terremoto. El espectro de algunas señales electromagnéticas, por ejemplo un eco radar reflejado por un avión permite conocer su posición y velocidad radial.

En esta sección se discuten algunas dualidades importantes entre las características frecuenciales y temporales de las señales.

4.1.1. Dualidades físicas y matemáticas

En los capítulos previos se han introducido varios métodos y técnicas que permiten analizar el contenido frecuencial de una señal. Las herramientas principales son:

1. La Serie de Fourier (SF) para señales $\tilde{x}(t)$ periódicas y continuas[1]:

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \qquad 0 \leq t < T, \tag{4.1}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt, \qquad -\infty < k < \infty. \tag{4.2}$$

2. La Transformada de Fourier (TF) para señales $x(t)$ aperiódicas y continuas:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{4.3}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \qquad -\infty < f < \infty. \tag{4.4}$$

3. La Serie Discreta de Fourier (SDF) para señales $\tilde{x}[n]$ periódicas y discretas:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad -\infty < n < \infty, \tag{4.5}$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad -\infty < k < \infty. \tag{4.6}$$

4. La Transformada de Fourier de señales de Tiempo Discreto (TFTD) para señales $x[n]$ aperiódicas y discretas, de longitud arbitraria:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega, \qquad -\infty < n < \infty, \tag{4.7}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \qquad 0 \leq \omega < 2\pi. \tag{4.8}$$

[1] En este caso, "continuo" o "discreto" se refiere a señales en el cuales la variable independiente es continua o discreta, respectivamente.

5. La Transformada de Fourier (TDF), derivada a partir de la SDF, para señales $x[n]$ aperiódicas y discretas de longitud N finita:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{4.9}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad 0 \le k \le N-1. \tag{4.10}$$

La Fig. 4.1 resume las ecuaciones de análisis y síntesis para estos tipos de señales. Como se ha indicado anteriormente, son dos las características temporales que determinan el tipo de espectro que presenta una señal, de acuerdo a si la variable temporal es continua o discreta, y si la señal es periódica o no (aperiódica).

1. **Las señales continuas (en tiempo) tienen espectro aperiódico**. Una inspección detallada de la expresiones de análisis de la Serie de Fourier (SF) y de la Transformada de Fourier (TF) no revelan ningún tipo de periodicidad en el dominio espectral. Esta falta de periodicidad es consecuencia que la exponencial compleja $e^{j2\pi ft}$ es una función de la variable continua t, y por lo tanto no es periódica en f. Por ello el rango de frecuencias de las señales continuas se extiende desde $f \to -\infty$ hasta $f \to +\infty$. Por ejemplo,

$$x(t) = be^{-at}u(t) \qquad \overset{TF}{\Longleftrightarrow} \qquad X(f) = \frac{b}{a + j2\pi f}, \quad -\infty < f < +\infty. \tag{4.11}$$

   Para el caso de señales periódicas, los coeficientes de Fourier c_k quedan definidos para todo k ($k \in \mathbb{Z}$); por ejemplo, si $x(t)$ es una onda cuadrada con período T y ciclo de trabajo τ/T

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \operatorname{mod}(t,T) < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \qquad \overset{SF}{\Longleftrightarrow} \qquad c_k = \frac{\tau}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T}k\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.12}$$

2. **Las señales discretas (en tiempo) tienen espectro periódico**. La Transformada de Fourier de señales de Tiempo Discreto (TFTD) es continua y periódica con período $\omega = 2\pi$. Como resultado de esta periodicidad, el rango de frecuencia de las señales discretas es finito, y se extiende desde $\omega = -\pi$ hasta $\omega = +\pi$ radianes (o para $0 \le \varepsilon < 2\pi$), donde $\omega = \pm\pi$ es la máxima velocidad posible de oscilación. Por ejemplo,

$$x[n] = \beta a^n u[n] \qquad \overset{TFTD}{\Longleftrightarrow} \qquad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{4.13}$$

   Si las señales discretas son periódicas de período N, los coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$ de la serie discreta de Fourier también tienen periodicidad N. Por ejemplo,

$$\tilde{x}[n] = \sum_r \delta[n - rN] \qquad \overset{SDF}{\Longleftrightarrow} \qquad \tilde{X}[k] = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{4.14}$$

3. **Las señales continuas (en frecuencia) corresponden a señales aperiódicas**. Tanto la Transformada de Fourier (TF) como la Transformada de Fourier de señales de Tiempo Discreto (TFTD) están relacionadas con señales no periódicas en el dominio tiempo. Valen como ejemplo los pares transformados (4.11) y (4.13) dados más arriba.

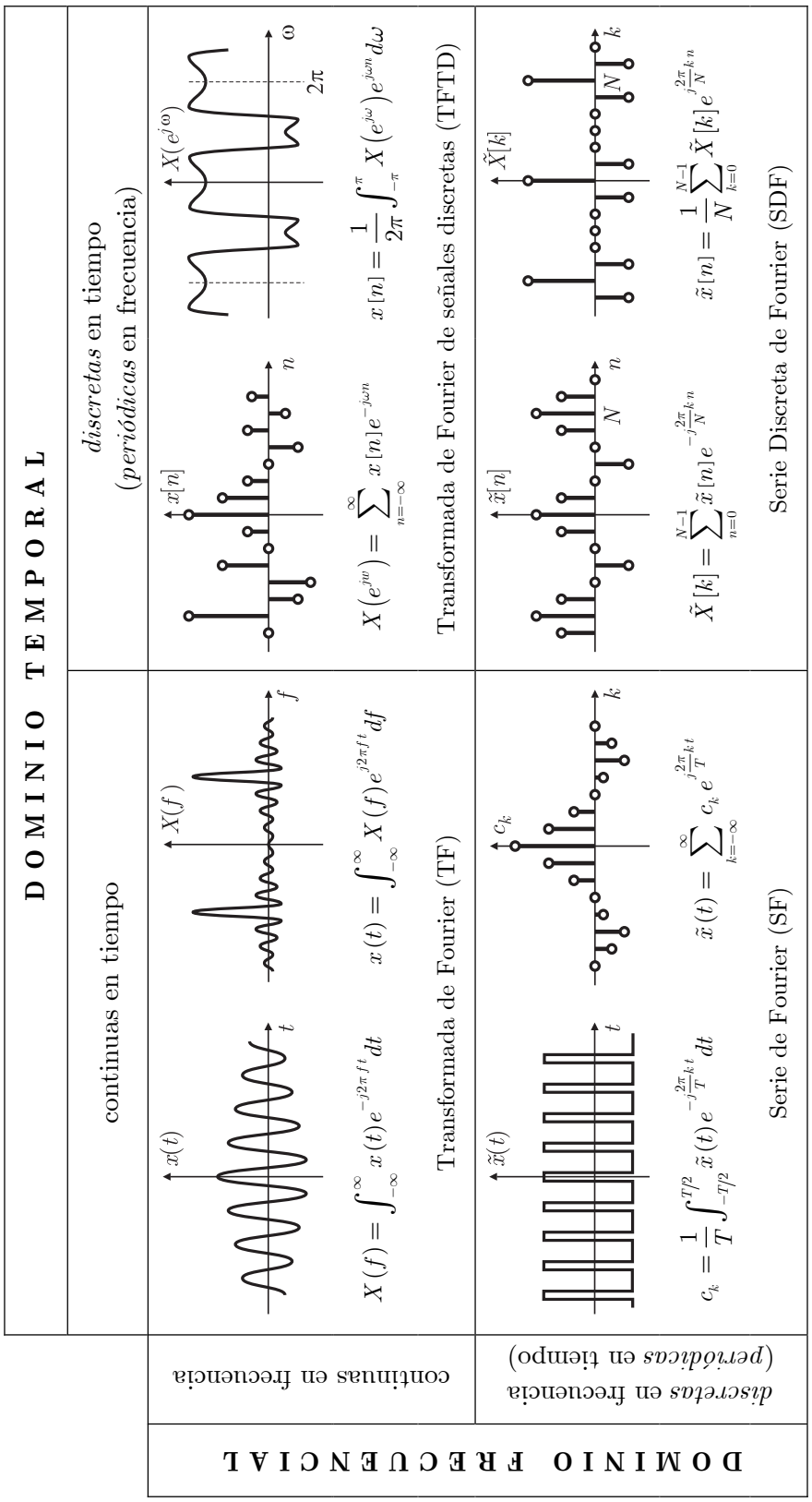


Fig. 4.1. Resumen de ecuaciones de análisis y síntesis.

4. **Se pueden definir transformadas para funciones periódicas**. La idea es ampliar la clase de funciones que tienen transformada de Fourier incluyendo funciones generalizadas (los impulsos). De esta manera, a partir de las Series de Fourier se pueden obtener las Transformadas, tanto para el caso continuo

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} X(f) &= \sum_k c_k\, \delta\left(f - \frac{k}{T}\right), \\ X(\Omega) &= \sum_k 2\pi\, c_k\, \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \end{aligned}$$

como para el caso discreto

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \Longrightarrow \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_k \frac{2\pi}{N}\, \tilde{X}[k]\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right).$$

5. **Las señales periódicas tienen espectro discreto**. Como se ha notado, las señales periódicas (continuas o discretas en tiempo) se describen utilizando la Serie de Fourier o la Serie Discreta de Fourier, respectivamente. Las transformadas respectivas se derivan a partir de los coeficientes de la serie, que determinan la amplitud de los impulsos que forman el espectro discreto. El espaciado entre líneas $\Delta f = 1/T$, para el caso continuo, o $\Delta\omega = 2\pi/N$, para el caso discreto, son la inversa del período T o N, respectivamente, en el dominio temporal. Por ejemplo, para el caso continuo

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \operatorname{mod}(t, T) < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \qquad \overset{TF}{\Longleftrightarrow} \qquad X(f) = \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T}k\right),$$

que se deriva de (4.12) o, para el caso discreto

$$\tilde{x}[n] = \sum_r \delta[n - rN] \qquad \overset{TFTD}{\Longleftrightarrow} \qquad \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_k \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right).$$

que se obtiene a partir de (4.14)

6. **Las señales aperiódicas de energía finita tienen espectro continuo**. Esta propiedad es una consecuencia directa del hecho que tanto $X(f)$ como $X\left(e^{j\omega}\right)$ son funciones de $e^{j2\pi ft}$ y de $e^{j\omega n}$, respectivamente. La continuidad del eje de frecuencias es necesaria para "romper" la relación armónica entre las distintas componentes frecuenciales, creando así señales aperiódicas. Valen como ejemplo los pares transformados (4.11) o (4.13).

7. **La serie de Fourier se puede determinar a partir de la transformada**. Si se conoce la transformada de Fourier de *un período* de la señal periódica, los coeficientes de la serie de Fourier (c_k para señales continuas, y $X[k]$ para señales discretas en tiempo) se pueden determinar tomando muestras de la transformada. Para el caso continuo,

$$c_k = \frac{1}{T}\, X(f)\big|_{f=\frac{k}{T}} = f_0\, X(f)\big|_{f=kf_0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y para el caso discreto,

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para el caso particular de la SDF $\tilde{X}[k]$ y la TDF $X[k]$, la relación es trivial:

$$\tilde{X}[k] = X[((k))_N], \quad k \in \mathbb{Z}$$

8. **La propiedad de dualidad sólo se aplica para la TF, la SF y la TDF**, ya que es necesario que las variables independientes sean de la misma naturaleza (continuas o discretas) en ambos dominios (temporal y frecuencial). Para el caso continuo,

$$x(t) \overset{TF}{\Longleftrightarrow} X(f) \qquad\qquad X(t) \overset{TF}{\Longleftrightarrow} x(-f)$$

y para el caso discreto,

$$\tilde{x}[n] \overset{SDF}{\Longleftrightarrow} \tilde{X}[k] \qquad\qquad \tilde{X}[n] \overset{SDF}{\Longleftrightarrow} N\,\tilde{x}[-k]$$

$$x[n] \overset{TDF}{\Longleftrightarrow} X[k] \qquad\qquad X[n] \overset{TDF}{\Longleftrightarrow} N\,x[((-k))_N]$$

9. **La Transformada Discreta de Fourier (TDF) puede no cumplir con algunas de estas propiedades**, porque en realidad está formada por un período de una función periódica. En particular, la TDF no cumple con las Propiedades 2 a 6.

En síntesis, se puede concluir que la periodicidad con período α en un dominio automáticamente implica discretización con espaciado $1/\alpha$ en el dominio transformado, y viceversa.

4.1.2. Simetrías y dualidades

Estas dualidades tiempo-frecuencia son evidentes de la observación de la Fig. 4.1. Las funciones utilizadas en la figura son sólo ilustrativas y no corresponden necesariamente a pares transformados. La observación cuidadosa de la Fig. 4.1 revela también algunas simetrías matemáticas y dualidades entre las diferentes ecuaciones de análisis y síntesis. En particular, se destacan las siguientes:

- Las ecuaciones de síntesis y análisis de la Transformada de Fourier de señales continuas (TF): ecuaciones (4.3)-(4.4)
- Las ecuaciones de síntesis y análisis de la Serie Discreta de Fourier (SDF) -Trasformada Discreta de Fourier (TDF): ecuaciones (4.5)-(4.6) y (4.9)-(4.10).
- La ecuación de análisis de la Serie de Fourier (SF) de señales continuas con la ecuación de síntesis de la Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD): ecuaciones (4.2)-(4.7).
- La ecuación de análisis de la Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD) y la ecuación de síntesis de la Serie de Fourier para señales continuas (SF): ecuaciones (4.8)-(4.1).

4.1.3. Características comunes

Algunas características comunes de los pares transformados son:

- La transformada de Fourier $X(\cdot)$ tiene un argumento real f (o ω) cuando $x(\cdot)$ es aperiódica, y un argumento entero k cuando $x(\cdot)$ es periódica. La función $x(\cdot)$ tiene un argumento real t cuando $X(\cdot)$ es aperiódica, y un argumento entero n cuando $X(\cdot)$ es periódica.

$$x(\cdot) \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \textbf{aperiódica} \\ \textbf{periódica} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{el argumento } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ de } X(f),\ \omega \text{ de } X(e^{j\omega}) \text{ es } \textbf{real.} \\ k \text{ de } c_k,\ k \text{ de } X[k] \text{ es } \textbf{entero.} \end{array} \right.$$

$$X(\cdot) \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \textbf{aperiódica} \\ \textbf{periódica} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{el argumento } \left\{ \begin{array}{l} t \text{ de } x(t) \text{ es } \textbf{real.} \\ n \text{ de } x[n] \text{ es } \textbf{entero.} \end{array} \right.$$

- El argumento de las exponenciales que aparecen en las ecuaciones de análisis-síntesis es el producto de $\pm j2\pi$, el argumento f o k de $X(\cdot)$, el argumento t o n de $x(\cdot)$ y el recíproco $1/T$ o $1/N$ del período si la función $x(\cdot)$ o $X(\cdot)$ es periódica.

- Todas las relaciones duales difieren en el signo del exponente de la exponencial compleja asociada a la serie o a la transformada. El cambio de signo puede pensarse bien como un cambio de sentido del eje de tiempo, o un cambio de sentido del eje de frecuencias, ya que

$$e^{-j2\pi ft} = e^{j2\pi(-f)t} = e^{j2\pi f(-t)}.$$

  Sin embargo, debe notarse que la ecuación de *síntesis* utiliza la exponencial *positiva*, y todos los valores de $X(\cdot)$ para hallar $x(\cdot)$. La ecuación de *análisis*, en cambio, utiliza la exponencial *negativa*, y todos los valores de $x(\cdot)$ para determinar $X(\cdot)$.

- Desafortunadamente, los factores de escala $1/T$, $1/2\pi$, $1/N$ no aparecen de manera uniforme. Para el caso de la TF (cuando se emplea como variable la frecuencia Ω en radianes por segundo), la TFTD y la SDF/TDF, el factor de escala pesa la ecuación de *síntesis*. Sin embargo para la Serie de Fourier (SF) el factor $1/T$ acompaña a la ecuación de *análisis*. En algunos libros de orientación más matemática (Kammler, 2000; Bracewell, 1978), todos los factores recíprocos del período afectan a la ecuación de *análisis*, siguiendo la línea de la SF. Sin embargo, la notación que se sigue en el curso es la preferida desde el punto de vista ingenieril.

- Frecuentemente se utiliza la expresión *espectro de densidad de energía* para caracterizar señales de energía finita, aperiódicas, y la expresión *espectro de densidad de potencia* para señales que son periódicas. Esta nomenclatura es consistente con el hecho que las señales periódicas son señales de potencia finita, es decir que verifican

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\tilde{x}(t)|^2\, dt < \infty, \qquad \text{para señales continuas,}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 < \infty, \qquad \text{para señales discretas,}$$

y que las señales aperiódicas con energía finita son las que verifican

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(t)|^2 \, dt < \infty, \qquad \text{para señales continuas,}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}[n]|^2 < \infty, \qquad \text{para señales discretas.}$$

4.1.4. Evolución

Las señales temporales $x(t)$ que son aperiódicas y continuas puede ser consideradas como las funciones más generales en el dominio temporal. Tales señales estás definidas para todo t, es decir $-\infty \leq t \leq \infty$. La transformada de una señal aperiódica y continua en el tiempo, que se obtiene por medio de la integral de Fourier, también es continua y aperiódica, y está definida para todo f: $-\infty \leq f \leq \infty$.

Mientras que la transformada de Fourier (TF) es la transformación dominante desde un punto de vista teórico, la transformada discreta de Fourier (TDF), junto con su implementación eficiente (la *trasformada rápida* de Fourier, o FFT por las iniciales en inglés) es la herramienta que se utiliza en la práctica para computar todo tipo de transformadas de Fourier. Para reducir una función temporal que es continua y aperiódica, que debe analizarse con la Transformada de Fourier (TF) a una señal que sea discreta y de longitud finita, apropiada para el análisis con la TDF, se deben hacer un par de modificaciones. La primera modificación consiste en efectuar un muestreo temporal de la señal, que convierta la señal continua en una discreta:

$$x[n] = x(t)|_{t=nT}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La segunda modificación es la truncación de la señal $x[n]$ de manera de restringirla a un intervalo finito. Los efectos de estas dos modificaciones serán estudiados en los siguientes Capítulos.

4.2. Referencias

1. Bracewell, R. *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill Book Co., Electrical and Electronic Engineering Series, New York, 1978.

2. Kammler, D. *A First Course in Fourier Analysis*, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2000.

3. Roberts, R. A, Mullis, C. T. *Digital Signal Processing*, Addison Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1987.

4.3. Matrices circulantes

Las propiedades de las matrices circulantes son bien conocidas, y fácilmente derivables (Davies, 1979; Lancaster, 1969, p. 267); esta nota está basada en un apunte de Gray (2002). Dado un vector N-dimensional

$$\mathbf{c} = [c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}],$$

la matriz circulante asociada al vector tiene la forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & \cdots & c_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

donde cada fila es un desplazamiento cíclico de la fila anterior. El elemento (i,k) de $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_{i,k}$ está dado por

$$\mathbf{C}_{i,k} = c_{((k-i))_N},$$

donde $((i))_N$ representa la operación módulo: $((i))_N = i \bmod N$. Los autovalores λ_i y los autovectores $\mathbf{v}^{(i)}$ de $\mathbf{C}$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, son las soluciones de

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

o, de forma equivalente, de las N ecuaciones a diferencias

$$\sum_{n=0}^{m-1} c_{N-m+n} v_n + \sum_{n=m}^{N-1} c_{n-m} v_n = \lambda v_m,$$

donde $m = 0, 1, \ldots, N-1$, y v_m es la m-ésima componente del vector $\mathbf{v}$. Cambiando el índice de la sumatoria, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N-1-m} c_n v_{n+m} + \sum_{n=N-m}^{N-1} c_n v_{n-(N-m)} = \lambda v_m. \tag{4.16}$$

La ecuación a diferencias (4.16) lineal y con coeficientes constantes tiene una solución de la forma $y_k = \rho^k$. Sustituyendo en (4.16) y cancelando ρ^m resulta

$$\sum_{n=0}^{N-1-m} c_n \rho^n + \rho^{-N} \sum_{n=N-m}^{N-1} c_n \rho^n = \lambda. \tag{4.17}$$

Si se elige $\rho^{-N} = 1$ se simplifica (4.17) lo que permite expresar el autovalor λ como

$$\lambda = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \rho^n.$$

El autovector asociado es

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \\ \vdots \\ \rho^{N-1} \end{bmatrix},$$

donde el coeficiente $1/\sqrt{N}$ se elige de manera que $\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |v_n|^2\right) = 1$, es decir, que el autovector –pensado como una sucesión de valores– tiene energía unitaria. Como $\rho^{-N} = 1$, cada uno de los ρ_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ es una de las la N-ésimas raíces de la unidad, $\rho_k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$. Por lo tanto, el k-ésimo autovalor λ_k está dado por

$$\lambda_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^n, \tag{4.18}$$

que no es otra cosa que la k-ésima muestra de la TDF del vector $\mathbf{c}$ pensado como la sucesión $c[n]=\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$. El k-ésimo autovector es entonces

$$\mathbf{v}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

De (4.18) se puede escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*, \tag{4.20}$$

donde $\mathbf{U}$ es la matriz cuya columna m-ésima es el m-ésimo autovector

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{v}^{(0)} \left| \mathbf{v}^{(1)} \right| \ldots \left| \mathbf{v}^{(N-1)} \right| \right\},$$

o, expresado de otra manera,

$$\mathbf{U}_{i,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}ik},$$

con $i, k = 0, 1, \ldots, N-1$. Además, se verifica que $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

La matriz $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal dada por

$$\mathbf{\Lambda}_{ii} = \lambda_i,$$

lo que muestra que (4.20) puede interpretarse como una combinación de la TDF inversa y desplazamientos circulares. Para verificar (4.20), sea $\mathbf{A}_{ik}$ el elemento (i,k) de $\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ik} &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-i)m} \lambda_m \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-i)m} \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{-j\frac{2\pi}{N}mr} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} c_r \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-i-r)m}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Recordando que

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-i-r)m} = \begin{cases} N, & \text{si } k-i = ((r))_N, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

resulta

$$\mathbf{A}_{ik} = c_{((k-i))_N},$$

de modo que (4.20) y (4.15) son equivalentes. Más aún, la expresión (4.21) muestra que cualquier matriz de la forma (4.20) es circulante.

Como la matriz $\mathbf{C}$ es unitariamente similar a una matriz diagonal (Horn y Johnson, 1999), es normal ($\mathbf{C}\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^*\mathbf{C}$). Además ya que todas las matrices circulantes tienes los mismos autovectores (4.19), poseen las siguientes propiedades.

Teorema Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{B}$ matrices circulantes de dimensión $N \times N$ generadas por los vectores $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}]$, $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}]$: $\mathbf{C}_{k,j} = c_{((k-j))_N}$, $\mathbf{B}_{k,j} = b_{((k-j))_N}$, con autovalores

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-j\frac{2\pi}{N}km}, \qquad \beta_m = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j\frac{2\pi}{N}km},$$

respectivamente. Entonces:

1. Las matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{B}$ conmutan, y

   $$\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{U}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{U}^*$$

   donde $\boldsymbol{\gamma}$ es una matriz diagonal, $\gamma_{ii} = \lambda_i\beta_i$, y $\mathbf{C}\mathbf{B}$ también es circulante.

2. La matriz $\mathbf{C} + \mathbf{B}$ es circulante, y

   $$\mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{U}^*\boldsymbol{\Omega}\mathbf{U},$$

   donde $\boldsymbol{\Omega}$ es una matriz diagonal, $\Omega_{ii} = \lambda_i + \beta_i$.

3. Si $\lambda_m \neq 0$ para $m = 0, 1, \ldots, N-1$, entonces $\mathbf{C}$ es no singular, y

   $$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^*$$

   es decir que la inversa de $\mathbf{C}$ se puede calcular de forma inmediata.

Prueba Las matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{B}$ se pueden expresar como $\mathbf{C} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^*$, $\mathbf{B} = \mathbf{U}\boldsymbol{\beta}\mathbf{U}^*$, donde $\boldsymbol{\Lambda}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son matrices diagonales con elementos $\boldsymbol{\lambda}_{ii} = \lambda i$, $\boldsymbol{\beta}_{ii} = \beta_i$, respectivamente.

1. $\mathbf{C}\mathbf{B} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{U}^*)(\mathbf{U}\boldsymbol{\beta}\mathbf{U}^*) = \mathbf{U}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}\mathbf{U}^* = \mathbf{B}\mathbf{C}$, pues como $\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}$ es diagonal, (4.21) implica que $\mathbf{C}\mathbf{B}$ es circulante. Otra forma de probar esta propiedad es notando que, para que dos matrices conmuten tienen que tener el mismo conjunto de autovectores (Kailath, 1980). Como todas las matrices circulantes comparten los mismos autovectores (4.19), cualquier par de matrices circulantes conmutan.

2. $\mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{U}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{U}^* + \mathbf{U}\boldsymbol{\beta}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta})\mathbf{U}^*$.

3. $\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{U}^*)^{-1} = \mathbf{U}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{U}^*$ si $\boldsymbol{\lambda}$ es no singular. □

Las matrices circulantes son una clase de matrices particularmente tratable porque las inversas, productos y sumas también son circulantes, y por lo tanto normales y de construcción directa. Además, los autovalores de tales matrices pueden ser calculados fácil y exactamente.

4.4. Referencias

Davies, P. J., *Circulant Matrices*, Wiley-Interscience, NY, 1979.

Gray, R. M., *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*, Information Sciences Laboratory, Stanford University, August 2002. Disponible electrónicamente en `http://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf`

Horn, R., Johnson, C., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, UK, 1999.

Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

Lancaster, P., *Theory of Matrices*, Academic Press, NY, 1969.

4.5. Ejercicios

Ejercicio 1. Determine los coeficientes de la SDF de las siguientes sucesiones periódicas utilizando la definición, y verifique usando MATLAB. **Observación:** en cada caso, se indica sólo un período de la sucesión periódica.

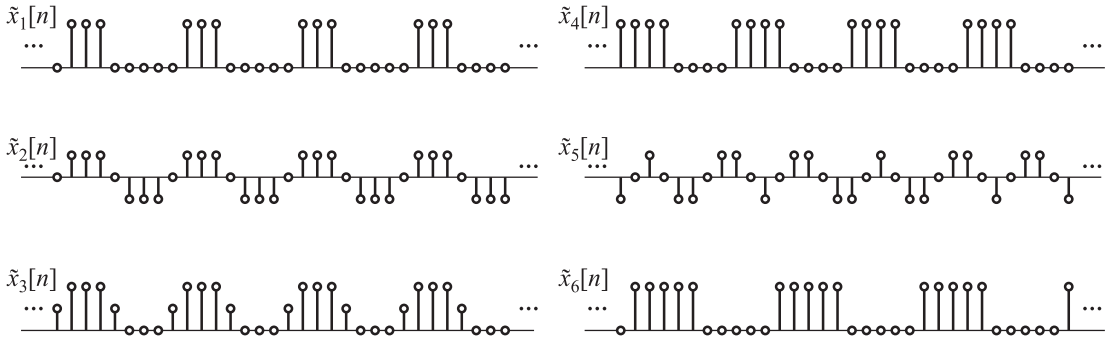
1. $\tilde{x}_1[n] = \{2, 0, 0, 2\}$, $N = 4$.
2. $\tilde{x}_2[n] = \{0, 0, 1, 0, 0\}$, $N = 5$.
3. $\tilde{x}_3[n] = \{3, -3, 3, -3\}$, $N = 4$.
4. $\tilde{x}_4[n] = \{1, j, j, 1\}$, $N = 4$.

Ejercicio 2. Determine las sucesiones a partir de los siguientes coeficientes de (un período de) la SDF usando la definición. Verifique usando MATLAB.

1. $\tilde{X}_1[k] = \{5, -2j, 3, 2j\}$, $N = 4$.
2. $\tilde{X}_2[k] = \{4, -5, 3, -5\}$, $N = 4$.
3. $\tilde{X}_3[k] = \{0, j, -2j, -j\}$, $N = 4$.
4. $\tilde{X}_4[k] = \{0, 0, 2, 0\}$, $N = 4$.

Ejercicio 3. Para las sucesiones que se muestran en la figura, especifique si el origen de coordenadas puede elegirse de modo que

1. $\tilde{X}[k]$ sea real;
2. $\tilde{X}[k]$ sea imaginaria (salvo para los k que sean múltiplos de N);
3. ¿Para cuáles sucesiones se verifica que $\tilde{X}[k] = 0$, $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$?



Ejercicio 4. Sea $\tilde{x}_1[n]$ una sucesión periódica, con período $N = 50$, donde un período está dado por

$$\tilde{x}_1[n] = \begin{cases} ne^{-0,3n}, & 0 \leq n \leq 25, \\ 0, & 26 \leq n \leq 49, \end{cases}$$

y sea $\tilde{x}_2[n]$ periódica con período $N = 100$, uno de cuyos períodos es

$$\tilde{x}_2[n] = \begin{cases} ne^{-0,3n}, & 0 \leq n \leq 25, \\ 0, & 26 \leq n \leq 99. \end{cases}$$

Las dos sucesiones difieren en su periodicidad, pero tienen la mismas muestras no nulas.

1. Encuentre la SDF $\tilde{X}_1[k]$ de $\tilde{x}_1[n]$, y grafique las muestras del módulo y la fase en función de k usando el comando `stem`.
2. Encuentre la SDF $\tilde{X}_2[k]$ de $\tilde{x}_2[n]$, y grafique las muestras del módulo y la fase en función de k.
3. ¿Cuál es la diferencia entre ambos gráficos de las SDF?

(I) **Ejercicio 5.** A partir de la sucesión $\tilde{x}_1[n]$ del Ejercicio 4, considere la sucesión $\tilde{x}_3[n]$ de período $N = 100$, cuyo período se obtiene concatenando dos períodos de $\tilde{x}_1[n]$

$$\tilde{x}_3[n] = \left[\; \tilde{x}_1[n], \quad \tilde{x}_1[n] \; \right].$$

Evidentemente, esta sucesión es diferente de la sucesión $\tilde{x}_2[n]$ del Ejercicio 4, aunque ambas tienen período $N = 100$.

1. Calcule los coeficientes de (un período de) la SDF $\tilde{X}_3[k]$ de $\tilde{x}_3[n]$, y grafique el módulo y la fase en función de k.
2. ¿Cuáles son los efectos de duplicar la periodicidad en los coeficientes de la SDF?
3. Extienda los resultados anteriores para el caso en que el período se multiplica por M. En particular, muestre que si

$$\tilde{x}_M[n] = \left[\underbrace{\tilde{x}_1[n], \quad \ldots, \quad \tilde{x}_1[n]}_{M \text{ veces}} \right]$$

entonces

$$\tilde{X}_M[Mk] = \begin{cases} M\,\tilde{X}_1[k], & k = 0, 1, \ldots N-1, \\ 0, & Mk \neq 0, M, \ldots M\,N. \end{cases}$$

(M) **Ejercicio 6.** Grafique el módulo de la Transformada de Fourier $X\left(e^{j\omega}\right)$ de las sucesiones discretas que se listan a continuación usando la TDF como herramienta de cálculo (es decir, calculando $X[k]$). Elija apropiadamente la longitud N de la transformada de modo que sus gráficos "tengan sentido".

1. $x_1[n] = 2\cos\left(0{,}2\pi n\right)\left(u[n] - u[n-10]\right)$.
2. $x_2[n] = \operatorname{sen}\left(0{,}45\pi n\right)\operatorname{sen}\left(0{,}55\pi n\right)$.
3. $x_3[n] = 3\left(2^n\right)$, $-10 \leq n \leq 10$.
4. $x_4[n] = (-0{,}5)^n$, $-10 \leq n \leq 10$.

5. $x_5[n] = (4/5)^n u[n]$.

Ⓒ **Ejercicio 7.** Se ha visto en la teoría que existe una relación directa entre $X\left(e^{j\omega}\right)$ y $\tilde{X}[k]$, donde $X[k]$ son las "muestras" de $X\left(e^{j\omega}\right)$ tomadas en las frecuencias $\omega_k = (2\pi/N)k$, $0 \leq k \leq N-1$. El propósito de este problema es mostrar que se puede conocer el valor de $X\left(e^{j\omega_0}\right)$ *para cualquier valor de frecuencia* ω_0 en base al conocimiento de las N muestras $X[k]$; esto es, se puede obtener una fórmula de interpolación. El siguiente procedimiento permite obtener tal ecuación.

1. Si $\tilde{X}[k]$ es la SDF de $\tilde{x}[n]$, exprese la transformada de Fourier $\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)$ de $\tilde{x}[n]$ como un tren de impulsos.
2. Observe que $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, donde $w[n]$ es una función apropiada de longitud finita (una "ventana"). Calcule $w[n]$.
3. De acuerdo al inciso anterior, $X\left(e^{j\omega}\right)$ puede expresarse como la convolución (periódica) de $\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)$ y $W\left(e^{j\omega}\right)$.

Evaluando en detalle el procedimiento descrito, muestre que $X\left(e^{j\omega}\right)$ puede calcularse como

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{N}\sum_k \tilde{X}[k]\frac{\text{sen}[\frac{N}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)]}{\text{sen}[\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)]}e^{-j\frac{N-1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)}.$$

Calcule explícitamente los límites de la sumatoria.

Ejercicio 8. Sea $x[n]$ una sucesión de longitud N, tal que $x[n] = 0$ si $n < 0$ o $n > N-1$, y que por lo menos tiene una muestra no nula. ¿Es posible que para tal sucesión $X\left(e^{j\omega_k}\right) = 0$, donde $\omega_k = \frac{2\pi}{M}k$, $0 \leq k \leq M-1$? Si la respuesta es afirmativa, construya un ejemplo. En caso contrario, explique su razonamiento. Analice los casos en que:

1. $M \geq N$,
2. $M < N$.

Ejercicio 9. Sea $X[k]$ la TDF de N puntos de la sucesión $x[n]$ de N puntos de longitud.

1. Muestre que si $x[n] = -x[N-1-n]$, entonces $X[0] = 0$. Considere por separado los casos en que N es par o impar.
2. Muestre que si N es par y $x[n] = x[N-1-n]$, entonces $X[N/2] = 0$.

Ejercicio 10. Se sabe que $x[n]$ es una sucesión de longitud $N = 6$, y que su TDF $X[k]$ es $X[k] = \{12, 7, 3, 0, 3, 7\}$, para $0 \leq k < 6$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? Justifique su respuesta.

1. La sucesión $x[n]$ es real.
2. La sucesión $x[n]$ es imaginaria pura.

3. La sucesión $x[n]$ es compleja.

4. La información dada es insuficiente para obtener una conclusión.

Ejercicio 11. Las sucesiones complejas de longitud finta N pueden descomponerse en sucesiones de N puntos conjugadas simétricas y antisimétricas a partir de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x_{ep}[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*[((-n))_N]\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ x_{op}[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] - x^*[((-n))_N]\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \end{aligned}$$

respectivamente.

1. Verifique analíticamente las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{x[n]\} &\overset{TDF}{\longleftrightarrow} X_{ep}[k], \\ j\,\mathrm{Im}\{x[n]\} &\overset{TDF}{\longleftrightarrow} X_{op}[k], \\ x_{ep}[n] &\overset{TDF}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{Re}\{X[((-k))_N]\} \\ x_{op}[n] &\overset{TDF}{\longleftrightarrow} j\,\mathrm{Im}\{X[k]\} = j\,\mathrm{Im}\{X[((-k))_N]\} \end{aligned}$$

2. Construya una función en MATLAB que, a partir de la sucesión $x[n]$ calcule las sucesiones conjugadas simétricas y antisimétricas $x_{ep}[n]$ y $x_{op}[n]$, respectivamente.

3. Verifique las propiedades de simetría enunciadas arriba utilizando la sucesión $x[n] = (0{,}9e^{j\frac{\pi}{3}n})(u[n] - u[n-20])$.

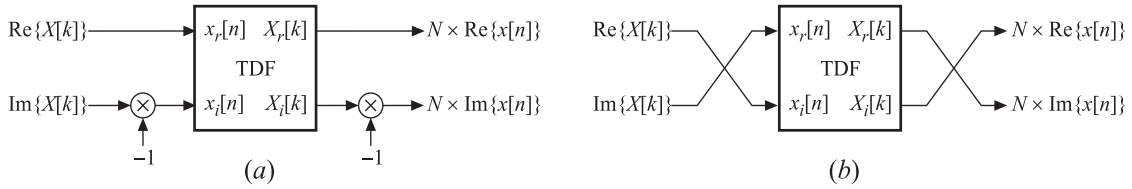
4. Utilice las propiedades enunciadas arriba para computar *simultáneamente* la TDF de dos sucesiones reales $x_1[n]$ y $x_2[n]$, ambas de longitud N, formando la sucesión compleja $x[n] = x_1[n] + jx_2[n]$, recuperando $X_1[k]$ y $X_2[k]$ a partir de $X[k]$. Compruebe sus resultados para las siguientes dos sucesiones:

$$x_1[n] = \cos(0{,}25\pi n), \quad x_2[n] = \mathrm{sen}(0{,}75\pi n), \quad 0 \leq n \leq 63.$$

Ayuda: Aunque la operación módulo, indicada aquí como $((n))_N$ se puede implementar con el comando `rem(n,N)`, no resulta útil si $n < 0$. Por ello se sugiere implementar la función `mod`, tal como se detalla a continuación:

```
function m = mod(n,N)
% Esta función calcula ((n))N, aun para n<0.
%
m = rem(n,N);
m = m+N;
m = rem(m,N);
```

Ejercicio 12. El en Capítulo 2 se estudió cómo calcular la transformada de Fourier inversa a partir de la transformada directa. Algunas relaciones similares pueden aplicarse para calcular la TDF inversa a partir de la TDF. En los gráficos de la figura, el bloque indicado TDF calcula la transformada de Fourier de la sucesión $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$, dando como resultado $X[k] = X_r[k] + jX_i[k]$.



1. Demuestre que la sucesión $x[n]$ se puede calcular a partir de $X[k]$ aplicando los siguientes pasos, como se sugiere en la Fig. (a) :
   - Conjugar $X[k]$.
   - Calcular la TDF directa de $X^*[k]$.
   - Conjugar el resultado de la TDF directa. En definitiva,

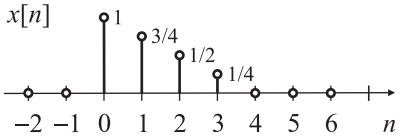
$$x[n] = \frac{1}{N}\mathcal{F}\{X^*[k]\}^*.$$

2. Otra forma de calcular la transformada inversa también hace uso de la propiedad de conjugación, como se muestra en la Fig. (b)
   - Intercambiar las partes real e imaginaria de $X[k]$, definiendo un vector $v[n] = \text{Im}\{X[k]\}|_{k=n} + j\,\text{Re}\{X[k]\}|_{k=n}$.
   - Calcular $V[k]$, la TDF directa de $v[n]$.
   - Intercambiar la parte real e imaginaria de $V[k]$. En síntesis,

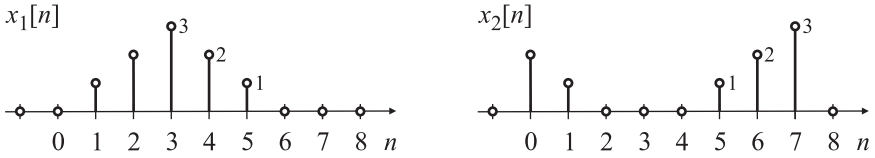
$$x[n] = \frac{1}{N}\,\text{Im}\left\{\mathcal{F}\{\text{Im}\{X[k]\}+j\,\text{Re}\{X[k]\}\}\right\}+\frac{j}{N}\,\text{Re}\left\{\mathcal{F}\{\text{Im}\{X[k]\}+j\,\text{Re}\{X[k]\}\}\right\}.$$

3. Una tercera manera hace uso de rotaciones.
   - Defina $v[n] = X[k]|_{k=((-n))_N}$.
   - Calcule $V[k]$, la TDF de $v[n]$.
   - Verifique que $x[n] = (1/N)\ V[k]|_{k=n}$.

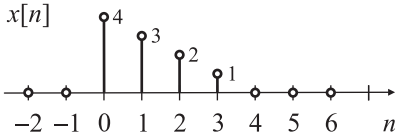
Ejercicio 13. Si $X[k]$ es la TDF de 4 puntos de la sucesión de longitud finita $x[n]$ que se muestra en la figura, grafique la secuencia $y[n]$ cuya TDF es $Y[k]$ es $Y[k] = W_4^{3k}X[k]$.



Ejercicio 14. Determine la relación entre $X_1[k]$ y $X_2[k]$, las TDF de dos sucesiones $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de longitud finita ($N = 8$ muestras) que se muestran en la figura.



Ejercicio 15. Sea $X[k]$ es la TDF de 6 puntos de la sucesión $x[n]$ real y de longitud finita que se muestra en la figura.



1. Grafique la secuencia de longitud finita $y[n]$ cuya TDF de 6 puntos es $Y[k] = W_6^{4k} X[k]$.
2. Grafique la secuencia de longitud finita $w[n]$ cuya TDF de 6 puntos es $W[k] = \text{Re}\{X[k]\}$.
3. Grafique la secuencia de longitud finita $q[n]$ cuya TDF de 3 puntos es $Q[k] = X[2k]$, $k = 0, 1, 2$.

Ejercicio 16. Una sucesión $x[n]$ de duración finita $N = 8$ tiene la TDF $X[k]$ que se muestra en la Fig. I. Una sucesión nueva, de longitud $N = 16$ se genera a partir de $x[n]$ como

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De la Fig. II, elija la TDF de 16 puntos correspondiente a $y[n]$.

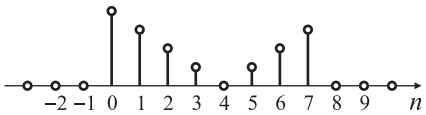


Figura I

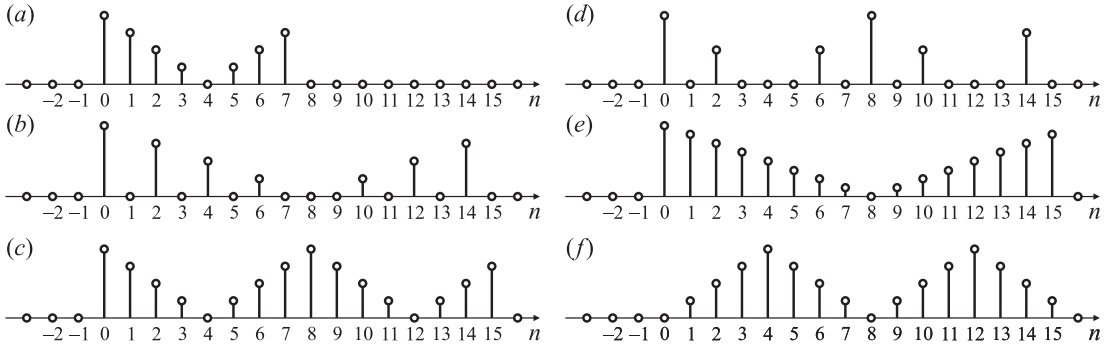
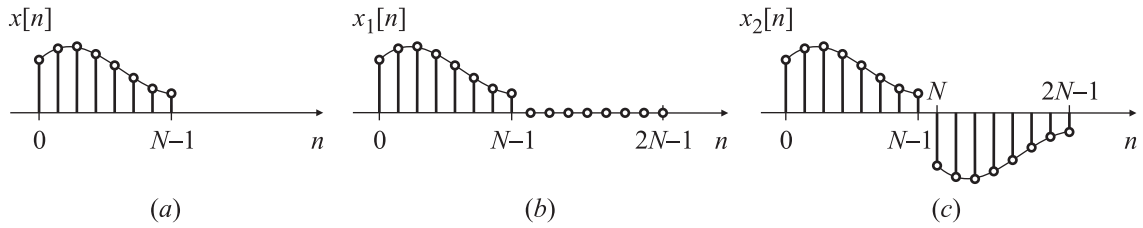


Figura II

Ejercicio 17. Sea $x[n]$ una sucesión de longitud finita N que se muestra en la figura (a). Las líneas llenas sugieren la envolvente de los valores de la sucesión entre 0 y $N-1$. A partir de $x[n]$ se construyen dos sucesiones $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de longitud finita $2N$, como se indica en las figuras (b) y (c), y expresadas matemáticamente como:

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad x_2[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1, \\ -x[n-N], & N \le n \le 2N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sea $X[k]$ la TDF de N puntos de $x[n]$, y $X_1[k]$ y $X_2[k]$ las TDF de $2N$ puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente.



(*a*) (*b*) (*c*)

1. Determine la forma más simple de obtener $X[k]$ a partir de $X_1[k]$.
2. Calcule $X_2[k]$ a partir de $X_1[k]$.
3. Justifique si $X_2[k]$ se puede obtener a partir de $X[k]$.

Ejercicio 18. Si $X[k]$ es la TDF de N puntos de $x[n]$ (N es par), determine las sucesiones $y[n]$ cuyas TDF de N puntos se listan a continuación, y expréselas en función de $x[n]$.

$Y[k] = (-1)^k X[k]$.

$Y[k] = \text{Re}\{X[k]\} = \frac{1}{2}\left(X[k] + X^*[k]\right)$.

$$Y[k] = \begin{cases} X[k - N/2], & k \geq N/2, \\ X[k + N/2], & k < N/2. \end{cases}$$

Ejercicio 19. Para la sucesión temporal $x[n] = (1/2)^n u[n]$,

1. Calcule $X(e^{j\omega})$
2. Muestree $X(e^{j\omega})$ en 4 puntos, y determine $X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{4}k}$, $k = 0, 1, 2, 3$.
3. Compute $\hat{x}[n]$, la TDF inversa de $X[k]$.
4. Compare $x[n]$ e $\hat{x}[n]$, y justifique el resultado expresando analíticamente $\hat{x}[n]$ en función de $x[n]$.

Ayuda: para resolver este problema es conveniente repasar los contenidos de la Sección 8.4, "Sampling the Fourier Transform" del libro de Oppenheim *et al*.

(I) **Ejercicio 20.** Las sucesiones $x[n]$ e $y[n]$ tienen longitud N. A partir de ellas se genera una tercera sucesión $w[n]$ de largo $3N$ como se indica a continuación:

$$w[n] = \{x[0], y[0], 0, x[1], y[1], 0, x[2], y[2], 0, \ldots x[N-1], y[N-1], 0\}.$$

Exprese $W[k]$ en función de $X[k]$ e $Y[k]$.

Ejercicio 21. Considere la sucesión $x[n] = A\cos\omega_0 n + B\cos\omega_1 n$, $0 \leq n \leq N-1$, con $A = 1$, $B = 0{,}5$, $\omega_0 = (1/N)2\pi$, $\omega_1 = (3/N)2\pi$, $N = 8$.

1. Calcule y grafique $X\left(e^{j\omega}\right)$.
2. Calcule y grafique $X_N[k]$, la TDF de N puntos de $x[n]$.
3. Si la transformada de Fourier $X\left(e^{j\omega}\right)$ de $x[n]$ se muestrea en $\omega_k = (2\pi/Q)k$, $0 \leq k \leq Q-1$, donde $Q = N/2 = 4$, se obtiene una transformada discreta $Z[k]$, $0 \leq k \leq Q-1$. Escriba $z[n]$ en función de $x[n]$, y calcule explícitamente $z[n]$ para $0 \leq n \leq Q-1$.
4. Se "acorta" la sucesión $x[n]$ a la mitad, obteniéndose la sucesión $w[n] = x[n]$, $0 \leq n \leq Q-1$. Grafique $W\left(e^{j\omega}\right)$ y $W[k]$, $0 \leq k \leq Q-1$.
5. ¿Es cierto que $Z[k] = W[k]$, $0 \leq n \leq Q-1$, donde $Z[k]$ y $W[k]$ son las TDF de los incisos 3 y 4, respectivamente? Justifique.

Ⓒ **Ejercicio 22.** Sean $(x[n], y[n])$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ las coordenadas cartesianas de los vértices de un polígono simple $\mathcal{P}$ de N lados, orientado positivamente, y sea $z[n] \doteq x[n] + jy[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

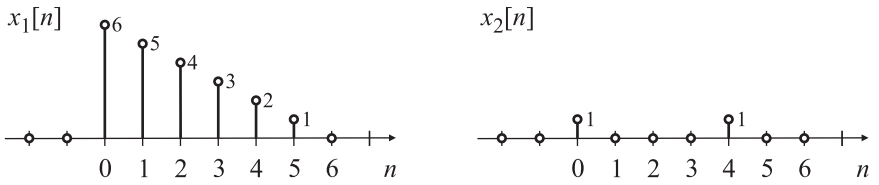
1. Verifique que el área del triángulo con vértices 0, $ae^{j\alpha}$, $be^{j\beta}$, donde $a > 0$, $b > 0$, y $0 \leq \alpha < \beta < \pi$ es $A_T = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\{(be^{j\beta})(\overline{ae^{j\alpha}})\}$.
2. Demuestre que el polígono $\mathcal{P}$ tiene área

$$A_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{N-1} z[n+1]\overline{z[n]} = \frac{N}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)|Z[k]|^2 .$$

3. Muestre que

$$A_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{N-1}\{y[n+1] - y[n-1]\}x[n] = -iN\sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\overline{Y[k]}X[k].$$

Ejercicio 23. Calcule la convolución circular de $N = 6$ y $N = 10$ puntos para las dos sucesiones de la figura, y verifique sus resultados usando Matlab (calculando la anti-transformada del producto de las transformadas).



Ejercicio 24. Para las dos sucesiones de 4 puntos $x[n]$ y $h[n]$, definidas por

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\pi n/2), && n = 0, 1, 2, 3, \\ h[n] &= 2^n, && n = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

1. Calcule $X[k]$, la TDF de 4 puntos de $x[n]$.

2. Calcule $H[k]$, la TDF de 4 puntos de $h[n]$.

3. Calcule $y[n] = x[n] \circledast h[n]$ usando la convolución circular

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[((n-m))_N].$$

4. Calcule $y[n] = x[n] \circledast h[n]$ multiplicando las TDF de $x[n]$ y $h[n]$ y calculando la transformada inversa.

Nota: Se sugiere resolver el inciso 3 "a mano" para comprender el funcionamiento de la convolución circular.

Ejercicio 25. Si $x[n] = \{1, -3, 1, 5\}$ e $y[n] = \{7, -7, 9, 3\}$, ¿existe una sucesión $w[n]$ de longitud $N = 4$ tal que $y[n] = x[n] \circledast w[n]$?

(C) **Ejercicio 26.** Sea $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$, $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_{N-1})$ la representación vectorial de dos sucesiones $c[n]$, $d[n]$ de longitud finita, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Se definen las *matrices circulantes*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & c_{N-3} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_0 & d_{N-1} & d_{N-2} & \cdots & d_1 \\ d_1 & d_0 & d_{N-1} & \cdots & d_2 \\ d_2 & d_1 & d_0 & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{N-1} & d_{N-2} & d_{N-3} & \cdots & d_0 \end{bmatrix}.$$

1. Muestre cómo relacionar el producto matricial $\mathbf{C}\mathbf{x}^T$ con la convolución $\mathbf{c} \circledast \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ es la representación vectorial una sucesión $x[n]$.

2. Usando los resultados del inciso anterior, muestre que CD es la matriz circulante correspondiente a $\mathbf{c} \circledast \mathbf{d}$.

3. Pruebe que $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ conmutan: $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$.

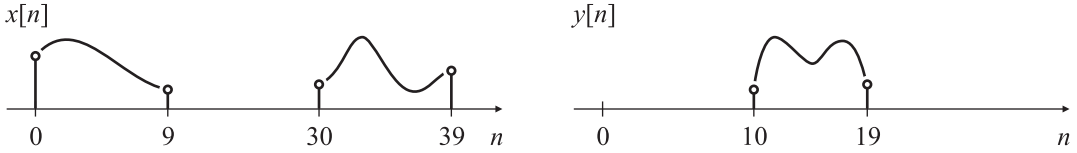
(I) **Ejercicio 27.** En este problema se investiga el resultado del cálculo reiterado de la TDF.

1. Suponga que $x[n]$ es una sucesión de longitud N, y sea $y[n] = TDF_N\{TDF_N\{x[n]\}\}$. Exprese la sucesión $y[n]$ en función de los elementos de la sucesión $x[n]$ de la forma más sencilla posible.

2. La sucesión $w[n]$ se obtiene por la aplicación reiterada P veces de la TDF a una sucesión $x[n]$. ¿Cuál es el mínimo valor de P para el cual $w[n] = Ax[n]$, donde A es una constante? ¿Cuánto vale A?

(I) **Ejercicio 28.** Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos sucesiones de longitud finita, tales que $x[n]$ se anula para $n < 0$ y $n > 40$, y para $9 < n < 30$, e $y[n]$ se anula para $n < 10$ y $n > 19$, tal como se muestra en la figura. Sea $w[n]$ la convolución *lineal* entre $x[n]$ e $y[n]$, y $g[n]$ la convolución *circular* de $N = 40$ puntos entre $x[n]$ e $y[n]$

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k],$$
$$g[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[((n-k))_N].$$



1. Determine los valores de n para los cuales $w[n]$ puede ser no nula.
2. Especifique los valores de n para los cuales $w[n]$ puede calcularse a partir de $g[n]$.

Ejercicio 29. Considere dos sucesiones $x_1[n]$ y $x_2[n]$ definidas como

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 99, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \qquad x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 9, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Calcule y grafique la convolución lineal $x_1[n] * x_2[n]$.
2. Calcule y grafique la convolución circular de 100 puntos $x_1[n] \circledast x_2[n]$.
3. Calcule y grafique la convolución circular de 110 puntos $x_1[n] \circledast x_2[n]$.

(I) **Ejercicio 30.** Se desea filtrar la sucesión de datos $x[n] = u[n]$ con un filtro con respuesta impulsiva $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$. Calcule la salida del sistema $y[n] = h[n] * x[n]$ por medio de:

1. la definición de suma convolución: $y[n] = \sum_k h[k]x[n-k]$;
2. el método overlap-add;
3. el método overlap-save.

Para los incisos (2) y (3), utilice una TDF de orden 4, y ajuste la longitud de los bloques de la entrada y de la respuesta impulsiva según corresponda. Verifique que se obtiene el mismo resultado en los tres casos. **Nota**: Aunque en una implementación real las convoluciones de cada etapa se calcularían efectuando la TDF inversa del producto de $H[k]$ con la TDF de cada bloque de entrada, para simplificar el ejercicio es suficiente calcular la convolución (lineal o circular, según el caso) en el dominio tiempo. Las sucesiones se han elegido de manera que las convoluciones puedan efectuarse por inspección.

(I) **Ejercicio 31.** Usualmente, el funcionamiento de la técnica de filtrado por bloques overlap-save es más difícil de entender que el método overlap-add. En este ejercicio se exploran algunas alternativas para tratar de facilitar la comprensión. En todos los casos, utilice las mismas señales $x[n]$ y $h[n]$ del Ejercicio 30, y compare sus resultados con los de la convolución lineal $x[n] * h[n]$.

1. Calcule las tres primeras etapas de la convolución por bloques por el método overlap-save *sin* solapar los bloques de entrada. Explique sus resultados.
2. Como al aplicar la convolución circular se descartan las primeras $P - 1$ muestras, uno estaría tentado a reemplazar las primeras $P - 1$ muestras de los bloques de entrada (las que se solapan) por valores arbitrarios, por ejemplo muestras nulas. Calcule los tres primeras etapas de la convolución por bloques efectuando el solapamiento de los bloques de las muestras de entrada, pero reemplazando las muestras solapadas por ceros. Justifique sus resultados.

(I) **Ejercicio 32.** Se desea filtrar un arreglo de datos muy largo con un filtro FIR cuya respuesta impulsiva tiene una longitud $P = 50$ muestras utilizando la técnica de procesamiento por bloques. Para hacer esto:

- las secciones de entrada se solapan en V muestras;
- de la salida de cada sección se extraen M muestras tal que cuando estas muestras son agrupadas, la secuencia resultante es la salida filtrada deseada.

La entrada se segmenta en bloques de $L = 100$ muestras de longitud, y el tamaño de la TDF utilizada para calcular las convoluciones parciales es $N = 128$ puntos. Suponga además que la secuencia de salida de la convolución circular está indexada de 0 a 127.

1. Determine V.
2. Determine M.
3. Determine el índice del comienzo y el final de los M puntos extraídos; es decir, determine cuál de los 128 puntos resultantes de la convolución circular son extraídos y anexados con los resultados de la sección previa.

(I) **Ejercicio 33.** Calcule la convolución por bloques entre las señales $x[n]$ y $h[n]$ del Ejercicio 30 utilizando bloques entrada de tamaño $L = 4$, y TDF de tamaño $N = 4$. Para cada convolución parcial, determine el número de puntos que se deben descartar (V), y la cantidad de puntos que debe reservarse para sumarlos al resultado del cálculo del próximo bloque.

Ejercicio 34. Se desea implementar la convolución lineal de una sucesión de 10000 puntos con un FIR cuya respuesta impulsiva tiene una longitud de 100 muestras. La convolución se efectuará usando TDF y TDF inversas de 256 puntos.

1. ¿Cuál es el mínimo número de TDF de 256 puntos, y de TDF inversas de 256 puntos necesarias para implementar la convolución de la secuencia de 10000 puntos si se utiliza el método overlap-add? Justifique.

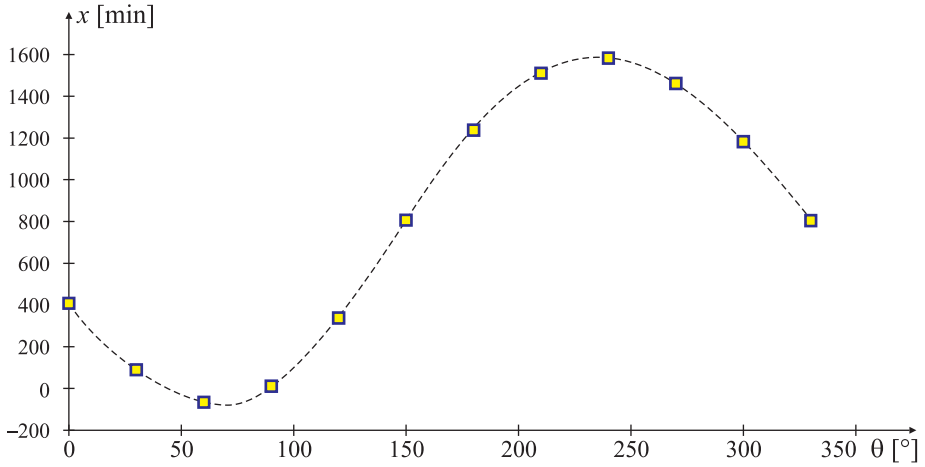
2. ¿Cuál es el mínimo número de TDF de 256 puntos, y de TDF inversas de 256 puntos necesarias para implementar la convolución de la secuencia de 10000 puntos si se utiliza el método overlap-save? Justifique.

3. Se verá más adelante que, cuando N es potencia de 2, la TDF o la TDF inversa se puede efectuar con $(N/2)\log_2 N$ multiplicaciones complejas, y $(N/2)\log_2 N$ adiciones complejas. Para el mismo filtro usado en (1) y en (2), compare el número de operaciones aritméticas (sumas y productos) necesarias para implementar el método overlap-add, overlap-save, y la convolución directa.

Ⓒ **Ejercicio 35.** En la reseña histórica del Capítulo 2 se incluye la tabla siguiente, que consigna los datos de posición del asteroide Pallas, donde variable θ representa la ascensión en grados, y la variable x la declinación en minutos.

θ (grados)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
x (minutos)	408	89	−66	10	338	807	1238	1511	1583	1462	1183	804

Encuentre una función $x(\theta)$ continua y periódica que pase por cada uno de los 12 pares de puntos con el menor error posible.
Ayuda: exprese $x(\theta)$ en series de Fourier, y use la TDF para encontrar los coeficientes de la serie.
Nota: Para resolver este problema Gauss ideó un método de cálculo muy eficiente, que sería redescubierto años más tarde como la FFT.



Ejercicio 36. Convolución por bloques

Se debe calcular la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$ utilizando los métodos de procesamiento por bloques. El largo de la sucesión $x[n]$ es N_x, y el de $h[n]$ es P. Las convoluciones se calcularán con el método de la convolución rápida usando TDFs de largo $N = 8$.

1. Para el método *overlap-add*:
   a) Determinar el largo L_a de los bloques $x_i[n]$ en que debe partirse la sucesión de entrada $x[n]$.
   b) Calcular la salida $y_i[n]$ que resulta de la convolución de $h[n]$ con cada uno de los bloques $x_i[n]$.
   c) Indicar para cada bloque las muestras que deben solaparse con las del bloque anterior y el siguiente.
   d) Sumar apropiadamente las salidas de cada bloque para obtener la salida completa $y[n]$.
   e) Comparar la salida calculada con el resultado de la convolución común entre $x[n]$ y $h[n]$.
2. Para el método *overlap-save*:
   a) Determinar el largo L_s de los bloques $x_i[n]$ en que debe partirse la sucesión de entrada $x[n]$.
   b) Calcular la salida $y_i[n]$ que resulta de la convolución de $h[n]$ con cada uno de los bloques $x_i[n]$.
   c) Indicar para cada bloque las muestras que deben descartarse y el rango de las muestras "útiles".
   d) A partir de la salidas $y_i[n]$ de cada bloque indique cómo obtener la salida completa $y[n]$.
   e) Comparar la salida calculada con el resultado de la convolución común entre $x[n]$ y $h[n]$.
3. Una variante del método *overlap-add* es elegir el largo L de los bloques menor que $L_a = N - (P - 1)$. Elija $L = L_a - 1$. Explique el funcionamiento del método en este caso, y comente sobre su eficiencia respecto al indicado en el inciso 1.
4. Para el método *overlap-save*, también se puede elegir el largo L de los bloques menor que L_s, (pero mayor que L_a). Elija $L = L_s - 1$. Explique en este caso una forma de implementar el método de convolución por bloques indicando las muestras que se deben descartar en cada bloque, el número de muestras "útiles", y comente sobre la eficiencia de esta técnica respecto a la del inciso 2.

Observaciones

- Este es un ejercicio más de la práctica de problemas. La idea es presentar los resultados en una forma legible, pero no necesariamente "linda". Lo que se espera es que se indiquen cómo queda conformado cada bloque (de entrada, resultados intermedios, convolución), los índices correspondientes a cada bloque, qué muestras se "solapan", "guardan" o "descartan", etc.
- **No es necesario hacer las gráficas** (aunque se incluirán en las soluciones entregadas por la cátedra).
- El informe puede presentarse en forma manuscrita o impresa; la idea es no gastar más tiempo del necesario.

- El ejercicio tiene fecha de vencimiento. La presentación en una fecha posterior será penada con una reducción de la nota.
- Para calcular la convolución circular se puede utilizar la siguiente función

```
function y = ccirc(x,h,N)
if nargin <3
   N = max([length(x) length(h)]);
end
y = ifft(fft(x,N).*fft(h.N);
```

Ejemplo

Como ejemplo, se muestran el resultado de efectuar la convolución por bloques entre las sucesiones

$$\begin{aligned} x[n] &= \{1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5\}, \\ h[n] &= \{1,2,3,4\}. \end{aligned}$$

En este caso, el largo P de $h[n]$ es 4, el tamaño N de la TDF es 8, y el largo de los bloques de $x[n]$ se ajusta según el método de cálculo.

1. **Método overlap-add:**
   En este caso la sucesión de entrada se parte en bloque de largo $L_a = N - (P-1) = 5$, y por lo tanto el cálculo demanda tres etapas.

   a) Etapa 1:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \{1,1,1,2,2\}, && 0 \le n \le 4, \\ y_1[n] &= h[n] * x_1[n] = \{1,3,6,11,13,14,14,8\}, && 0 \le n \le 7, \end{aligned}$$

   De la salida parcial $y_1[n]$ las $P-1=3$ últimas muestras ($\{14,14,8\}$) deberán sumarse a las $P-1=3$ primeras muestras de la segunda salida parcial. Sin embargo, las primeras $L=5$ muestras son "correctas", y pueden escribirse en el *buffer* de salida:

$$y[n] = \{1,3,6,11,13\}, \quad 0 \le n \le 4.$$

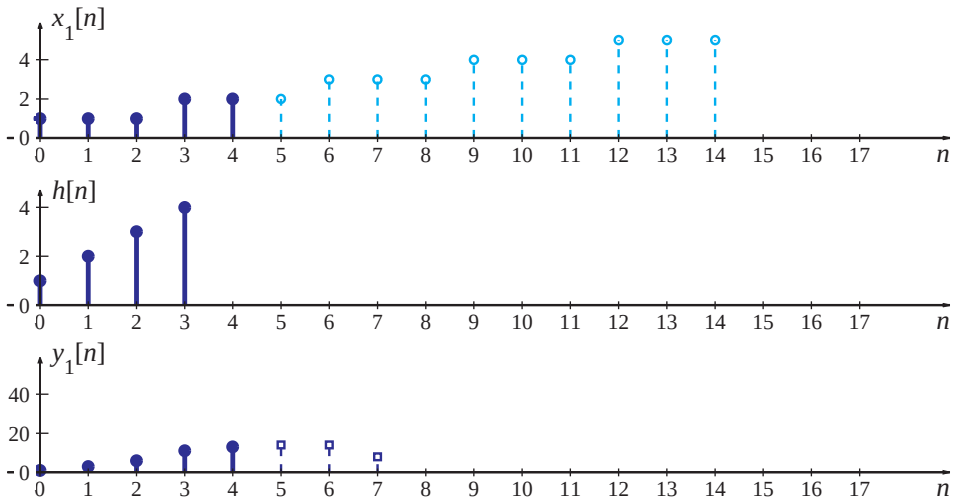
   b) Etapa 2:

$$\begin{aligned} x_2[n] &= \{2,3,3,3,4\}, && 5 \le n \le 9, \\ y_2[n] &= h[n] * x_1[n] = \{2,7,15,26,31,29,24,16\}, && 5 \le n \le 12, \end{aligned}$$

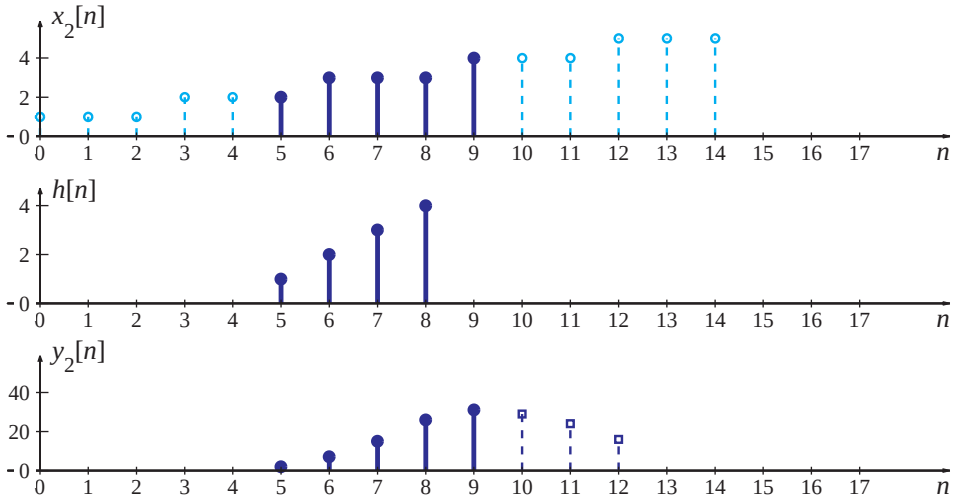
   A las $P-1=3$ primeras muestras de la salida parcial $y_2[n]$ deben sumarse las últimas $P-1=3$ muestras de la salida parcial anterior, de modo que en el buffer de salida puede escribirse el segundo bloque formado por las muestras

$$\begin{aligned} y[n] &= \{2+14, 7+14, 15+8, 26, 31\}, \\ &= \{16,21,23,26,31\}. \qquad 5 \le n \le 9 \end{aligned}$$

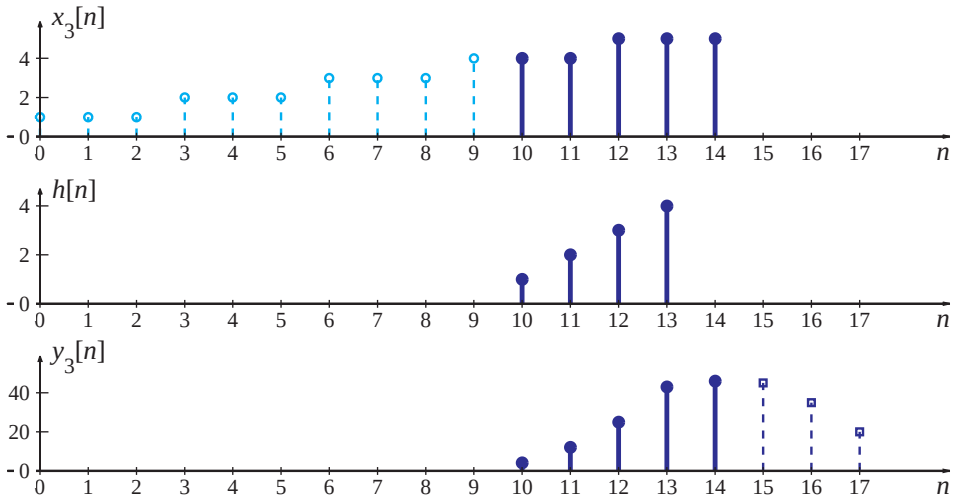
   Las últimas $P-1=3$ muestras ($\{\{29,24,16\}$, correspondientes a $n=10,11,12$) se deben sumar a las primeras tres muestras de la salida parcial siguiente.



Overlap-add: Etapa 1.



Overlap-add: Etapa 2.



Overlap-add: Etapa 3.

c) Etapa 3:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \{4,4,5,5,5\}, && 10 \le n \le 14, \\ y_1[n] &= h[n] * x_1[n] = \{4,12,25,43,46,45,35,20\}, && 10 \le n \le 17, \end{aligned}$$

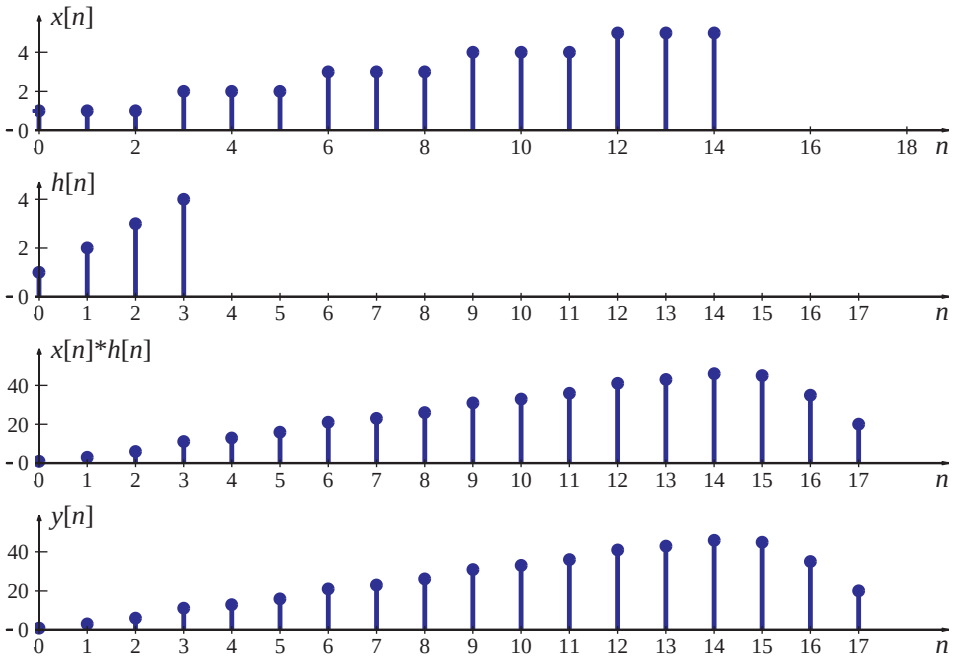
Para calcular el último bloque de salida se deben sumar las últimas 3 muestras del bloque $y_2[n]$ a las primeras 3 muestras de $y_3[n]$. Entonces

$$\begin{aligned} y[n] &= \{4+29, 12+24, 25+16, 43, 46, 45, 35, 20\}, \quad 10 \le n \le 17, \\ &= \{33, 36, 41, 43, 46, 45, 35, 20\} \end{aligned}$$

d) Finalmente, recolectando todos los resultados, se encuentra que

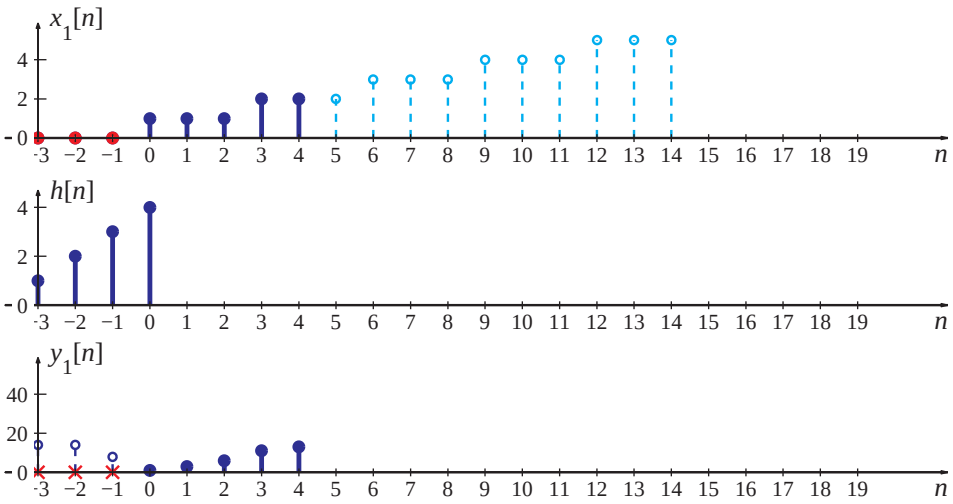
$$y[n] = \{\underbrace{1,3,6,11,13}_{1^{\text{er}}\text{ etapa}}, \underbrace{16,21,23,26,31}_{2^{\text{da}}\text{ etapa}}, \underbrace{33,36,41,43,46,45,35,20}_{3^{\text{ra}}\text{ etapa}}\}, \quad 0 \le n \le 17.$$

En la figura se representa la sucesión de entras $x[n]$, la respuesta impulsiva $h[n]$, y la salida que resulta de hacer la convolución (lineal) entre $x[n]$ y $h[n]$, y la salida $y[n]$ que resulta del cálculo usando el método overlap-add.

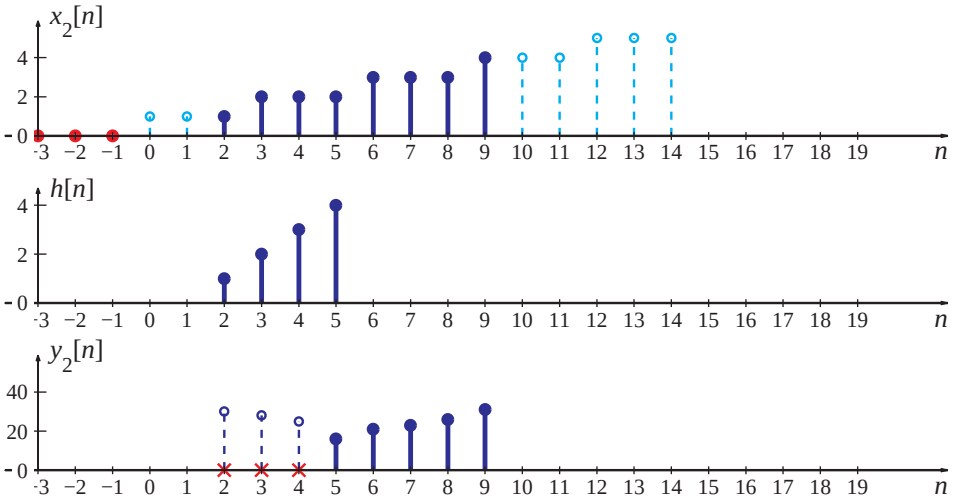


Overlap-add: comparación de resultados.

2. **Método overlap-save:**
En este método, donde el largo de la respuesta impulsiva es $P = 4$, y el largo de la TDF que se utiliza para calcular la convolución circular es $N = 8$, la entrada se parte en bloques de largo $L_s = N = 8$. De acuerdo con estos valores, se deben descartar las primeras $P - 1 = 3$ muestras de cada convolución circular, y para evitar perder las primeras 3 muestras de la convolución, se agregan 3 ceros al principio de la sucesión $x[n]$, en los índices $\{-3, -2-1\}$.



Overlap-save: Etapa 1.



Overlap-save: Etapa 2.

a) Etapa 1:
El primer bloque de la sucesión de entrada es

$$x_1[n] = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 1, 1, 2, 2\}, \quad -3 \leq n \leq 4,$$

donde se resaltaron las muestras nulas agregadas al comienzo de $x[n]$. La sucesión $h[n]$ se debe completar con ceros, de manera de llevar su longitud total a $N = 8$ muestas:

$$h[n] = \{1, 2, 3, 4, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}.$$

El resultado de la convolución circular de $x[n]$ con $h[n]$ es

$$x_1[n] \circledast h[n] = \{\mathbf{14}, \mathbf{14}, \mathbf{8}, 1, 3, 6, 11, 13\}, \quad -3 \leq n \leq 4.$$

Las primeras $P - 1 = 3$ muestras deben descartarse, de modo que el primer bloque de la salida está formado por le conjunto de 5 muestras dado por

$$y_1[n] = \{1, 3, 6, 11, 13\}, \quad 0 \leq n \leq 4.$$

como se muestra en la figura. Las muestras que se deben descartar se indican con línea de trazos, y cruces en los índices respectivos.

b) Etapa 2:
En esta etapa, el segundo bloque de la sucesión de entrada se elige de modo que se solape con las $P-1=3$ últimas muestras del bloque anterior, de modo que

$$x_2[n] = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, 2, 3, 3, 3, 4\}, \quad 2 \leq n \leq 9.$$

En negrita se indican las muestras que se "guardaron" de $x_1[n]$. El resultado de la convolución circular entre $x_2[n]$ y $h[n]$ es

$$x_2[n] \circledast h[n] = \{\mathbf{30}, \mathbf{28}, \mathbf{25}, 16, 21, 23, 26, 31\}, \quad 2 \leq n \leq 9$$

y como se deben descartar las primeras $P-1$ muestras (destacadas en negrita), el segundo bloque de salida resulta

$$y_2[n] = \{16, 21, 23, 26, 31\}, \quad 5 \leq n \leq 9.$$

c) Etapa 3:
El bloque de entrada de esta etapa es

$$x_3[n] = \{\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 4, 4, 5, 5, 5\}, \quad 7 \leq n \leq 14,$$

que repite en los $P-1=3$ primeros lugares las últimas $P-1=3$ muestras almacenadas del bloque de entrada anterior. La convolución circular entre $x_3[n]$ y $h[n]$ es

$$x_3[n] \circledast h[n] = \{\mathbf{48}, \mathbf{44}, \mathbf{39}, 33, 36, 41, 43, 46\}, \quad 7 \leq n \leq 14,$$

donde se han resaltado las $P-1$ muestras que se deben descartar. Por lo tanto, el tercer bloque de salida es

$$y_3[n] = \{33, 36, 41, 43, 46\}, \quad 10 \leq n \leq 14,$$

como se representa en la figura.

d) Etapa 4:
Finalmente, el bloque de entrada de esta última etapa es

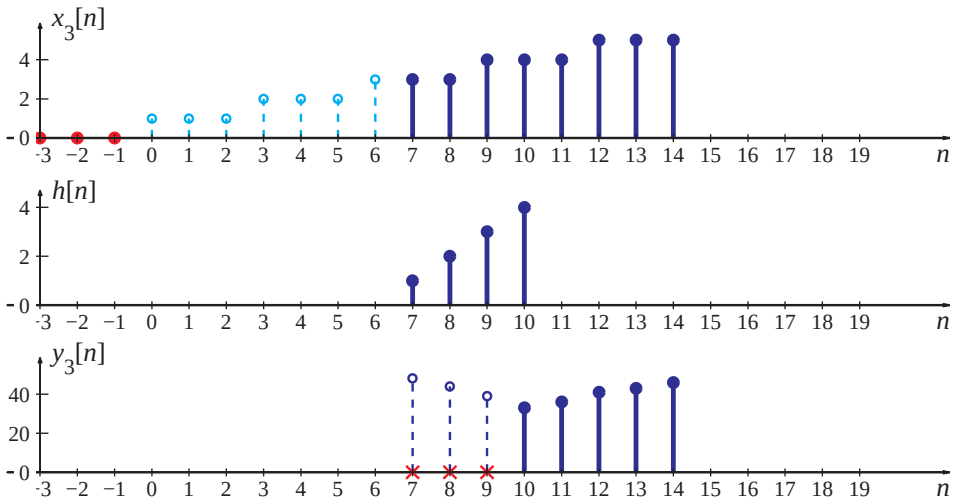
$$x_4[n] = \{\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5}, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad 12 \leq n \leq 19.$$

Este bloque está formado por las últimas tres muestras del bloque de entrada anterior, y cinco muestras nulas que resultan de efectuar un *padding* de ceros para ajustar al largo de la TDF. El resultado de la convolución circular entre $x_4[n]$ y $h[n]$ es

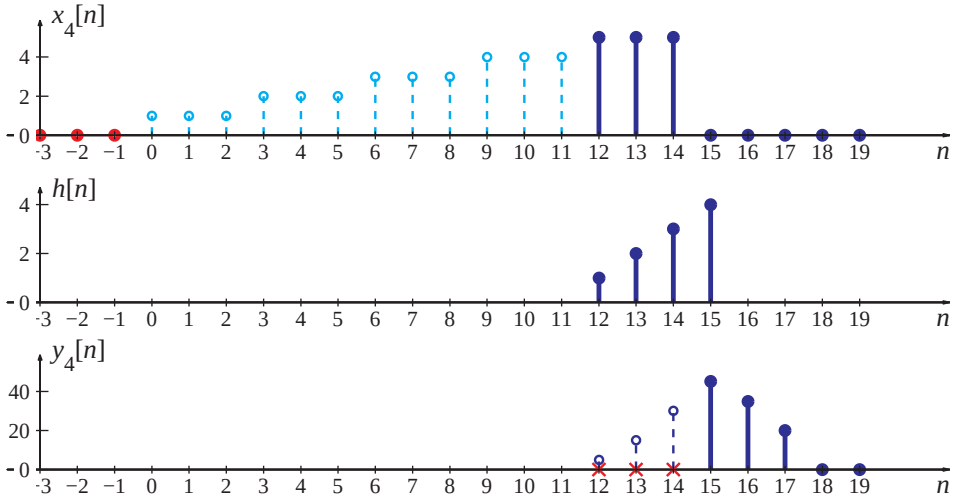
$$x_4[n] \circledast h[n] = \{\mathbf{5}, \mathbf{15}, \mathbf{30}, 45, 35, 20, 0, 0\}, \quad 12 \leq n \leq 19.$$

Nuevamente, las tres primeras muestras (resaltadas en negrita) deben descartarse, y por lo tanto el último bloque de salida es

$$y_4[n] = \{45, 35, 20, 0, 0\}, \quad 15 \leq n \leq 19.$$



Overlap-save: Etapa 3.



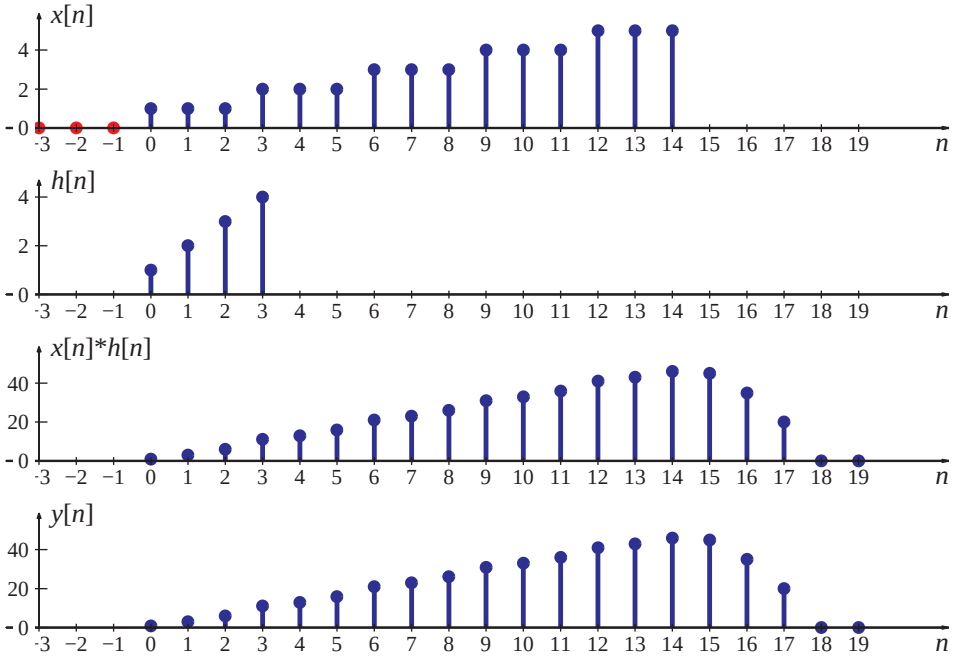
Overlap-save: Etapa 4.

e) Reuniendo los resultados anteriores, se encuentra que la salida completa está dada por

$$y[n] = \{\underbrace{1,3,6,11,13}_{1^{\text{er}}\text{ etapa}},\underbrace{16,21,23,26,31}_{2^{\text{da}}\text{ etapa}},\underbrace{33,36,41,43,46}_{3^{\text{ra}}\text{ etapa}},\underbrace{45,35,20,0,0}_{4^{\text{ta}}\text{ etapa}}\},$$

$$0 \leq n \leq 19.$$

Obviando las muestras nulas que aparecen en la última etapa del método *overlap-save* a consecuencia del *padding* de ceros en el último bloque de muestras de la entrada, se comprueba que la $y[n]$ calculada coincide con la convolución lineal entre $x[n]$ y $h[n]$.



Overlap-save: comparación de resultados.

4.5. Ejercicios

Ejercicio 1. Determine los coeficientes de la SDF de las siguientes sucesiones periódicas utilizando la definición, y verifique usando MATLAB. **Observación:** en cada caso, se indica sólo un período de la sucesión periódica.

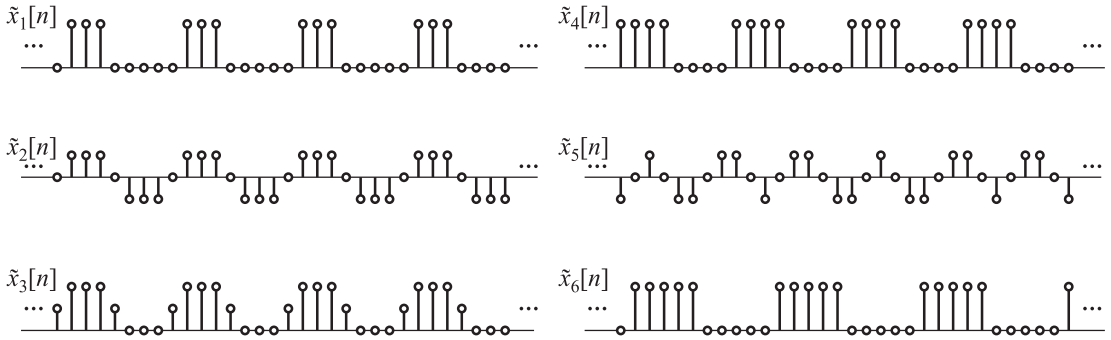
1. $\tilde{x}_1[n] = \{2, 0, 0, 2\}$, $N = 4$.
2. $\tilde{x}_2[n] = \{0, 0, 1, 0, 0\}$, $N = 5$.
3. $\tilde{x}_3[n] = \{3, -3, 3, -3\}$, $N = 4$.
4. $\tilde{x}_4[n] = \{1, j, j, 1\}$, $N = 4$.

Ejercicio 2. Determine las sucesiones a partir de los siguientes coeficientes de (un período de) la SDF usando la definición. Verifique usando MATLAB.

1. $\tilde{X}_1[k] = \{5, -2j, 3, 2j\}$, $N = 4$.
2. $\tilde{X}_2[k] = \{4, -5, 3, -5\}$, $N = 4$.
3. $\tilde{X}_3[k] = \{0, j, -2j, -j\}$, $N = 4$.
4. $\tilde{X}_4[k] = \{0, 0, 2, 0\}$, $N = 4$.

Ejercicio 3. Para las sucesiones que se muestran en la figura, especifique si el origen de coordenadas puede elegirse de modo que

1. $\tilde{X}[k]$ sea real;
2. $\tilde{X}[k]$ sea imaginaria (salvo para los k que sean múltiplos de N);
3. ¿Para cuáles sucesiones se verifica que $\tilde{X}[k] = 0$, $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$?



Ejercicio 4. Sea $\tilde{x}_1[n]$ una sucesión periódica, con período $N = 50$, donde un período está dado por

$$\tilde{x}_1[n] = \begin{cases} ne^{-0,3n}, & 0 \leq n \leq 25, \\ 0, & 26 \leq n \leq 49, \end{cases}$$

y sea $\tilde{x}_2[n]$ periódica con período $N = 100$, uno de cuyos períodos es

$$\tilde{x}_2[n] = \begin{cases} ne^{-0,3n}, & 0 \leq n \leq 25, \\ 0, & 26 \leq n \leq 99. \end{cases}$$

Las dos sucesiones difieren en su periodicidad, pero tienen la mismas muestras no nulas.

1. Encuentre la SDF $\tilde{X}_1[k]$ de $\tilde{x}_1[n]$, y grafique las muestras del módulo y la fase en función de k usando el comando `stem`.
2. Encuentre la SDF $\tilde{X}_2[k]$ de $\tilde{x}_2[n]$, y grafique las muestras del módulo y la fase en función de k.
3. ¿Cuál es la diferencia entre ambos gráficos de las SDF?

(I) **Ejercicio 5.** A partir de la sucesión $\tilde{x}_1[n]$ del Ejercicio 4, considere la sucesión $\tilde{x}_3[n]$ de período $N = 100$, cuyo período se obtiene concatenando dos períodos de $\tilde{x}_1[n]$

$$\tilde{x}_3[n] = \left[\; \tilde{x}_1[n], \quad \tilde{x}_1[n] \; \right].$$

Evidentemente, esta sucesión es diferente de la sucesión $\tilde{x}_2[n]$ del Ejercicio 4, aunque ambas tienen período $N = 100$.

1. Calcule los coeficientes de (un período de) la SDF $\tilde{X}_3[k]$ de $\tilde{x}_3[n]$, y grafique el módulo y la fase en función de k.
2. ¿Cuáles son los efectos de duplicar la periodicidad en los coeficientes de la SDF?
3. Extienda los resultados anteriores para el caso en que el período se multiplica por M. En particular, muestre que si

$$\tilde{x}_M[n] = \left[\underbrace{\tilde{x}_1[n], \quad \ldots, \quad \tilde{x}_1[n]}_{M \text{ veces}} \right]$$

entonces

$$\tilde{X}_M[Mk] = \begin{cases} M\,\tilde{X}_1[k], & k = 0, 1, \ldots N-1, \\ 0, & Mk \neq 0, M, \ldots M\,N. \end{cases}$$

(M) **Ejercicio 6.** Grafique el módulo de la Transformada de Fourier $X\left(e^{j\omega}\right)$ de las sucesiones discretas que se listan a continuación usando la TDF como herramienta de cálculo (es decir, calculando $X[k]$). Elija apropiadamente la longitud N de la transformada de modo que sus gráficos "tengan sentido".

1. $x_1[n] = 2\cos\left(0{,}2\pi n\right)\left(u[n] - u[n-10]\right)$.
2. $x_2[n] = \operatorname{sen}\left(0{,}45\pi n\right)\operatorname{sen}\left(0{,}55\pi n\right)$.
3. $x_3[n] = 3\left(2^n\right)$, $-10 \leq n \leq 10$.
4. $x_4[n] = (-0{,}5)^n$, $-10 \leq n \leq 10$.

5. $x_5[n] = (4/5)^n u[n]$.

Ⓒ **Ejercicio 7.** Se ha visto en la teoría que existe una relación directa entre $X\left(e^{j\omega}\right)$ y $\tilde{X}[k]$, donde $X[k]$ son las "muestras" de $X\left(e^{j\omega}\right)$ tomadas en las frecuencias $\omega_k = (2\pi/N)k$, $0 \leq k \leq N-1$. El propósito de este problema es mostrar que se puede conocer el valor de $X\left(e^{j\omega_0}\right)$ *para cualquier valor de frecuencia* ω_0 en base al conocimiento de las N muestras $X[k]$; esto es, se puede obtener una fórmula de interpolación. El siguiente procedimiento permite obtener tal ecuación.

1. Si $\tilde{X}[k]$ es la SDF de $\tilde{x}[n]$, exprese la transformada de Fourier $\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)$ de $\tilde{x}[n]$ como un tren de impulsos.
2. Observe que $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, donde $w[n]$ es una función apropiada de longitud finita (una "ventana"). Calcule $w[n]$.
3. De acuerdo al inciso anterior, $X\left(e^{j\omega}\right)$ puede expresarse como la convolución (periódica) de $\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)$ y $W\left(e^{j\omega}\right)$.

Evaluando en detalle el procedimiento descrito, muestre que $X\left(e^{j\omega}\right)$ puede calcularse como

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{N}\sum_k \tilde{X}[k]\frac{\text{sen}[\frac{N}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)]}{\text{sen}[\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)]}e^{-j\frac{N-1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)}.$$

Calcule explícitamente los límites de la sumatoria.

Ejercicio 8. Sea $x[n]$ una sucesión de longitud N, tal que $x[n] = 0$ si $n < 0$ o $n > N-1$, y que por lo menos tiene una muestra no nula. ¿Es posible que para tal sucesión $X\left(e^{j\omega_k}\right) = 0$, donde $\omega_k = \frac{2\pi}{M}k$, $0 \leq k \leq M-1$? Si la respuesta es afirmativa, construya un ejemplo. En caso contrario, explique su razonamiento. Analice los casos en que:

1. $M \geq N$,
2. $M < N$.

Ejercicio 9. Sea $X[k]$ la TDF de N puntos de la sucesión $x[n]$ de N puntos de longitud.

1. Muestre que si $x[n] = -x[N-1-n]$, entonces $X[0] = 0$. Considere por separado los casos en que N es par o impar.
2. Muestre que si N es par y $x[n] = x[N-1-n]$, entonces $X[N/2] = 0$.

Ejercicio 10. Se sabe que $x[n]$ es una sucesión de longitud $N = 6$, y que su TDF $X[k]$ es $X[k] = \{12, 7, 3, 0, 3, 7\}$, para $0 \leq k < 6$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? Justifique su respuesta.

1. La sucesión $x[n]$ es real.
2. La sucesión $x[n]$ es imaginaria pura.

3. La sucesión $x[n]$ es compleja.

4. La información dada es insuficiente para obtener una conclusión.

Ejercicio 11. Las sucesiones complejas de longitud finta N pueden descomponerse en sucesiones de N puntos conjugadas simétricas y antisimétricas a partir de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x_{ep}[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*[((-n))_N]\right), \quad 0 \le n \le N-1, \\ x_{op}[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] - x^*[((-n))_N]\right), \quad 0 \le n \le N-1, \end{aligned}$$

respectivamente.

1. Verifique analíticamente las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{x[n]\} &\overset{TDF}{\longleftrightarrow} X_{ep}[k], \\ j\,\mathrm{Im}\{x[n]\} &\overset{TDF}{\longleftrightarrow} X_{op}[k], \\ x_{ep}[n] &\overset{TDF}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{Re}\{X[((-k))_N]\} \\ x_{op}[n] &\overset{TDF}{\longleftrightarrow} j\,\mathrm{Im}\{X[k]\} = j\,\mathrm{Im}\{X[((-k))_N]\} \end{aligned}$$

2. Construya una función en MATLAB que, a partir de la sucesión $x[n]$ calcule las sucesiones conjugadas simétricas y antisimétricas $x_{ep}[n]$ y $x_{op}[n]$, respectivamente.

3. Verifique las propiedades de simetría enunciadas arriba utilizando la sucesión $x[n] = (0{,}9e^{j\frac{\pi}{3}n})(u[n] - u[n-20])$.

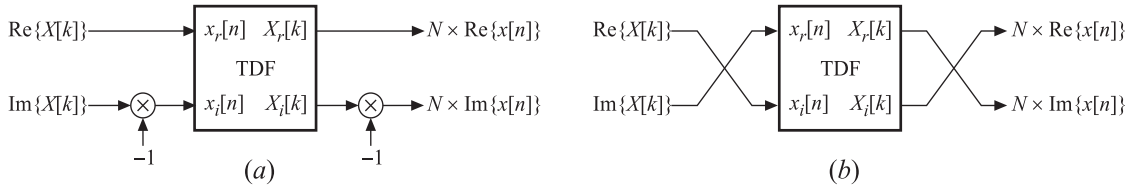
4. Utilice las propiedades enunciadas arriba para computar *simultáneamente* la TDF de dos sucesiones reales $x_1[n]$ y $x_2[n]$, ambas de longitud N, formando la sucesión compleja $x[n] = x_1[n] + jx_2[n]$, recuperando $X_1[k]$ y $X_2[k]$ a partir de $X[k]$. Compruebe sus resultados para las siguientes dos sucesiones:

$$x_1[n] = \cos(0{,}25\pi n), \quad x_2[n] = \mathrm{sen}(0{,}75\pi n), \quad 0 \le n \le 63.$$

Ayuda: Aunque la operación módulo, indicada aquí como $((n))_N$ se puede implementar con el comando `rem(n,N)`, no resulta útil si $n < 0$. Por ello se sugiere implementar la función `mod`, tal como se detalla a continuación:

```
function m = mod(n,N)
% Esta función calcula ((n))N, aun para n<0.
%
m = rem(n,N);
m = m+N;
m = rem(m,N);
```

Ejercicio 12. El en Capítulo 2 se estudió cómo calcular la transformada de Fourier inversa a partir de la transformada directa. Algunas relaciones similares pueden aplicarse para calcular la TDF inversa a partir de la TDF. En los gráficos de la figura, el bloque indicado TDF calcula la transformada de Fourier de la sucesión $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$, dando como resultado $X[k] = X_r[k] + jX_i[k]$.



1. Demuestre que la sucesión $x[n]$ se puede calcular a partir de $X[k]$ aplicando los siguientes pasos, como se sugiere en la Fig. (a) :
   - Conjugar $X[k]$.
   - Calcular la TDF directa de $X^*[k]$.
   - Conjugar el resultado de la TDF directa. En definitiva,

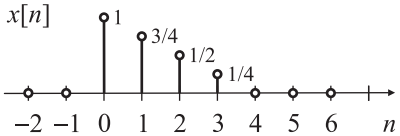
$$x[n] = \frac{1}{N}\mathcal{F}\{X^*[k]\}^*.$$

2. Otra forma de calcular la transformada inversa también hace uso de la propiedad de conjugación, como se muestra en la Fig. (b)
   - Intercambiar las partes real e imaginaria de $X[k]$, definiendo un vector $v[n] = \text{Im}\{X[k]\}|_{k=n} + j\,\text{Re}\{X[k]\}|_{k=n}$.
   - Calcular $V[k]$, la TDF directa de $v[n]$.
   - Intercambiar la parte real e imaginaria de $V[k]$. En síntesis,

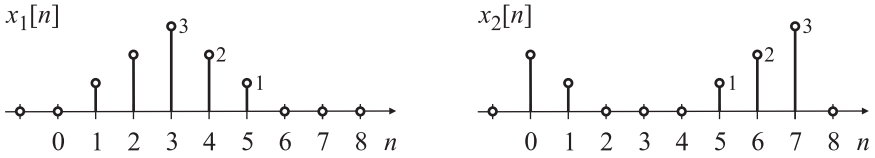
$$x[n] = \frac{1}{N}\,\text{Im}\left\{\mathcal{F}\{\text{Im}\{X[k]\}+j\,\text{Re}\{X[k]\}\}\right\}+\frac{j}{N}\,\text{Re}\left\{\mathcal{F}\{\text{Im}\{X[k]\}+j\,\text{Re}\{X[k]\}\}\right\}.$$

3. Una tercera manera hace uso de rotaciones.
   - Defina $v[n] = X[k]|_{k=((-n))_N}$.
   - Calcule $V[k]$, la TDF de $v[n]$.
   - Verifique que $x[n] = (1/N)\ V[k]|_{k=n}$.

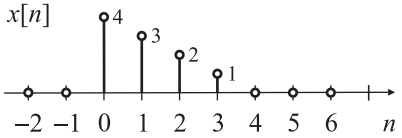
Ejercicio 13. Si $X[k]$ es la TDF de 4 puntos de la sucesión de longitud finita $x[n]$ que se muestra en la figura, grafique la secuencia $y[n]$ cuya TDF es $Y[k]$ es $Y[k] = W_4^{3k}X[k]$.



Ejercicio 14. Determine la relación entre $X_1[k]$ y $X_2[k]$, las TDF de dos sucesiones $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de longitud finita ($N = 8$ muestras) que se muestran en la figura.



Ejercicio 15. Sea $X[k]$ es la TDF de 6 puntos de la sucesión $x[n]$ real y de longitud finita que se muestra en la figura.



1. Grafique la secuencia de longitud finita $y[n]$ cuya TDF de 6 puntos es $Y[k] = W_6^{4k} X[k]$.
2. Grafique la secuencia de longitud finita $w[n]$ cuya TDF de 6 puntos es $W[k] = \text{Re}\{X[k]\}$.
3. Grafique la secuencia de longitud finita $q[n]$ cuya TDF de 3 puntos es $Q[k] = X[2k]$, $k = 0, 1, 2$.

Ejercicio 16. Una sucesión $x[n]$ de duración finita $N = 8$ tiene la TDF $X[k]$ que se muestra en la Fig. I. Una sucesión nueva, de longitud $N = 16$ se genera a partir de $x[n]$ como

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De la Fig. II, elija la TDF de 16 puntos correspondiente a $y[n]$.

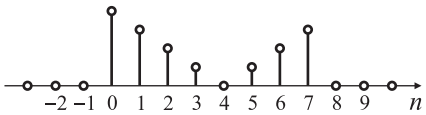


Figura I

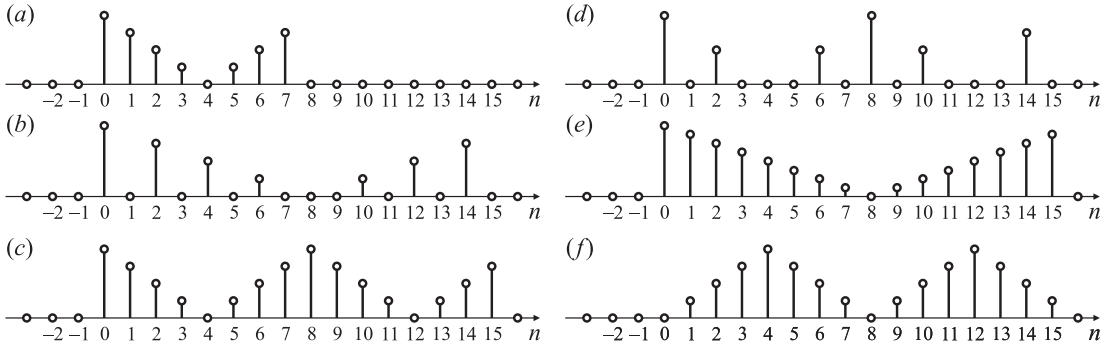
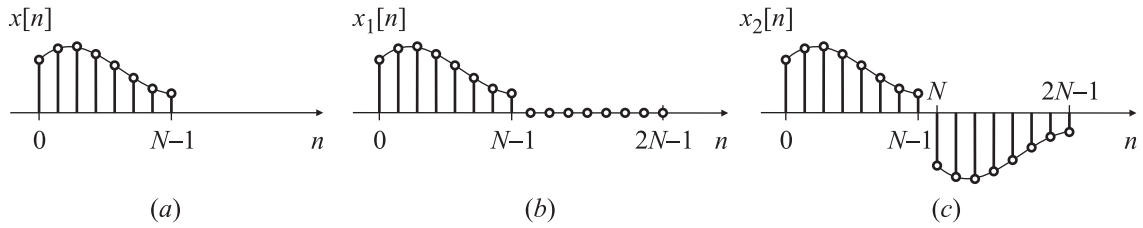


Figura II

Ejercicio 17. Sea $x[n]$ una sucesión de longitud finita N que se muestra en la figura (a). Las líneas llenas sugieren la envolvente de los valores de la sucesión entre 0 y $N-1$. A partir de $x[n]$ se construyen dos sucesiones $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de longitud finita $2N$, como se indica en las figuras (b) y (c), y expresadas matemáticamente como:

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad x_2[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1, \\ -x[n-N], & N \le n \le 2N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sea $X[k]$ la TDF de N puntos de $x[n]$, y $X_1[k]$ y $X_2[k]$ las TDF de $2N$ puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente.



(*a*) (*b*) (*c*)

1. Determine la forma más simple de obtener $X[k]$ a partir de $X_1[k]$.
2. Calcule $X_2[k]$ a partir de $X_1[k]$.
3. Justifique si $X_2[k]$ se puede obtener a partir de $X[k]$.

Ejercicio 18. Si $X[k]$ es la TDF de N puntos de $x[n]$ (N es par), determine las sucesiones $y[n]$ cuyas TDF de N puntos se listan a continuación, y expréselas en función de $x[n]$.

$Y[k] = (-1)^k X[k]$.

$Y[k] = \text{Re}\{X[k]\} = \frac{1}{2}\left(X[k] + X^*[k]\right)$.

$$Y[k] = \begin{cases} X[k - N/2], & k \geq N/2, \\ X[k + N/2], & k < N/2. \end{cases}$$

Ejercicio 19. Para la sucesión temporal $x[n] = (1/2)^n u[n]$,

1. Calcule $X(e^{j\omega})$
2. Muestree $X(e^{j\omega})$ en 4 puntos, y determine $X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{4}k}$, $k = 0, 1, 2, 3$.
3. Compute $\hat{x}[n]$, la TDF inversa de $X[k]$.
4. Compare $x[n]$ e $\hat{x}[n]$, y justifique el resultado expresando analíticamente $\hat{x}[n]$ en función de $x[n]$.

Ayuda: para resolver este problema es conveniente repasar los contenidos de la Sección 8.4, "Sampling the Fourier Transform" del libro de Oppenheim *et al*.

(I) **Ejercicio 20.** Las sucesiones $x[n]$ e $y[n]$ tienen longitud N. A partir de ellas se genera una tercera sucesión $w[n]$ de largo $3N$ como se indica a continuación:

$$w[n] = \{x[0], y[0], 0, x[1], y[1], 0, x[2], y[2], 0, \ldots x[N-1], y[N-1], 0\}.$$

Exprese $W[k]$ en función de $X[k]$ e $Y[k]$.

Ejercicio 21. Considere la sucesión $x[n] = A\cos\omega_0 n + B\cos\omega_1 n$, $0 \leq n \leq N-1$, con $A = 1$, $B = 0{,}5$, $\omega_0 = (1/N)2\pi$, $\omega_1 = (3/N)2\pi$, $N = 8$.

1. Calcule y grafique $X\left(e^{j\omega}\right)$.
2. Calcule y grafique $X_N[k]$, la TDF de N puntos de $x[n]$.
3. Si la transformada de Fourier $X\left(e^{j\omega}\right)$ de $x[n]$ se muestrea en $\omega_k = (2\pi/Q)k$, $0 \leq k \leq Q-1$, donde $Q = N/2 = 4$, se obtiene una transformada discreta $Z[k]$, $0 \leq k \leq Q-1$. Escriba $z[n]$ en función de $x[n]$, y calcule explícitamente $z[n]$ para $0 \leq n \leq Q-1$.
4. Se "acorta" la sucesión $x[n]$ a la mitad, obteniéndose la sucesión $w[n] = x[n]$, $0 \leq n \leq Q-1$. Grafique $W\left(e^{j\omega}\right)$ y $W[k]$, $0 \leq k \leq Q-1$.
5. ¿Es cierto que $Z[k] = W[k]$, $0 \leq n \leq Q-1$, donde $Z[k]$ y $W[k]$ son las TDF de los incisos 3 y 4, respectivamente? Justifique.

Ⓒ **Ejercicio 22.** Sean $(x[n], y[n])$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ las coordenadas cartesianas de los vértices de un polígono simple $\mathcal{P}$ de N lados, orientado positivamente, y sea $z[n] \doteq x[n] + jy[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

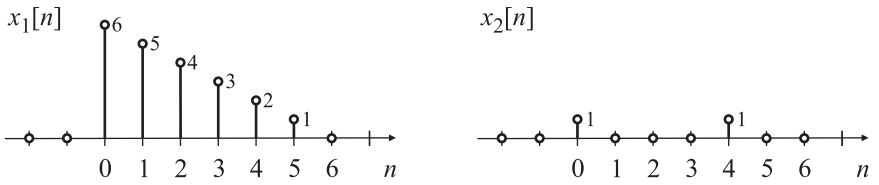
1. Verifique que el área del triángulo con vértices 0, $ae^{j\alpha}$, $be^{j\beta}$, donde $a > 0$, $b > 0$, y $0 \leq \alpha < \beta < \pi$ es $A_T = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\{(be^{j\beta})(\overline{ae^{j\alpha}})\}$.
2. Demuestre que el polígono $\mathcal{P}$ tiene área

$$A_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{N-1} z[n+1]\overline{z[n]} = \frac{N}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)|Z[k]|^2 .$$

3. Muestre que

$$A_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{N-1}\{y[n+1] - y[n-1]\}x[n] = -iN\sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\overline{Y[k]}X[k].$$

Ejercicio 23. Calcule la convolución circular de $N = 6$ y $N = 10$ puntos para las dos sucesiones de la figura, y verifique sus resultados usando Matlab (calculando la anti-transformada del producto de las transformadas).



Ejercicio 24. Para las dos sucesiones de 4 puntos $x[n]$ y $h[n]$, definidas por

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\pi n/2), && n = 0, 1, 2, 3, \\ h[n] &= 2^n, && n = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

1. Calcule $X[k]$, la TDF de 4 puntos de $x[n]$.

2. Calcule $H[k]$, la TDF de 4 puntos de $h[n]$.

3. Calcule $y[n] = x[n] \circledast h[n]$ usando la convolución circular

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[((n-m))_N].$$

4. Calcule $y[n] = x[n] \circledast h[n]$ multiplicando las TDF de $x[n]$ y $h[n]$ y calculando la transformada inversa.

Nota: Se sugiere resolver el inciso 3 "a mano" para comprender el funcionamiento de la convolución circular.

Ejercicio 25. Si $x[n] = \{1, -3, 1, 5\}$ e $y[n] = \{7, -7, 9, 3\}$, ¿existe una sucesión $w[n]$ de longitud $N = 4$ tal que $y[n] = x[n] \circledast w[n]$?

Ⓒ **Ejercicio 26.** Sea $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$, $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_{N-1})$ la representación vectorial de dos sucesiones $c[n]$, $d[n]$ de longitud finita, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Se definen las *matrices circulantes*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & c_{N-3} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_0 & d_{N-1} & d_{N-2} & \cdots & d_1 \\ d_1 & d_0 & d_{N-1} & \cdots & d_2 \\ d_2 & d_1 & d_0 & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{N-1} & d_{N-2} & d_{N-3} & \cdots & d_0 \end{bmatrix}.$$

1. Muestre cómo relacionar el producto matricial $\mathbf{C}\mathbf{x}^T$ con la convolución $\mathbf{c} \circledast \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ es la representación vectorial una sucesión $x[n]$.

2. Usando los resultados del inciso anterior, muestre que CD es la matriz circulante correspondiente a $\mathbf{c} \circledast \mathbf{d}$.

3. Pruebe que $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ conmutan: $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$.

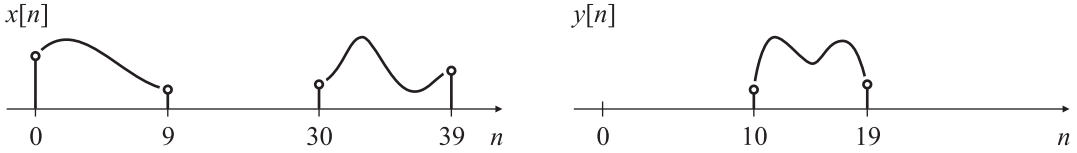
Ⓘ **Ejercicio 27.** En este problema se investiga el resultado del cálculo reiterado de la TDF.

1. Suponga que $x[n]$ es una sucesión de longitud N, y sea $y[n] = TDF_N\{TDF_N\{x[n]\}\}$. Exprese la sucesión $y[n]$ en función de los elementos de la sucesión $x[n]$ de la forma más sencilla posible.

2. La sucesión $w[n]$ se obtiene por la aplicación reiterada P veces de la TDF a una sucesión $x[n]$. ¿Cuál es el mínimo valor de P para el cual $w[n] = Ax[n]$, donde A es una constante? ¿Cuánto vale A?

(I) **Ejercicio 28.** Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos sucesiones de longitud finita, tales que $x[n]$ se anula para $n < 0$ y $n > 40$, y para $9 < n < 30$, e $y[n]$ se anula para $n < 10$ y $n > 19$, tal como se muestra en la figura. Sea $w[n]$ la convolución *lineal* entre $x[n]$ e $y[n]$, y $g[n]$ la convolución *circular* de $N = 40$ puntos entre $x[n]$ e $y[n]$

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k],$$
$$g[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[((n-k))_N].$$



1. Determine los valores de n para los cuales $w[n]$ puede ser no nula.
2. Especifique los valores de n para los cuales $w[n]$ puede calcularse a partir de $g[n]$.

Ejercicio 29. Considere dos sucesiones $x_1[n]$ y $x_2[n]$ definidas como

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 99, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \qquad x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 9, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Calcule y grafique la convolución lineal $x_1[n] * x_2[n]$.
2. Calcule y grafique la convolución circular de 100 puntos $x_1[n] \circledast x_2[n]$.
3. Calcule y grafique la convolución circular de 110 puntos $x_1[n] \circledast x_2[n]$.

(I) **Ejercicio 30.** Se desea filtrar la sucesión de datos $x[n] = u[n]$ con un filtro con respuesta impulsiva $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$. Calcule la salida del sistema $y[n] = h[n] * x[n]$ por medio de:

1. la definición de suma convolución: $y[n] = \sum_k h[k]x[n-k]$;
2. el método overlap-add;
3. el método overlap-save.

Para los incisos (2) y (3), utilice una TDF de orden 4, y ajuste la longitud de los bloques de la entrada y de la respuesta impulsiva según corresponda. Verifique que se obtiene el mismo resultado en los tres casos. **Nota**: Aunque en una implementación real las convoluciones de cada etapa se calcularían efectuando la TDF inversa del producto de $H[k]$ con la TDF de cada bloque de entrada, para simplificar el ejercicio es suficiente calcular la convolución (lineal o circular, según el caso) en el dominio tiempo. Las sucesiones se han elegido de manera que las convoluciones puedan efectuarse por inspección.

(I) **Ejercicio 31.** Usualmente, el funcionamiento de la técnica de filtrado por bloques overlap-save es más difícil de entender que el método overlap-add. En este ejercicio se exploran algunas alternativas para tratar de facilitar la comprensión. En todos los casos, utilice las mismas señales $x[n]$ y $h[n]$ del Ejercicio 30, y compare sus resultados con los de la convolución lineal $x[n] * h[n]$.

1. Calcule las tres primeras etapas de la convolución por bloques por el método overlap-save *sin* solapar los bloques de entrada. Explique sus resultados.
2. Como al aplicar la convolución circular se descartan las primeras $P-1$ muestras, uno estaría tentado a reemplazar las primeras $P-1$ muestras de los bloques de entrada (las que se solapan) por valores arbitrarios, por ejemplo muestras nulas. Calcule los tres primeras etapas de la convolución por bloques efectuando el solapamiento de los bloques de las muestras de entrada, pero reemplazando las muestras solapadas por ceros. Justifique sus resultados.

(I) **Ejercicio 32.** Se desea filtrar un arreglo de datos muy largo con un filtro FIR cuya respuesta impulsiva tiene una longitud $P = 50$ muestras utilizando la técnica de procesamiento por bloques. Para hacer esto:

- las secciones de entrada se solapan en V muestras;
- de la salida de cada sección se extraen M muestras tal que cuando estas muestras son agrupadas, la secuencia resultante es la salida filtrada deseada.

La entrada se segmenta en bloques de $L = 100$ muestras de longitud, y el tamaño de la TDF utilizada para calcular las convoluciones parciales es $N = 128$ puntos. Suponga además que la secuencia de salida de la convolución circular está indexada de 0 a 127.

1. Determine V.
2. Determine M.
3. Determine el índice del comienzo y el final de los M puntos extraídos; es decir, determine cuál de los 128 puntos resultantes de la convolución circular son extraídos y anexados con los resultados de la sección previa.

(I) **Ejercicio 33.** Calcule la convolución por bloques entre las señales $x[n]$ y $h[n]$ del Ejercicio 30 utilizando bloques entrada de tamaño $L = 4$, y TDF de tamaño $N = 4$. Para cada convolución parcial, determine el número de puntos que se deben descartar (V), y la cantidad de puntos que debe reservarse para sumarlos al resultado del cálculo del próximo bloque.

Ejercicio 34. Se desea implementar la convolución lineal de una sucesión de 10000 puntos con un FIR cuya respuesta impulsiva tiene una longitud de 100 muestras. La convolución se efectuará usando TDF y TDF inversas de 256 puntos.

1. ¿Cuál es el mínimo número de TDF de 256 puntos, y de TDF inversas de 256 puntos necesarias para implementar la convolución de la secuencia de 10000 puntos si se utiliza el método overlap-add? Justifique.

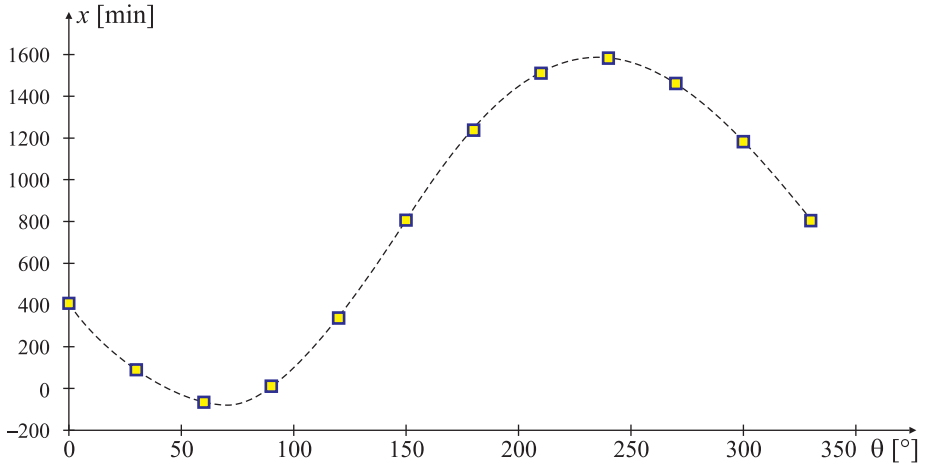
2. ¿Cuál es el mínimo número de TDF de 256 puntos, y de TDF inversas de 256 puntos necesarias para implementar la convolución de la secuencia de 10000 puntos si se utiliza el método overlap-save? Justifique.

3. Se verá más adelante que, cuando N es potencia de 2, la TDF o la TDF inversa se puede efectuar con $(N/2)\log_2 N$ multiplicaciones complejas, y $(N/2)\log_2 N$ adiciones complejas. Para el mismo filtro usado en (1) y en (2), compare el número de operaciones aritméticas (sumas y productos) necesarias para implementar el método overlap-add, overlap-save, y la convolución directa.

Ⓒ **Ejercicio 35.** En la reseña histórica del Capítulo 2 se incluye la tabla siguiente, que consigna los datos de posición del asteroide Pallas, donde variable θ representa la ascensión en grados, y la variable x la declinación en minutos.

θ (grados)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
x (minutos)	408	89	−66	10	338	807	1238	1511	1583	1462	1183	804

Encuentre una función $x(\theta)$ continua y periódica que pase por cada uno de los 12 pares de puntos con el menor error posible.
Ayuda: exprese $x(\theta)$ en series de Fourier, y use la TDF para encontrar los coeficientes de la serie.
Nota: Para resolver este problema Gauss ideó un método de cálculo muy eficiente, que sería redescubierto años más tarde como la FFT.



Ejercicio 36. Convolución por bloques

Se debe calcular la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$ utilizando los métodos de procesamiento por bloques. El largo de la sucesión $x[n]$ es N_x, y el de $h[n]$ es P. Las convoluciones se calcularán con el método de la convolución rápida usando TDFs de largo $N = 8$.

1. Para el método *overlap-add*:
   a) Determinar el largo L_a de los bloques $x_i[n]$ en que debe partirse la sucesión de entrada $x[n]$.
   b) Calcular la salida $y_i[n]$ que resulta de la convolución de $h[n]$ con cada uno de los bloques $x_i[n]$.
   c) Indicar para cada bloque las muestras que deben solaparse con las del bloque anterior y el siguiente.
   d) Sumar apropiadamente las salidas de cada bloque para obtener la salida completa $y[n]$.
   e) Comparar la salida calculada con el resultado de la convolución común entre $x[n]$ y $h[n]$.
2. Para el método *overlap-save*:
   a) Determinar el largo L_s de los bloques $x_i[n]$ en que debe partirse la sucesión de entrada $x[n]$.
   b) Calcular la salida $y_i[n]$ que resulta de la convolución de $h[n]$ con cada uno de los bloques $x_i[n]$.
   c) Indicar para cada bloque las muestras que deben descartarse y el rango de las muestras "útiles".
   d) A partir de la salidas $y_i[n]$ de cada bloque indique cómo obtener la salida completa $y[n]$.
   e) Comparar la salida calculada con el resultado de la convolución común entre $x[n]$ y $h[n]$.
3. Una variante del método *overlap-add* es elegir el largo L de los bloques menor que $L_a = N - (P - 1)$. Explique el funcionamiento del método en este caso, y comente sobre su eficiencia respecto al indicado en el inciso 1.
4. Para el método *overlap-save*, también se puede elegir el largo L de los bloques menor que L_s, (pero mayor que L_a). Explique en este caso una forma de implementar el método de convolución por bloques indicando las muestras que se deben descartar en cada bloque, el número de muestras "útiles", y comente sobre la eficiencia de esta técnica respecto a la del inciso 2.

Observaciones

- Este es un ejercicio más de la práctica de problemas. La idea es presentar los resultados en una forma legible, pero no necesariamente "linda". Lo que se espera es que se indiquen cómo queda conformado cada bloque (de entrada, resultados intermedios, convolución), los índices correspondientes a cada bloque, qué muestras se "solapan", "guardan" o "descartan", etc.
- **No es necesario hacer las gráficas** (aunque se incluirán en las soluciones entregadas por la cátedra).
- El informe puede presentarse en forma manuscrita o impresa; la idea es no gastar más tiempo del necesario.

- El ejercicio tiene fecha de vencimiento. La presentación en una fecha posterior será penada con una reducción de la nota.
- Para calcular la convolución circular se puede utilizar la siguiente función

```
function y = ccirc(x,h,N)
if nargin <3
   N = max([length(x) length(h)]);
end
y = ifft(fft(x,N).*fft(h.N);
```

Ejemplo

Como ejemplo, se muestran el resultado de efectuar la convolución por bloques entre las sucesiones

$$\begin{aligned} x[n] &= \{1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5\}, \\ h[n] &= \{1,2,3,4\}. \end{aligned}$$

En este caso, el largo P de $h[n]$ es 4, el tamaño N de la TDF es 8, y el largo de los bloques de $x[n]$ se ajusta según el método de cálculo.

1. **Método overlap-add:**
   En este caso la sucesión de entrada se parte en bloque de largo $L_a = N - (P-1) = 5$, y por lo tanto el cálculo demanda tres etapas.

   a) Etapa 1:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \{1,1,1,2,2\}, && 0 \le n \le 4, \\ y_1[n] &= h[n] * x_1[n] = \{1,3,6,11,13,14,14,8\}, && 0 \le n \le 7, \end{aligned}$$

   De la salida parcial $y_1[n]$ las $P-1=3$ últimas muestras ($\{14,14,8\}$) deberán sumarse a las $P-1=3$ primeras muestras de la segunda salida parcial. Sin embargo, las primeras $L=5$ muestras son "correctas", y pueden escribirse en el *buffer* de salida:

$$y[n] = \{1,3,6,11,13\}, \quad 0 \le n \le 4.$$

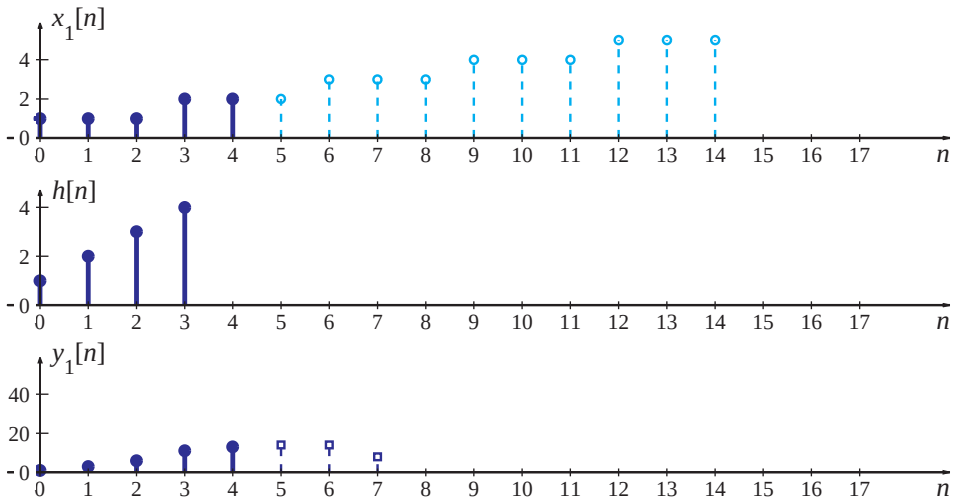
   b) Etapa 2:

$$\begin{aligned} x_2[n] &= \{2,3,3,3,4\}, && 5 \le n \le 9, \\ y_2[n] &= h[n] * x_1[n] = \{2,7,15,26,31,29,24,16\}, && 5 \le n \le 12, \end{aligned}$$

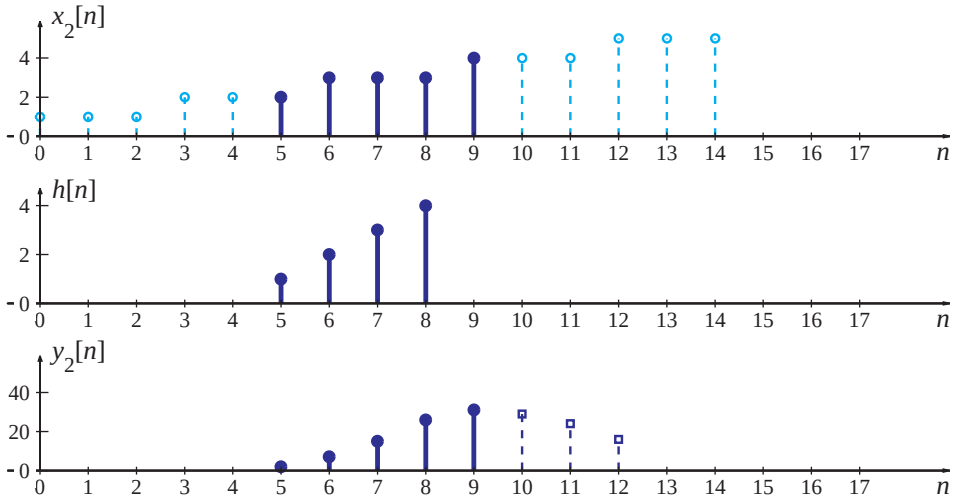
   A las $P-1=3$ primeras muestras de la salida parcial $y_2[n]$ deben sumarse las últimas $P-1=3$ muestras de la salida parcial anterior, de modo que en el buffer de salida puede escribirse el segundo bloque formado por las muestras

$$\begin{aligned} y[n] &= \{2+14, 7+14, 15+8, 26, 31\}, \\ &= \{16,21,23,26,31\}. && 5 \le n \le 9 \end{aligned}$$

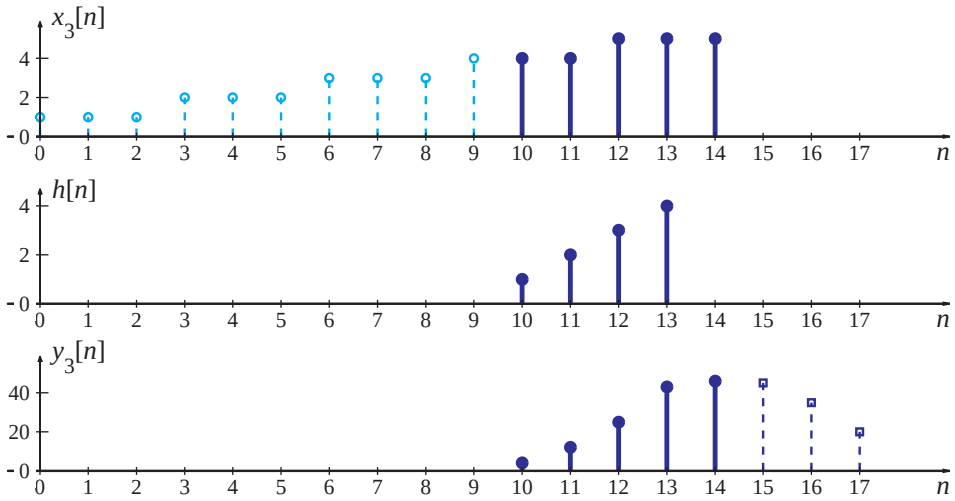
   Las últimas $P-1=3$ muestras ($\{\{29,24,16\}$, correspondientes a $n=10,11,12$) se deben sumar a las primeras tres muestras de la salida parcial siguiente.



Overlap-add: Etapa 1.



Overlap-add: Etapa 2.



Overlap-add: Etapa 3.

c) Etapa 3:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \{4,4,5,5,5\}, && 10 \le n \le 14, \\ y_1[n] &= h[n] * x_1[n] = \{4,12,25,43,46,45,35,20\}, && 10 \le n \le 17, \end{aligned}$$

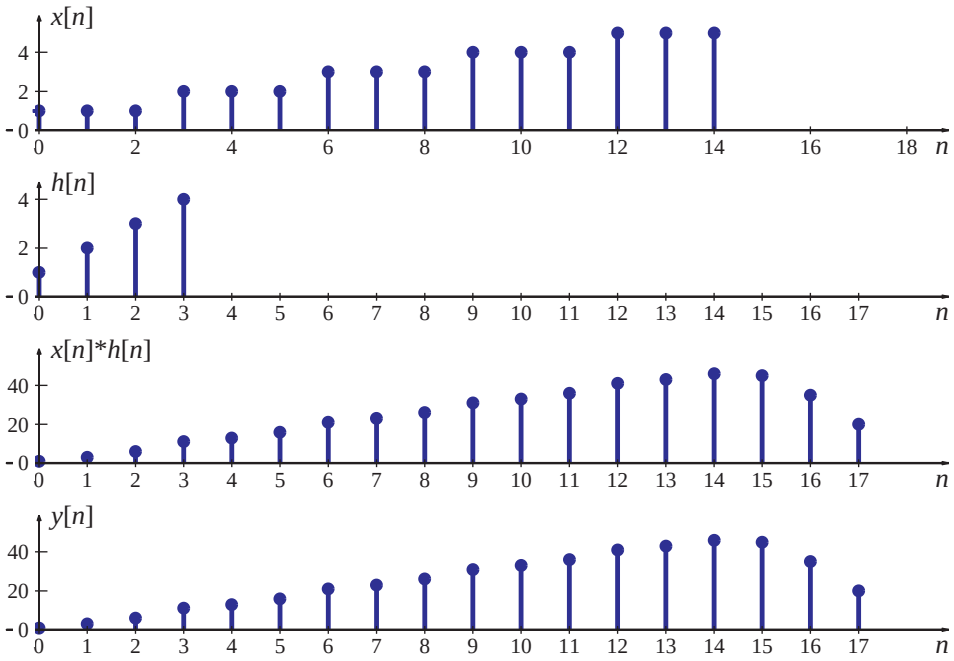
Para calcular el último bloque de salida se deben sumar las últimas 3 muestras del bloque $y_2[n]$ a las primeras 3 muestras de $y_3[n]$. Entonces

$$\begin{aligned} y[n] &= \{4+29, 12+24, 25+16, 43, 46, 45, 35, 20\}, \quad 10 \le n \le 17, \\ &= \{33, 36, 41, 43, 46, 45, 35, 20\} \end{aligned}$$

d) Finalmente, recolectando todos los resultados, se encuentra que

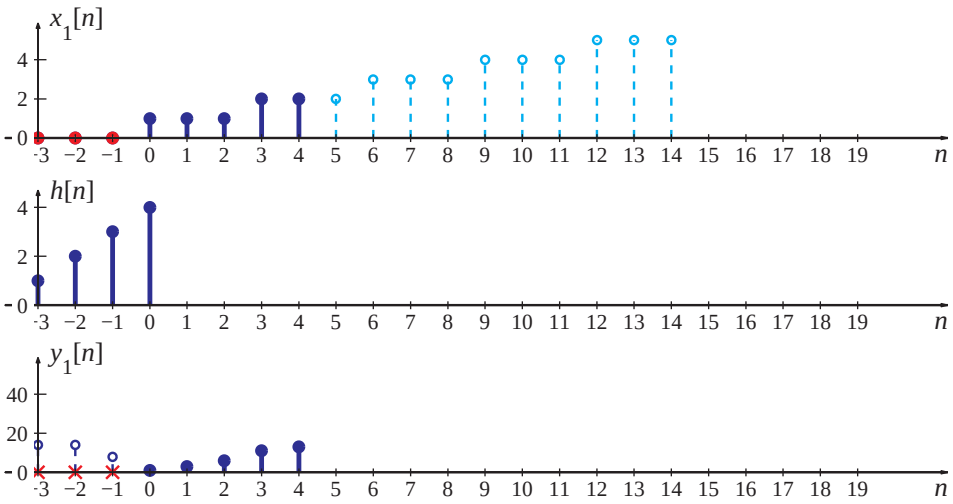
$$y[n] = \{\underbrace{1,3,6,11,13}_{1^{\text{er}}\text{ etapa}}, \underbrace{16,21,23,26,31}_{2^{\text{da}}\text{ etapa}}, \underbrace{33,36,41,43,46,45,35,20}_{3^{\text{ra}}\text{ etapa}}\}, \quad 0 \le n \le 17.$$

En la figura se representa la sucesión de entras $x[n]$, la respuesta impulsiva $h[n]$, y la salida que resulta de hacer la convolución (lineal) entre $x[n]$ y $h[n]$, y la salida $y[n]$ que resulta del cálculo usando el método overlap-add.

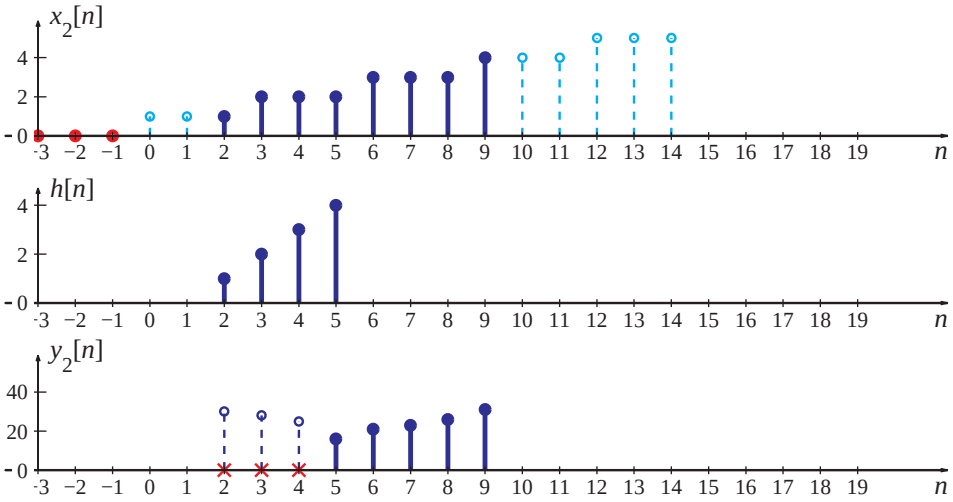


Overlap-add: comparación de resultados.

2. **Método overlap-save:**
En este método, donde el largo de la respuesta impulsiva es $P = 4$, y el largo de la TDF que se utiliza para calcular la convolución circular es $N = 8$, la entrada se parte en bloques de largo $L_s = N = 8$. De acuerdo con estos valores, se deben descartar las primeras $P - 1 = 3$ muestras de cada convolución circular, y para evitar perder las primeras 3 muestras de la convolución, se agregan 3 ceros al principio de la sucesión $x[n]$, en los índices $\{-3, -2-1\}$.



Overlap-save: Etapa 1.



Overlap-save: Etapa 2.

a) Etapa 1:
El primer bloque de la sucesión de entrada es

$$x_1[n] = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 1, 1, 2, 2\}, \quad -3 \leq n \leq 4,$$

donde se resaltaron las muestras nulas agregadas al comienzo de $x[n]$. La sucesión $h[n]$ se debe completar con ceros, de manera de llevar su longitud total a $N = 8$ muestas:

$$h[n] = \{1, 2, 3, 4, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}.$$

El resultado de la convolución circular de $x[n]$ con $h[n]$ es

$$x_1[n] \circledast h[n] = \{\mathbf{14}, \mathbf{14}, \mathbf{8}, 1, 3, 6, 11, 13\}, \quad -3 \leq n \leq 4.$$

Las primeras $P - 1 = 3$ muestras deben descartarse, de modo que el primer bloque de la salida está formado por le conjunto de 5 muestras dado por

$$y_1[n] = \{1, 3, 6, 11, 13\}, \quad 0 \leq n \leq 4.$$

como se muestra en la figura. Las muestras que se deben descartar se indican con línea de trazos, y cruces en los índices respectivos.

b) Etapa 2:
En esta etapa, el segundo bloque de la sucesión de entrada se elige de modo que se solape con las $P-1=3$ últimas muestras del bloque anterior, de modo que

$$x_2[n] = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, 2, 3, 3, 3, 4\}, \quad 2 \leq n \leq 9.$$

En negrita se indican las muestras que se "guardaron" de $x_1[n]$. El resultado de la convolución circular entre $x_2[n]$ y $h[n]$ es

$$x_2[n] \circledast h[n] = \{\mathbf{30}, \mathbf{28}, \mathbf{25}, 16, 21, 23, 26, 31\}, \quad 2 \leq n \leq 9$$

y como se deben descartar las primeras $P-1$ muestras (destacadas en negrita), el segundo bloque de salida resulta

$$y_2[n] = \{16, 21, 23, 26, 31\}, \quad 5 \leq n \leq 9.$$

c) Etapa 3:
El bloque de entrada de esta etapa es

$$x_3[n] = \{\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 4, 4, 5, 5, 5\}, \quad 7 \leq n \leq 14,$$

que repite en los $P-1=3$ primeros lugares las últimas $P-1=3$ muestras almacenadas del bloque de entrada anterior. La convolución circular entre $x_3[n]$ y $h[n]$ es

$$x_3[n] \circledast h[n] = \{\mathbf{48}, \mathbf{44}, \mathbf{39}, 33, 36, 41, 43, 46\}, \quad 7 \leq n \leq 14,$$

donde se han resaltado las $P-1$ muestras que se deben descartar. Por lo tanto, el tercer bloque de salida es

$$y_3[n] = \{33, 36, 41, 43, 46\}, \quad 10 \leq n \leq 14,$$

como se representa en la figura.

d) Etapa 4:
Finalmente, el bloque de entrada de esta última etapa es

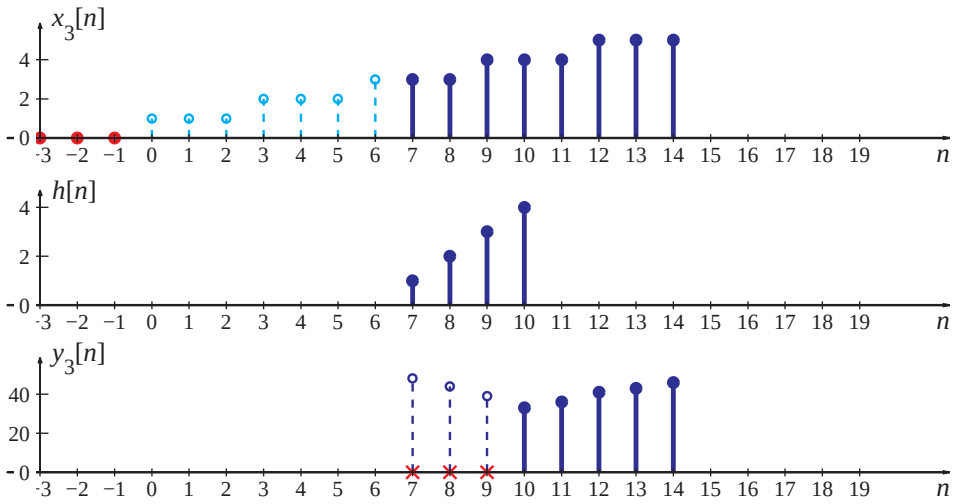
$$x_4[n] = \{\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5}, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad 12 \leq n \leq 19.$$

Este bloque está formado por las últimas tres muestras del bloque de entrada anterior, y cinco muestras nulas que resultan de efectuar un *padding* de ceros para ajustar al largo de la TDF. El resultado de la convolución circular entre $x_4[n]$ y $h[n]$ es

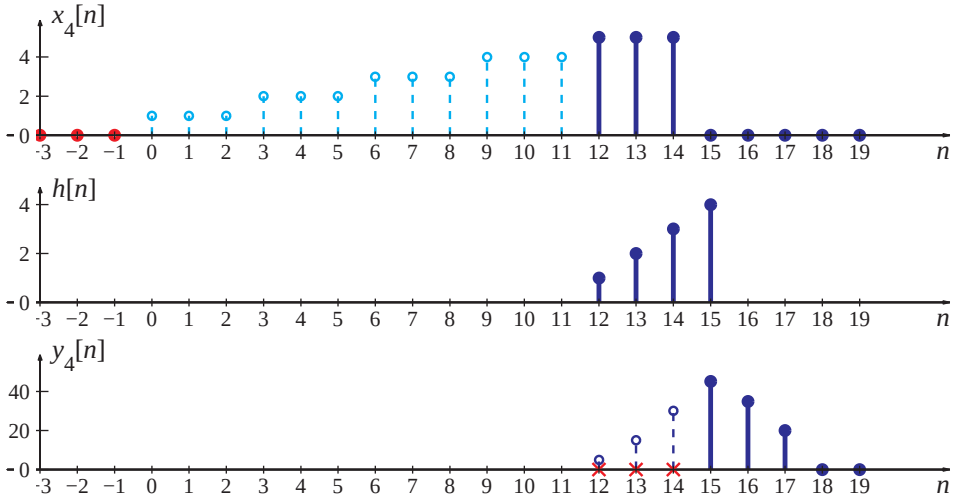
$$x_4[n] \circledast h[n] = \{\mathbf{5}, \mathbf{15}, \mathbf{30}, 45, 35, 20, 0, 0\}, \quad 12 \leq n \leq 19.$$

Nuevamente, las tres primeras muestras (resaltadas en negrita) deben descartarse, y por lo tanto el último bloque de salida es

$$y_4[n] = \{45, 35, 20, 0, 0\}, \quad 15 \leq n \leq 19.$$



Overlap-save: Etapa 3.



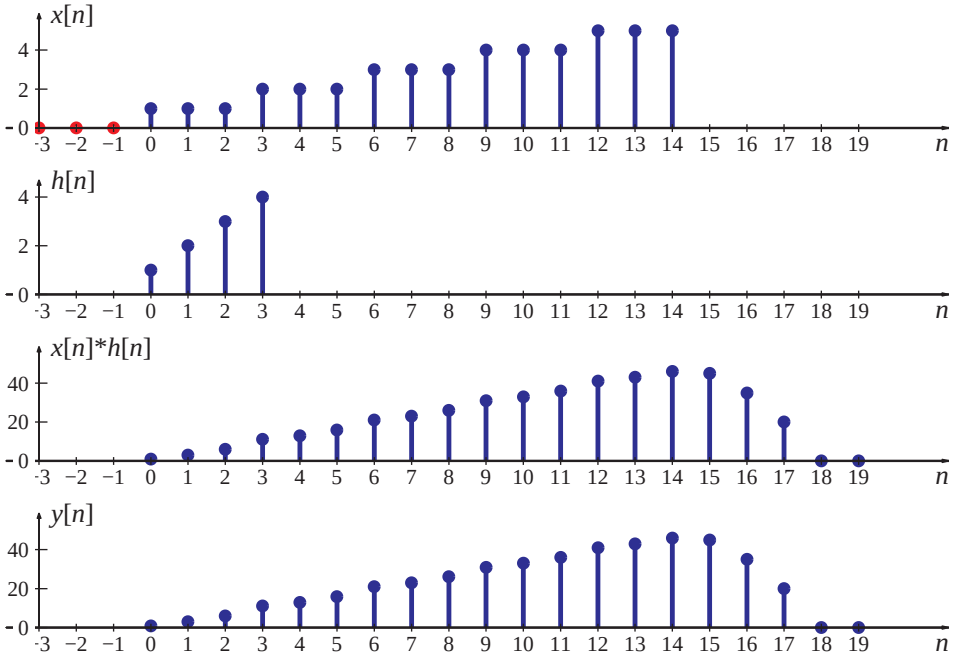
Overlap-save: Etapa 4.

e) Reuniendo los resultados anteriores, se encuentra que la salida completa está dada por

$$y[n] = \{\underbrace{1,3,6,11,13}_{1^{\text{er}}\text{ etapa}},\underbrace{16,21,23,26,31}_{2^{\text{da}}\text{ etapa}},\underbrace{33,36,41,43,46}_{3^{\text{ra}}\text{ etapa}},\underbrace{45,35,20,0,0}_{4^{\text{ta}}\text{ etapa}}\},$$

$$0 \leq n \leq 19.$$

Obviando las muestras nulas que aparecen en la última etapa del método *overlap-save* a consecuencia del *padding* de ceros en el último bloque de muestras de la entrada, se comprueba que la $y[n]$ calculada coincide con la convolución lineal entre $x[n]$ y $h[n]$.



Overlap-save: comparación de resultados.

5 Muestreo de señales

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores se han tratado diferentes aspectos de las señales discretas, sin importar su origen. En este capítulo se considera que las señales discretas están relacionadas con una señal de tiempo continuo; en otras palabras, las sucesiones discretas serán consideradas como la representación de una señal continua. Es notable que, bajo ciertas restricciones, una señal continua en el tiempo pueda ser representada solamente por algunos de sus valores, correspondientes a determinados instantes (discretos) de tiempo, y también que pueda ser recuperada a partir de ellos. Esta propiedad sorprendente es consecuencia de un resultado básico que se conoce como *teorema del muestreo*. Este teorema es extremadamente importante y muy útil, y sus resultados se explotan en infinidad de aplicaciones. Por ejemplo, una película de cine está formada por un conjunto de cuadros fijos, cada uno de los cuales representa una vista instantánea (una *muestra*) de una escena animada. Cuando estos cuadros fijos se miran como una sucesión temporal, a una velocidad suficiente, se percibe una representación fiel de la escena animada original. Otro ejemplo (fuera del campo de la ingeniería electrónica) es una foto impresa en un diario. Estas imágenes suelen estar formadas por pequeños puntos aislados, de tres o cuatro colores que corresmponden a muestras espaciales de la imagen a representar. Si la separación espacial de los puntos (las muestras) es suficientemente pequeña, desde una cierta distancia dan la impresión de una imagen continua; solo el exámen con una lupa revela la naturaleza discreta.

La importancia del teorema del muestreo radica en que establece un puente entre las señales de tiempo continuo y las de tiempo discreto. Como se discutirá en detalle, la posibilidad de representar completamente una señal continua por una sucesión de muestras instantáneas (bajo ciertas condiciones) establece una manera de representar señales continuas por señales discretas. En muchos contextos, el procesamiento de las señales discretas permite mayor flexibilidad y a menudo es preferible al tratamiento de señales continuas, en parte debido a la existencia de hardware digital poderoso, programable y bajo costo. Esta tecnología ofrece la posibilidad de explotar el concepto de muestreo para convertir una señal continua a una discreta, y luegor de procesarla ustilizando un sistema discreto, volver a convertirla para tener nuevamente una señal de tiempo continuo. En otras palabras, el procesamiento de señales continuas puede implementarse como la cas-

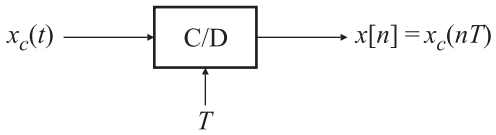


Fig. 5.1. Diagrama bloque de un conversor continuo a discreto (C/D) ideal.

cada de tres sistemas: un *muestreador*, un *sistema discreto*, y un *reconstructor* que permite obtener una señal continua a partir de las muestras. Esta forma de trabajo es habitual en los sistemas actuales de comunicaciones, entretenimiento, etc.

5.2. Muestreo periódico

Aunque existen otras posibilidades (Steiglitz, 195; Oppenheim y Johnson, 1972) la manera habitual de obtener una representación discreta en el tiempo de una señal continua en tiempo es tomado muestras cada determinado período de tiempo T. En otras palabras, la señal discreta $x[n]$ se obtiene al tomar muestras cada T segundos de una señal continua $x_c(t)$, de acuerdo a la relación

$$x[n] = x_c(t)\big|_{t=nT}, \quad -\infty < n < \infty. \tag{5.1}$$

En la ecuación (5.1) T es el *período de muestreo*, y su recíproca $f_s = 1/T$ es la *frecuencia de muestreo*, que se mide en muestras por segundo. A veces es conveniente expresar la frecuencia de muestreo en radianes por segundo, y en este caso se indicará como $\Omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T$.

El sistema que implementa la operación indicada en la ecuación (5.1) es un *conversor continuo a discreto ideal*, abreviado C/D, y representado por el diagrama bloque de la Fig. 5.1. Como ejemplo de la relación entre $x_c(t)$ y $x[n]$ se puede observar en la Fig. 2.2 la forma de onda de una señal de voz y la sucesión de muestras asociada.

En la práctica la operación de muestreo se lleva a cabo por un *conversor analógico digital*, notado A/D. Este sistema puede pensarse como una aproximación al conversor C/D ideal, pero tiene algunas diferencias que no es conveniente dejar de lado. Algunas consideraciones importantes en la implementación o selección de un conversor A/D son la

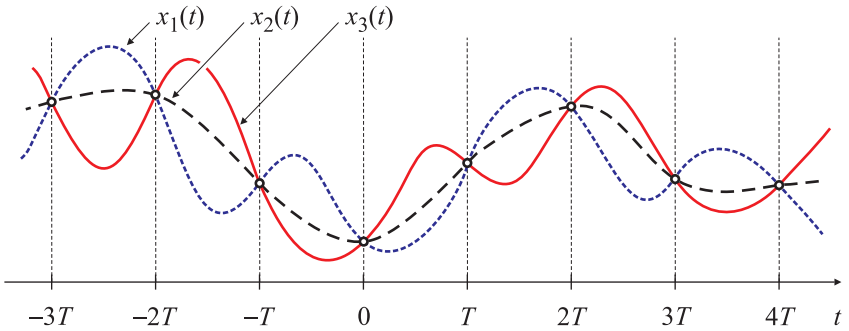


Fig. 5.2. Tres señales de tiempo continuo que toman idénticos valores en los enteros múltiplos de T.

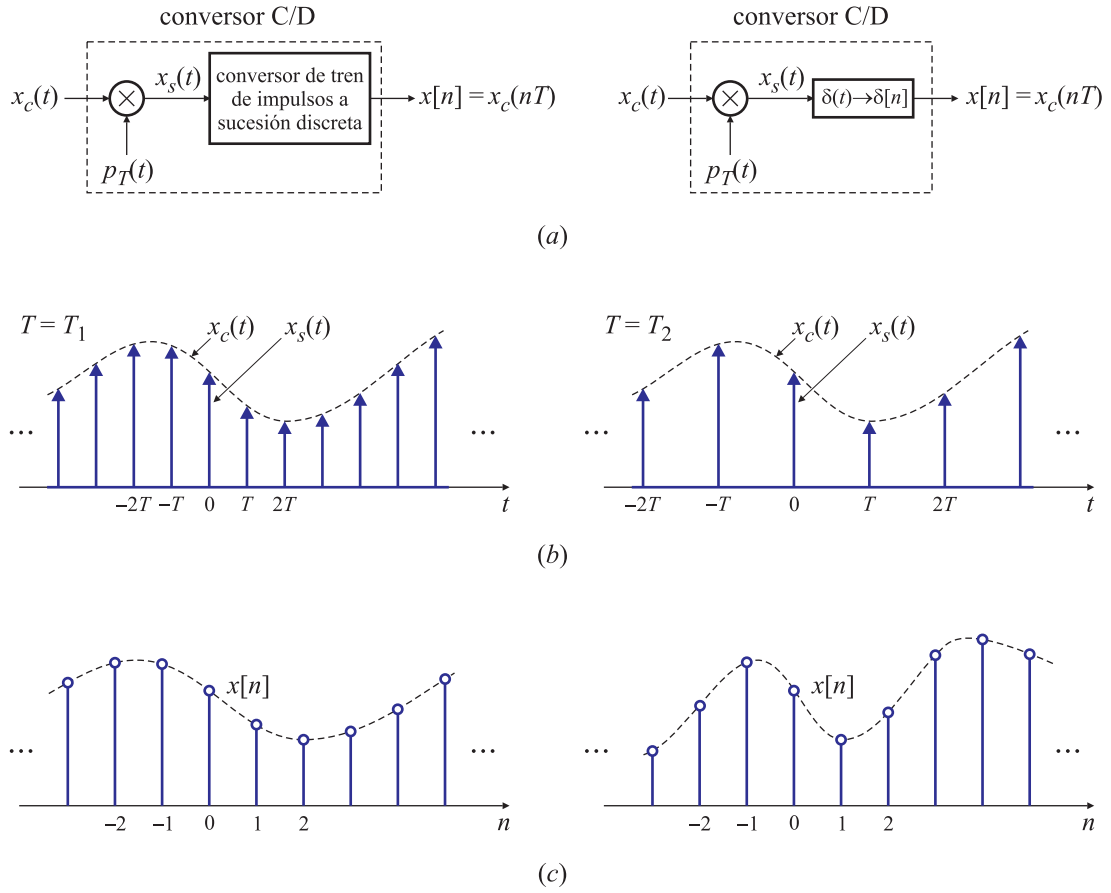


Fig. 5.3. Muestreo con un tren de impulsos periódico seguido por una conversión a una sucesión discreta. Modelo matemático (a); la señal $x_s(t)$ para dos períodos de muestreo $T = T_1$ y $T = T_2$ (b); sucesión de salida para dos períodos de muestreo distintos (c).

resolución en bits, la linealidad de los pasos de cuantización, la necesidad de circuitos mantenedores, y la frecuencia de muestreo máxima. Los efectos de cuantización se discuten en las secciones 5.11.2 y 5.11.3. Otros aspectos importantes de la conversión A/D están vinculados a la implementación electrónica de tales circuitos, y un detalle somero se presenta en la Sección ZZZ.

En general, la operación de muestreo no es invertible: dada la salida $x[n]$ del muestreador no es posible reconstruir la señal continua original $x_c(t)$, ya que muchas funciones continuas en tiempo pueden producir la misma sucesión de muestras. En la Fig. 5.2 se muestran tres señales continuas que tienen el mismo valor en múltiplos enteros de T, es decir

$$x_1(nT) = x_2(nT) = x_3(nT).$$

La ambigüedad inherente al proceso de muestreo es una característica fundamental en el procesamiento de señales. Afortunadamente es posible remover esta ambigüedad restringiendo la clase de señales aplicadas al muestreador.

Para estudiar el proceso de muestreo es conveniente adoptar la representación matemática que se muestra en la Fig. 5.3(a) que está compuesta por dos etapas:

- una multiplicación por un tren de impulsos periódicos;

- la conversión del tren de impulsos a una sucesión de números.

En la Fig. 5.3(b) se muestra una señal continua $x_c(t)$, y el resultado de multiplicarla por dos trenes de impulsos periódicos de distinto período. Las sucesiones de salida respectivas se muestran en la Fig. 5.3(c) . La diferencia principal entre $x_s(t)$ y $x[n]$ es que $x_s(t)$ es una funcion "continua" (específicamente, un tren de impulsos modulado por $x_c(t)$) que se anula para todo t que no sea múltiplo de T. Por otro lado, la sucesión $x[n]$ está indizada por la variable entera n: la sucesión $x[n]$ no contiene información explícita sobre el período de muestreo T. Además, las muestras de $x_c(t)$ están representados por los números finitos que componen la sucesión $x[n]$ y no por las áreas de los impulsos, como ocurre con $x_s(t)$.

El esquema de la Fig. 5.3(a) es solamente un modelo matemático que resulta conveniente para comprender el proceso de muestreo tanto en el dominio tiempo como en el dominio frecuencia, y no es una representación de un circuito o sistema físico que implemente la operación de muestreo. En general, los circuitos encargados de convertir una señal analógica en una discreta no siguen la estructura de este diagrama en bloques, y existen muchas maneras distintas de llevar a cabo tal conversión. La ventaja de la representación de la Fig. 5.3(a) es que permite derivar de manera sencilla un resultado fundamental, y facilita la obtención de muchos resultados que serían complicados de derivar utilizando un planteo más formal basado en la manipulación de ecuaciones que involucren la transformada de Fourier.

5.3. Representación frecuencial del muestreo

Para obtener la relación entre la entrada y la salida de un conversor continuo/discreto (C/D) ideal en el dominio frecuencial, es conveniente considerar primero la conversión de la señal continua $x_c(t)$ en un tren de impulsos continuos $x_s(t)$, como se muestra en la Fig. 5.3(a) . Esto se puede conseguir modulando el tren de impulsos

$$p_T(t) = \sum_n \delta(t - nT),$$

(donde $\delta(t)$ es el delta de Dirac estudiado en el Capítulo 2) con la señal continua $x_c(t)$:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)p_T(t) \\ &= x_c(t)\sum_n \delta(t - nT). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Aplicando la propiedad de "colador" del impulso, $x_s(t)$ se puede expresar como

$$x_s(t) = \sum_n x_c(nT)\delta(t - nT). \tag{5.3}$$

representada en la Fig. 5.3(b) . La transformada de Fourier de $x_s(t)$ puede calcularse fácilmente aplicando propiedades. La señal $x_s(t)$ es el producto de la señal continua $x_c(t)$ y del tren de impulsos $p_T(t)$; por lo tanto, la transformada de Fourier $X_s(f)$ de $x_s(t)$ es la convolución entre las transformadas de Fourier $X_c(f)$ de $x_c(t)$ y $P_T(f)$ de $p_T(t)$:

$$X_s(f) = X_c(f) * P_T(f),$$

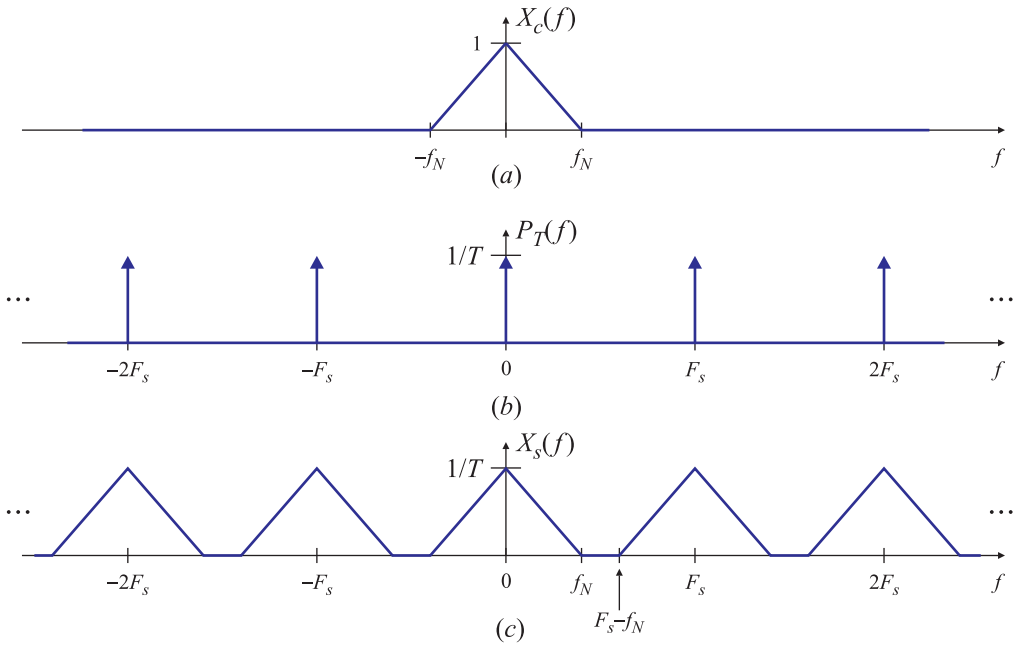


Fig. 5.4. Efectos en el dominio frecuencia del muestreo en el dominio tiempo. Espectro de la señal original (a); espectro del tren de impulsos (b); espectro de la señal muestreada con $F_s > 2f_N$ (sin *aliasing*) (c).

donde "$*$" indica la convolución lineal,

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\nu) P_T(f-\nu) d\nu.$$

Recordando los resultados del Capítulo 2, específicamente el par transformado

$$p_T(t) = \sum_n \delta(t-nT) \quad \Longleftrightarrow \quad P_T(f) = \frac{1}{T}\sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

se tiene que

$$X_s(f) = X_c(f) * \frac{1}{T}\sum_k \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \tag{5.4}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(f-\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(f-kF_s\right). \tag{5.5}$$

Es interesante notar la diferencia entre el pasaje de la ecuación (5.2) a la (5.3), y de la ecuación (5.4) a la (5.5). En la ecuación (5.2) se utiliza la propiedad de *multiplicación* de una función continua por un impulso

$$x_c(t)\delta(t-nT) = x_c(nT)\delta(t-nT)$$

que expresa que mutiplicar una función continua por un impulso es lo mismo que escalar el impulso por el valor de la función continua en el lugar donde está aplicado el impulso. En cambion, en la ecuación (5.4) se aplica la propiedad de *convolución* de una función continua por un impulso

$$X_c(f) * \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = X_c\left(f-\frac{k}{T}\right),$$

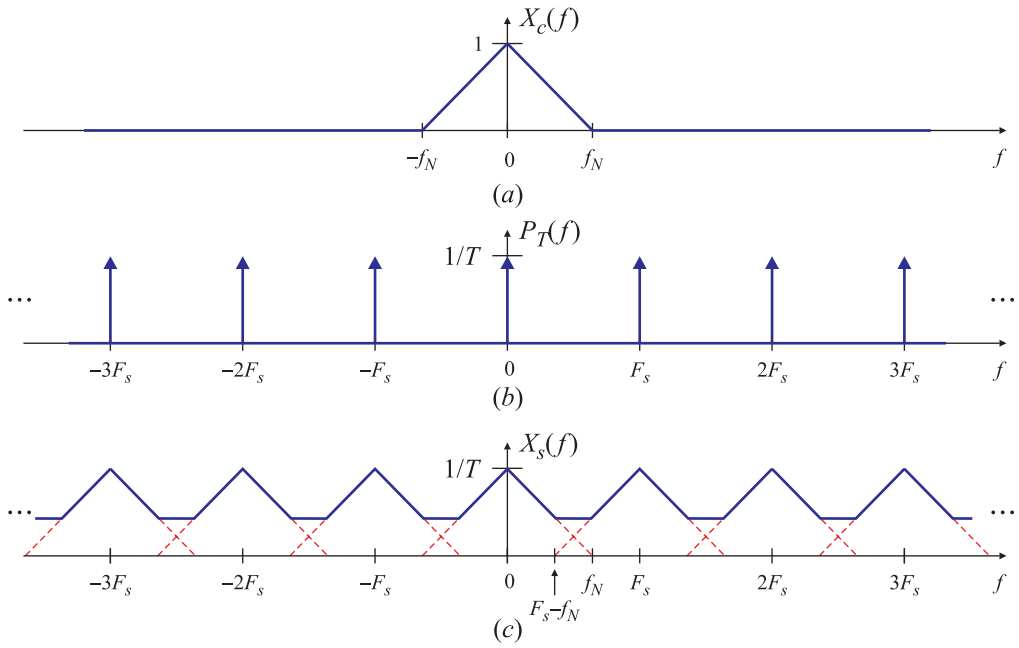


Fig. 5.5. Efectos en el dominio frecuencia del muestreo en el dominio tiempo. Espectro de la señal original (a); espectro del tren de impulsos (b); espectro de la señal muestreada con $F_s < 2f_N$ (con *aliasing*) (c).

cuyo resultado es el de desplazar la función continua al lugar donde está aplicado el impulso.

La ecuación (5.5) establece la relación entre los espectros de la señal continua $X_c(f)$ y la salida $X_s(f)$ del modulador del tren de impulsos de la Fig. 5.3(a) . Esta ecuación muestra que la transformada de Fourier de $x_s(t)$ está formada por réplicas repetidas cada $F_s = 1/T$ de la transformada de Fourier de la señal continua $x_c(t)$, escaladas por un factor $1/T$. Las copias de $X_c(f)$ están desplazadas en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo $F_s = 1/T$, y se superponen para producir la transformada de Fourier periódica correspondiente a un tren de impulsos.

La representación frecuencial del muestreo por un tren de impulsos se ilustra en la Fig. 5.4. La transformada de Fourier $X_c(f)$ de una señal $x_c(t)$ limitada en banda cuya máxima componente frecuencial no nula es f_N se muestra en la Fig. 5.4(a), y la transformada de Fourier $P_T(f)$ del tren de impulsos periódicos $p_T(t)$ se representa en la Fig. 5.4(b) . La convolución de estas dos transformadas, expresada en las ecuaciones (5.4)-(5.5) es el espectro de $X_s(f)$, graficado en la Fig. 5.4(c) , que está formado por las réplicas cada $F_s = 1/T$ de $X_c(f)$.

Esta última figura permite apreciar que si la frecuencia de muestreo F_s y la máxima componente frecuencial f_N de la señal satisfacen la relación

$$f_N < F_s - f_N, \quad \text{o} \quad F_s > 2f_N \tag{5.6}$$

las réplicas de $X_c(f)$ desplazadas en múltiplos de F_s no se superponen cuando se suman según expresa la ecuación (5.5). Es decir, en cada múltiplo entero de F_s se tiene una copia fiel del espectro original.

Si la desigualdad (5.6) no se satisface, es decir, si $F_s \leq 2f_N$ las réplicas desplazadas de

$X_c(f)$ se superponen como se representa en la Fig. 5.5. En la Fig. 5.5(a) se muestra nuevamente la transformada de Fourier de una señal de banda limitada con máxima componente frecuencial f_N, que en este caso es mayor que $F_s/2$. En la Fig. 5.5(b) se representa la transformada de Fourier del tren de impulsos periódicos, que son impulsos separados F_s entre sí; comparando estas dos figuras se observa que $f_N > F_s/2$. La convolución de estas dos señales resulta en la señal $x_s(t)$ cuyo espectro $X_s(f)$ se grafica en la Fig. 5.5(c) . En líneas de trazo se grafican las réplicas cada F_s del espectro $X_c(f)$. La suma de estar réplicas da como resultado el espectro representado por un trazo continuo grueso. En este caso, en cada múltiplo de F_s no queda centrada una copia fiel del espectro original $X_c(f)$, sino que aparece un espectro distorsionado.

Esta discusión es la base del Teorema del Muestreo de Nyquist, desarrollado por Kotelnikov en Rusia en 1933 (pero desconocido en occidente), por Nyquist en 1928, y reformualdo por Shannon en 1949 en un marco ligeramente diferente, que se puede enunciar de la siguiente manera:

> **Teorema del muestreo:** Sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada, cuya transformada de Fourier satisface
>
> $$X_c(f) = 0 \text{ para } |f| > f_N. \tag{5.7}$$
>
> Entonces $x_c(t)$ puede determinarse de manera única a partir de sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n \in N$, si
>
> $$F_s = 1/T > 2f_N. \tag{5.8}$$

La frecuencia f_N se conoce como *frecuencia de Nyquist*, y la frecuencia $2f_N$ que debe ser menor que la frecuencia de muestreo F_s se denomina *tasa de Nyquist*.

Si la señal muestreada satisface las hipótesis del teorema del muestreo, como ocurre con el espectro de la Fig. 5.3, es posible recuperar el espectro original filtrando la señal $x_s(t)$ con un filtro pasabajos de ancho de banda adecuado. En el caso representado en la Fig. 5.5 no es posible recuperar el espectro $X_c(f)$ de la señal original filtrando el espectro $X_s(f)$ de $x_s(t)$ con cualquier tipo de filtro. Se dice en este caso que el espectro está alterado por las réplicas o que sufre distorsión por *aliasing* (réplica en inglés).

en el primer caso, la señal continua $x_c(t)$ puede recuperarse a partir de $x_s(t)$ utilizando un filtro pasabajos ideal, conocido como *filtro reconstructor*, como se muestra en la Fig. 5.6(a) .

El tren de impulsos $x_s(t)$ modulado por $x_c(t)$ se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta en frecuencia $H_r(f)$. Si $X_c(f)$ tiene la transformada de Fourier que se muestra en la Fig, 5.6(b) , y si se supone que $F_s > 2f_N$, el espectro de $X_s(f)$ es el que se representa en la Fig. 5.6(c) . El espectro de la señal $x_t(t)$ a la salida del filtro tiene un espectro $X_r(f)$ dado por

$$X_r(f) = H_r(f)X_s(f).$$

Si $H_r(f)$ es un filtro pasabajos ideal con ganancia $T = 1/F_s$ y frecuencia de corte f_c

$$H_r(f) = \begin{cases} T, & |f| < f_c, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

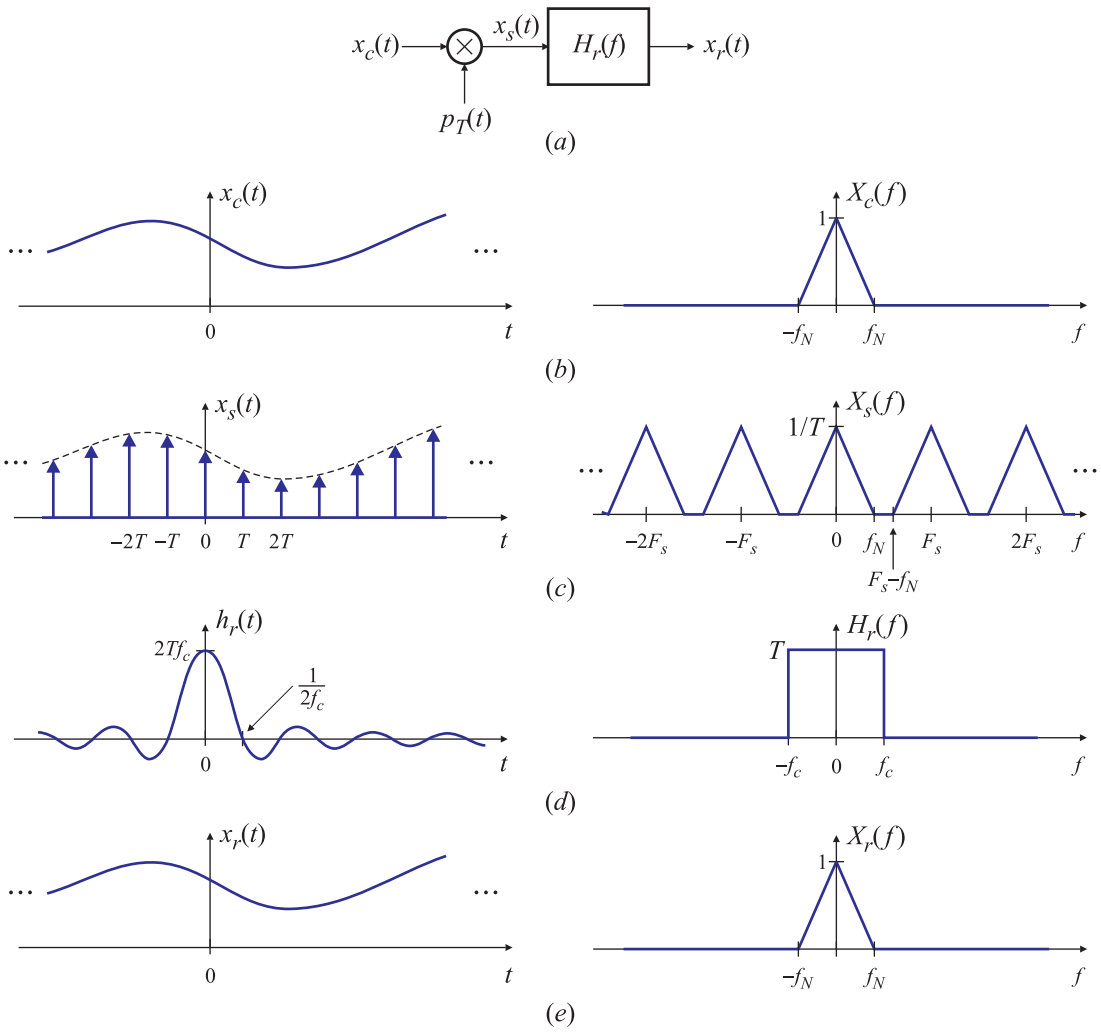


Fig. 5.6. Recuperación exacta de una señal continua a partir de sus muestras usando un filtro pasabajos ideal $H_r(f)$.

como se muestra en la Fig. 5.6(c) , tal que

$$f_N < f_c < F_s - f_N$$

entonces

$$X_r(f) = X_c(f),$$

como se muestra en la Fig. 5.6(e) .

La Fig. 5.7 muestra el fenómeno de aliasing en el dominio frecuencial para el caso de una señal senoidal de frecuencia f_0. La frecuencia de muestreo es F_s, y en las Figs. 5.7(a)-(d) se estudia el caso en que $f_0 < F_s/2$; es decir, se cumple la desigualdad (5.6) del teorema del muestreo. En las Figs. 5.7(e)-(h) se analiza qué ocurre si $F_s > f_0 > F_s/2$, cuando no se cumple esta condición.

En la Fig. 5.7(a) se muestra el espectro $X_c(f)$ de la señal

$$x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t),$$

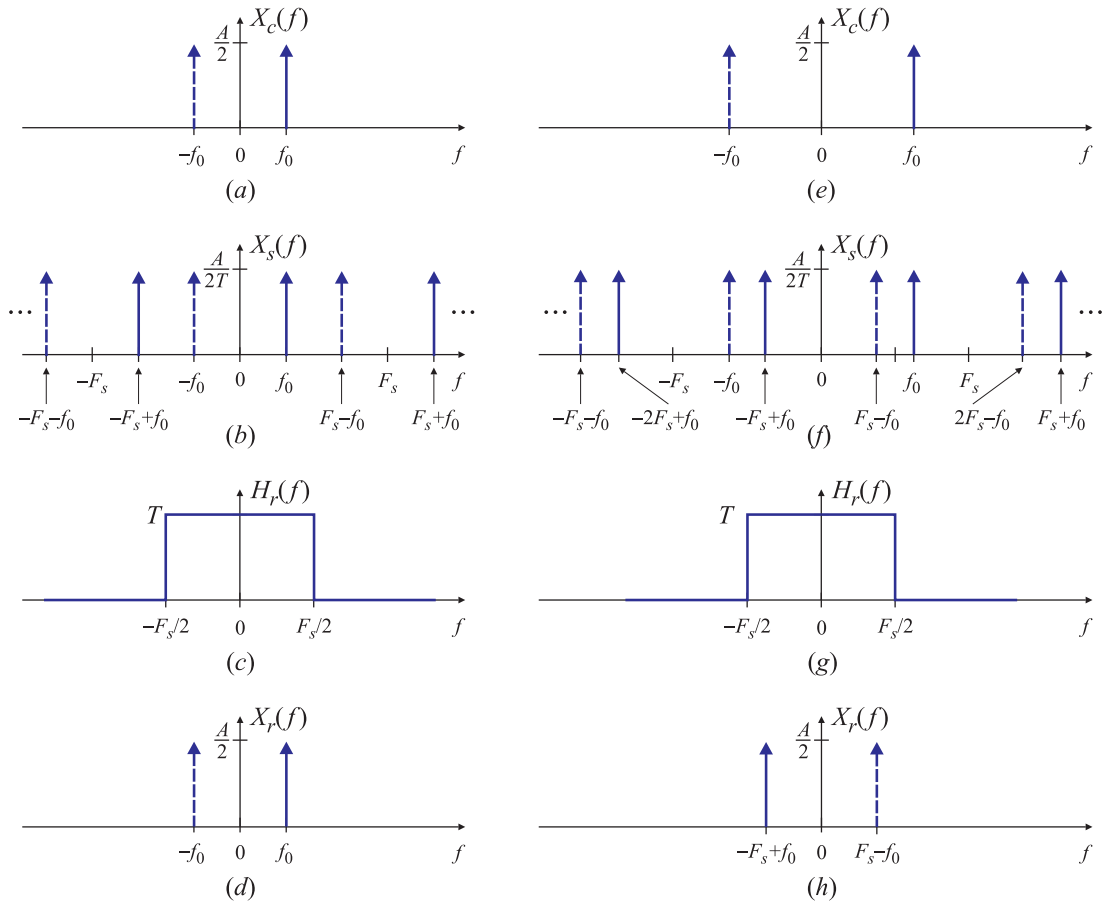


Fig. 5.7. Muestreo de una señal cosenoidal que satisface las condiciones del Teorema de Nyquist (a)-(d), y de otra que no las cumple (e)-(h).

que es

$$X_c(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f - f_0).$$

cuando $f_0 < F_s/2$, y en la Fig. 5.7(e) cuando $f_0 > F_s/2$. Para facilitar la lectura del gráfico, se han diferenciado las componentes de frecuencia positiva y negativa (línea continua y línea de puntos, respectivamente). La transformada de Fourier de $x_s(t)$ se representa en la Fig. 5.7(b) para el caso $f_0 < F_s/2$, y Fig. 5.7(f) para $f_0 > F_s/2$. Mientras que en el primer caso las réplicas de frecuencia $\pm f_0 + kF_s$, con $k \in \mathbb{Z}$, aparecen a frecuencias mayores que f_0 (y menores que $-f_0$), en el segundo ($f_0 > F_s/2$) algunas réplicas tienen frecuencia *menor* que f_0, por ejemplo, la componente de frecuencia $F_s - f_0$ a la derecha del origen en la Fig. 5.7(f). En las Fig. 5.7(c) y (g) se muestra la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor con frecuencia de corte $f_c = F_s/2$. Finalmente, la señal $x_r(t)$ recuperada a la salida del filtro reconstructor tiene el espectro que se muestra en la Fig. 5.7(c) cuando $f_0 < F_s/2$, y en la Fig. 5.7(e) para $f_0 > F_s/2$.

El caso representado en la columna derecha de la Fig. 5.7 está afectados por aliasing. Si no hay aliasing, la señal obtenida a la salida del filtro reconstructor es

$$x_r(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \equiv x_c(t),$$

como se muestra en la Fig. 5.7(d) , mientras que si se produce aliasing la salida reconstruida, que se representa en la Fig. 5.7(h) es

$$x_r(t) = A\cos[2\pi(F_s - f_0)t] \neq x_c(t).$$

Esta expresión muestra que la señal $x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ ha "tomado la identidad" (alias) de la señal de frecuencia menor $A\cos[2\pi(F_s - f_0)t]$ como consecuencia del proceso de muestreo y reconstrucción.

5.3.1. Relación con la transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD)

En el análisis desarrollado hasta el momento, del diagrama de la Fig. 5.6(a) sólo se consideró el efecto de modular el tren de impulsos por la señal continua $x_c(t)$. El objetivo final es relacionar la transformada de Fourier de tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ de la señal discreta $x[n]$ con las transformadas $X_s(f)$ de $x_s(t)$ y $X_c(f)$ de $x_c(t)$. Para ello es conveniente considerar una expresión alternativa de $X_s(f)$, que resulta de aplicar las propiedades de la transformada de Fourier a la expresión (5.3). Teniendo en cuenta el par transformado

$$\delta(t-\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-2\pi\tau f},$$

la espresión (5.3), repetida aquí por comodidad

$$x_s(t) = \sum_n x_c(nT)\delta(t - nT)$$

tiene transformada de Fourier

$$X_s(f) = \sum_n x_c(nT)e^{-2\pi T f n}.$$

Como $x[n] = x_c(nT)$, y $X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n}$, resulta que

$$X_s(f) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi Tf=2\pi\frac{f}{F_s}}. \tag{5.9}$$

Combinando las ecuaciones (5.5) y (5.9),

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi Tf=2\pi\frac{f}{F_s}} = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(f - kF_s\right) \tag{5.10}$$

o bien

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(f - kF_s\right)\Big|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}} = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\omega\frac{F_s}{2\pi} - kF_s\right) \tag{5.11}$$

De las ecuaciones (5.9) a (5.11) se observa que $X(e^{j\omega})$ es una versión escalada en frecuencia de $X_s(f)$, según $\omega = (2\pi/F_s)f$. Este escalado puede pensarse también como una normalización del eje de frecuencias de manera que la frecuencia $f = F_s$ en $X_s(f)$ se normaliza a $\omega = 2\pi$ en $X(e^{j\omega})$. Este escalado frecuencial o normalización en la transformación de $X_s(f)$ a $X(e^{jw})$ está asociado a una normalización por T en el dominio temporal de $x_s(t)$ a $x[n]$, tal como se pone de manifiesto en la Fig. 5.3. En esta figura $x_s(t)$ tiene un espaciado entre muestras igual a un período de muestreo T, mientras que el "espaciado" entre muestras de $x[n]$ es siempre la unidad. Si el eje de tiempos está normalizado por un factor T, el eje de frecuencias se normaliza por un factor $2\pi T = 2\pi F_s$.

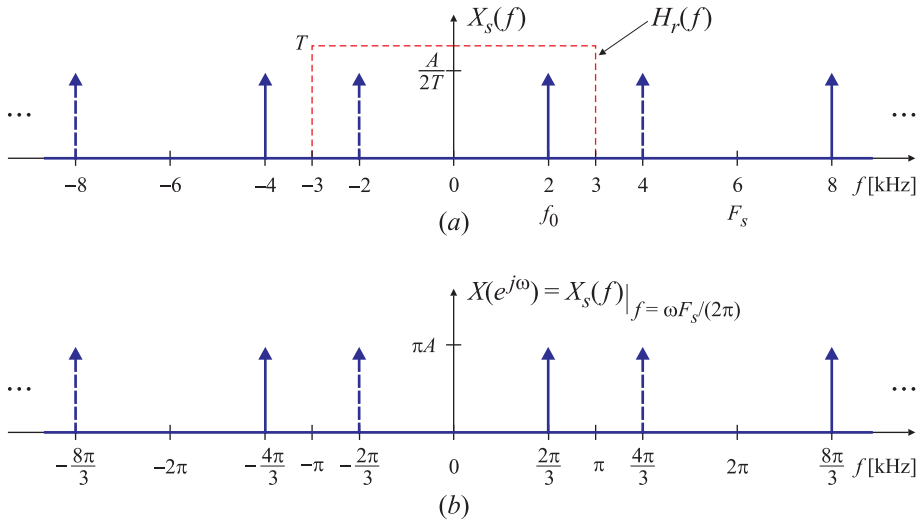


Fig. 5.8. Transformada de Fourier de la señal continua $x_s(t)$ (a) y de la señal discreta $x[n]$ (b) que resultan de muestrear una señal continua $x_c(t) = A\cos(2\pi 2000t)$ a una frecuencia de muestreo $F_s = 6$ kHz (Ejemplo 5.1).

EJEMPLO **5.1. Muestreo y reconstrucción de una señal cosenoidal**
Si la señal continua $x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ de frecuencia $f_0 = 2$ kHz se muestrea a una frecuencia $F_s = 1/T = 6$ kHz, se obtiene la señal discreta $x[n] = x_c(t)|_{t=nT=n/Fs}$ dada por

$$x[n] = A\cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{F_s}\right) = A\cos\left(2\pi 2000\frac{n}{6000}\right) = A\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) = A\cos(\omega_0 n), \qquad (5.12)$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0/F_s = 2\pi/3$. En este caso $F_s = 6$ kHz y la máxima componente frecuencial de $x_c(t)$ es $f_0 = 2$ kHz, de modo que $f_0 < F_s/2$: se satisfacen las condiciones del teorema del muestreo, y no habrá distorsión por solapamiento (*aliasing*). La transformada de Fourier de $x_c(t)$ es

$$X_c(f) = \frac{A}{2}\delta(f+f_0) + \frac{A}{2}\delta(f-f_0),$$

y de acuerdo con (5.5)

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \frac{1}{T}\sum_k X_c(f+kF_s) \qquad (5.13)\\ &= \sum_k \frac{A}{2T}\delta(f+kF_s+f_0) + \frac{A}{2T}\delta(f+kF_s-f_0). \end{aligned}$$

En este caso, $X_c(f)$ es un par de impulsos ubicados en $f = \pm f_0 = \pm 2$ kHz, y $X_s(f)$ queda formada por réplicas de esta transformada de Fourier centradas en $\pm F_s$, $\pm 2F_s$, etc., como se muestra en la Fig. 5.8(a). El espectro $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ está dado por la ecuación (5.9):

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_s(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}\\ &= \sum_k \frac{A}{2T}\delta(f+kF_s+f_0) + \frac{A}{2T}\delta(f+kF_s-f_0)\Big|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}\\ &= \sum_k \frac{A}{2T}\delta\left(\omega\frac{F_s}{2\pi}+kF_s+f_0\right) + \frac{A}{2T}\delta\left(\omega\frac{F_s}{2\pi}+kF_s-f_0\right) \end{aligned}$$

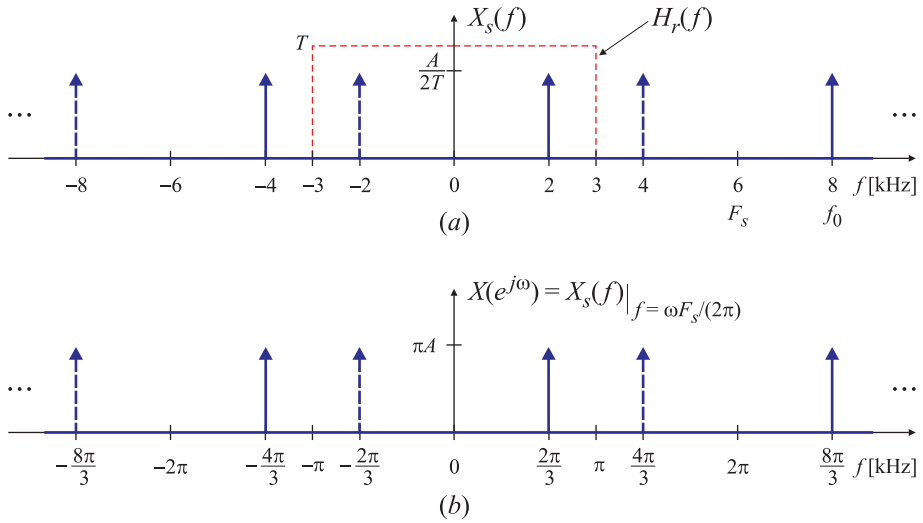


Fig. 5.9. Transformada de Fourier de la señal continua $x_s(t)$ (a) y de la señal discreta $x[n]$ (b) que resultan de muestrear una señal continua $x_c(t) = A\cos(2\pi 8000t)$ a una frecuencia de muestreo $F_s = 6$ kHz (Ejemplo 5.2).

$$
\begin{aligned}
&= \sum_k \frac{A}{2T}\delta\left[\frac{F_s}{2\pi}\left(\omega + kF_s\frac{2\pi}{F_s} + f_0\frac{2\pi}{F_s}\right)\right] + \frac{A}{2T}\delta\left[\frac{F_s}{2\pi}\left(\omega + kF_s\frac{2\pi}{F_s} - f_0\frac{2\pi}{F_s}\right)\right] \\
&= \sum_k \frac{A}{2T}\delta\left[\frac{F_s}{2\pi}\left(\omega + 2\pi k + \omega_0\right)\right] + \frac{A}{2T}\delta\left[\frac{F_s}{2\pi}\left(\omega + 2\pi k - \omega_0\right)\right],
\end{aligned}
$$

donde se utilizó el reemplazo $2\pi f_0/F_s = \omega_0$. Aplicando ahora la propiedad de escalado del impulso, $\delta(a\omega) = (1/|a|)\delta(\omega)$ se tiene que

$$
X(e^{j\omega}) = \sum_k \frac{A}{2T}\frac{2\pi}{F_s}\delta\left(\omega + 2\pi k + \omega_0\right) + \frac{A}{2T}\frac{2\pi}{F_s}\delta\left(\omega + 2\pi k - \omega_0\right),
$$

y teniendo en cuenta que $F_s = 1/T$,

$$
X(e^{j\omega}) = \sum_k \pi A\delta\left(\omega + 2\pi k + \omega_0\right) + \pi A\delta\left(\omega + 2\pi k - \omega_0\right).
$$

En otras palabras, el espectro $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ está formado por un par de impulsos de área πA ubicados en la frecuencia $\omega = \pm\omega_0$, replicados cada 2π, que efectivamente corresponde al espectro de una señal discreta de tipo coseno, de amplitud A, como se estudió en el Capítulo 3. El espectro de esta señal se grafica en la Fig. 5.8(b) . Se observa que la frecuencia original $f_0 = 2$ kHz corresponde a la frecuencia normalizada $\omega_0 = (f_0/F_s)2\pi = 2\pi/3$, que satisface la desigualdad $\omega_0 < \pi$, que corresponde a que $f_0 < F_s/2$. En la Fig. 5.8(a) se muestra también la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor ideal $H_r(f)$ para la frecuencia de muestreo de $F_s = 6$ kHz. Es evidente de la figura que la señal $x_r(t)$ obtenida a la salida del filtro reconstructor será idéntica a la señal continua $x_c(t)$, es decir, la señal de salida será un coseno de la misma frecuencia que la señal de entrada, $f_0 = 2$ kHz. □

EJEMPLO **5.2. Distorsión en la reconstrucción de una señal "mal muestreada"**
La señal continua

$$
x_c(t) = A\cos(2\pi 8000t) \tag{5.14}
$$

se muestrea a la misma frecuencia de muestreo que en el ejemplo anterior ($F_s = 6$ kHz). Como la frecuencia de la señal es $f_0 = 8$ kHz no se satisfacen las hipótesis del teorema del muestreo, porque $F_s/2 = 3$ kHz es menor que f_0 (la frecuencia de muestreo correcta debería ser mayor que $2f_0 = 16$ kHz), así que existe distorsión por solapamiento (*aliasing*). Sin embargo, ocurre un fenómeno interesante. La transformada de Fourier $X_s(f)$ de la señal $x_s(t)$ modulada por el tren de impulsos que se muestra en la Fig. 5.9(a) es idéntica a la de la Fig. 5.8(a), pero el impulso ubicado en $f = -2$ kHz se debe al término $X_c(f - F_s)$ en la ecuación (5.13), con $k = 1$, y no a $X_s(f)$, con $k = 0$. Algo similar ocurre con el impulso ubicado en $f = 2$ kHz, que aparece por el término $X_c(f + F_s)$ en (5.13), con $k = -1$. El gráfico del espectro $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ representado en la Fig. 5.9(b) es idéntico al de la Fig. 5.8(b). Esto no es sorprendente porque las señales discretas $x[n]$ que resultan de muestrear las señales $x_c(t)$ del Ejemplo 5.1 y la de este ejemplo son las mismas:

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{F_s}\right) = A\cos\left(2\pi 8000 \frac{n}{6000}\right) = A\cos\left(\frac{8}{3}\pi n\right) = A\cos\left[\left(\frac{2}{3}+2\right)\pi n\right] \\ &= A\cos\left[\frac{2}{3}\pi n + 2\pi n\right] = A\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right), \end{aligned}$$

que coincide con la $x[n]$ dada por (5.12) (se puede agregar cualquier múltiplo de 2π al argumento del coseno sin cambiar su valor). En otras palabras, se obtiene la misma sucesión discreta $x[n] = A\cos(2\pi n/3)$ al muestrar dos señales continuas diferentes con la misma frecuencia de muestreo. En un caso (Ejemplo 5.1) la frecuencia de muestreo satisface el criterio de Nyquist, y en el otro no (este ejemplo).

En la Fig. 5.9(a) se representa también la respuesta en frecuencia $H_r(f)$ del filtro reconstructor ideal para la frecuencia de muestreo $F_s = 6$ kHz. Se desprende de esta figura que la señal $x_r(t)$ a la salida del filtro reconstructor ideal es

$$x_r(t) = A\cos(2\pi 2000t)$$

es decir, es una señal de frecuencia $f_0 = 2$ kHz, que no es la frecuencia de 8 kHz de la señal original $x_c(t)$ dada por (5.14). □

Los Ejemplos 5.1 y 5.2 revelan que dos señales distintas pueden resultar en la misma señal discreta $x[n]$ usando al misma frecuencia de muestreo. Este fenómeno se puede comprender mejor con la ayuda de la Fig. 5.10. La señal de frecuencia $f_0 = 2$ kHz se muestra en la Fig. 5.10(a) con trazo continuo. Las muestras, tomadas cada $T = 1/F_s = 1/6$ ms, están superpuestas en el mismo gráfico. En este caso, se toman tres muestras por cada período de la señal, lo que muestra que la frecuencia de muestreo es mayor que el doble de la frecuencia del coseno (en el caso límite, en que $T = 1/F_s = 2f_0$ habría exactamente dos muestras por período). En la Fig. 5.10(b) se muestra la señal del Ejemplo 5.2, de frecuencia $f_0 = 8$ kHz, muestreada a la misma frecuencia $F_s = 6$ kHz. Aquí es evidente que se toma menos de una muestra por ciclo de las señal continua $x_c(t)$, y por lo tanto no se cumple el teorema del muestreo. Sin embargo, el patrón de las muestras se repite cada cuatro ciclos de la señal. Las Figs. 5.10(a) y 5.10(b) ponen de manifiesto que las señales continuas son de diferente frecuencia, pero que muestras de la señal $x_c(t)$ tomadas cada T segundos del Ejemplo 5.1 coinciden con las muestras de la señal $x_c(t)$ del Ejemplo 5.2, también tomadas cada T segundos, como se muestra en la Fig. 5.10(c).

EJEMPLO **5.3. Otro ejemplo de distorsión por solapamiento (aliasing)**
Sea $x_c(t)$ la señal del Ejemplo 5.1, es decir un tono cosenoidal de frecuencia $f_0 = 2$ kHz,

$$x_c = A\cos(2\pi f_0 t) = A\cos(2\pi 2000t).$$

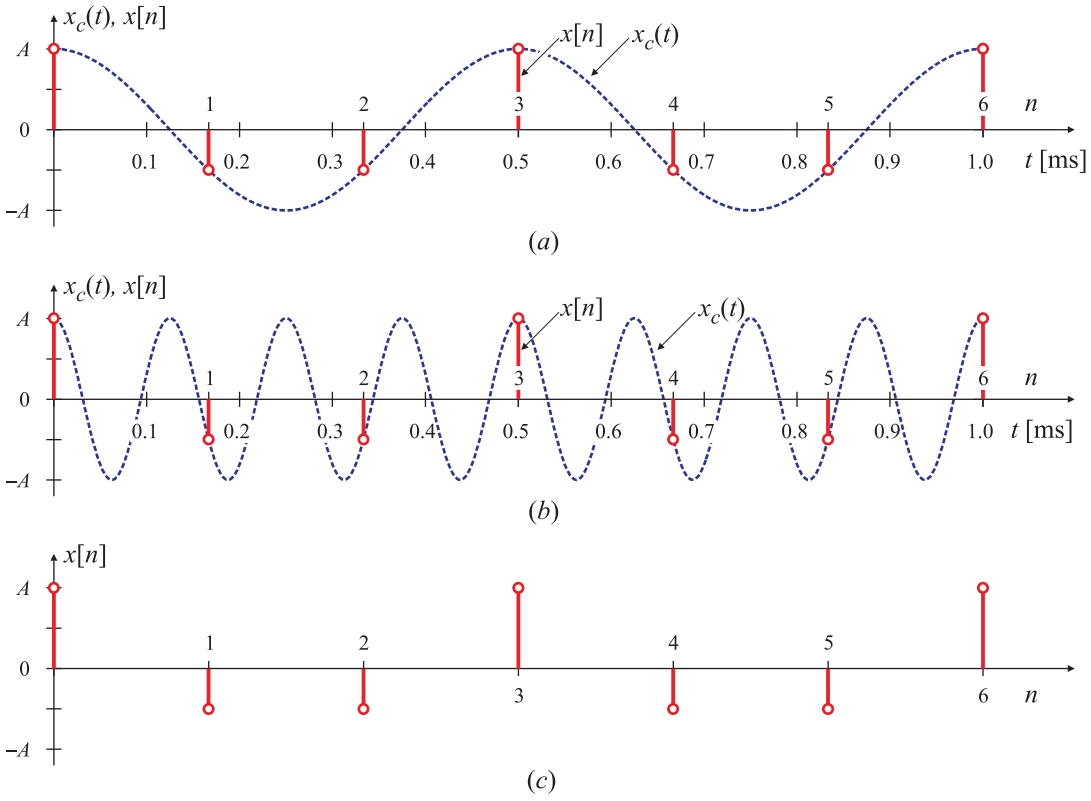


Fig. 5.10. Interpretación del *aliasing* en el dominio tiempo. Señal del Ejemplo 5.1, de frecuencia $f_0 = 2$ kHz muestreada a $F_s = 6$ kHz y sus muestras (a); señal del Ejemplo 5.2, de frecuencia $f_0 = 8$ kHz muestreada a la misma frecuencia $F_s = 6$ kHz y sus muestras (b); detalle de la señal discreta que resulta de muestrar las señales continuas de ambos ejemplos (c).

Sin embargo, en este ejemplo la frecuencia de muestreo es $F_s = 1{,}5$ kHz, que no cumple con el criterio de Nyquist, porque la mayor frecuencia de la señal, que es $f_0 = 2$ kHz no es menor que la mitad de la frecuencia de muestreo $F_s/2 = 750$ Hz. Por este motivo, nuevamente ocurrirá distorsión por *aliasing*. La Fig. 5.11(a) muestra el espectro de $x_s(t)$ para este caso. El impulso en $f = -500$ Hz aparece por el término $X_c(f - kF_s)$ con $k = 1$ en (5.13), y el impulso en $f = 500$ Hz ocurre por la presencia del término $X_c(f - kF_s)$ con $k = -1$. El gráfico del espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal discreta $x[n]$ se muestra en la Fig. 5.11(b), que resulta idéntico al de la 5.8(b). Nuevamente, esto es natural porque el tono $x_c(t)$ de frecuencia $f_0 = 2$ kHz cuando se lo muestrea a una frecuencia $F_s = 1{,}5$ kHz resulta en la misma señal discreta $x[n]$ de los Ejemplos 5.1 y 5.2:

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{F_s}\right) = A\cos\left(2\pi 2000 \frac{n}{1500}\right) = A\cos\left(\frac{8}{3}\pi n\right) = A\cos\left[\left(\frac{2}{3}+2\right)\pi n\right] \\ &= A\cos\left[\frac{2}{3}\pi n + 2\pi n\right] = A\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right), \end{aligned}$$

En la Fig. 5.11(a) se muestra la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor $H_r(f)$ correspondiente a una frecuencia de muestreo $F_s = 1{,}5$ kHz. Es claro que la señal que se obtendría a la salida del filtro reconstructor sería un tono de la forma

$$x_r(t) = A\cos(2\pi 500 t),$$

es decir, un tono de frecuencia 500 Hz que es distinto del tono de frecuencia $f_0 = 2$ kHz de la señal continua original $x_c(t)$. □

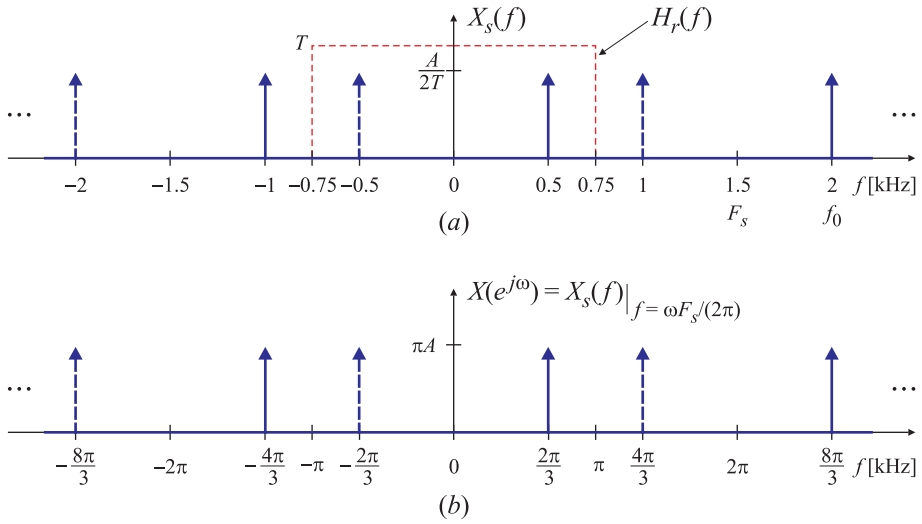


Fig. 5.11. Transformada de Fourier de la señal continua $x_s(t)$ (a) y de la señal discreta $x[n]$ (b) que resultan de muestrear una señal continua $x_c(t) = A\cos(2\pi 2000t)$ a una frecuencia de muestreo $F_s = 1{,}5$ kHz (Ejemplo 5.3).

Los Ejemplos 5.1 y 5.3 muestran que se puede obtener la misma señal discreta $x[n]$ de muestrear la misma señal continua $x_c(t)$ con dos tasas de muestreo distintas, si una de ellas no satisface el teorema del muestreo. La interpretación temporal se muestra en la Fig. 5.12. La señal de frecuencia $f_0 = 2$ kHz del Ejemplo 5.1 se repite nuevamente en la Fig. 5.12(a), con una escala de tiempo diferente. Las muestras de la señal ocurren cada $T = 1/F_s = 1/6$ ms, y la figura revela que se toman tres muestras por ciclo de la señal continua, verificando los requisitos del teorema del muestreo. En la Fig. 5.12(b) se representa la señal del ejemplo 5.3, de la misma frecuencia $f_0 = 2$ kHz que en el caso anterior, pero muestreada a intervalos mayores, de $T = 1/F_s = 2/3$ ms (cuatro veces más lento). La figura pone de manifiesto que se viola el teorema del muestreo porque aparecen menos de una muestra por ciclo de la señal continua. Sin embargo, si se grafican las sucesiones discretas en función del número de muestras, como en la Fig. 5.12(c), se obtiene la misma secuencia temporal en ambos casos. Es decir que aún cuando no se cumplen los requisitos del teorema del muestreo, las muestras de la señal del Ejemplo 5.3 son las mismas que se obtienen al muestrear la señal "correctamente". En otras palabras, aún muestreando "mal" se obtienen las muestras "correctas". Este efecto es aprovechado ventajosamente en algunas aplicaciones, como en los osciloscopios diseñados para visualizar señales periódicas de frecuencias del orden del GHz, o en una clase especial de muestreo, denominado muestreo *pasabanda*. La clave en estos casos es saber que la señal es de banda limitada, y conocer el rango de frecuencias donde está definida.

Los Ejemplos 5.1, 5.2 y 5.3 muestran porqué en las mayoría de las aplicaciones es tan importante cumplir con el Teorema de Nyquist, ya que de esta forma se tiene la certeza que la señal discreta $x[n]$ está asociada a una única señal continua $x_c(t)$ y viceversa.

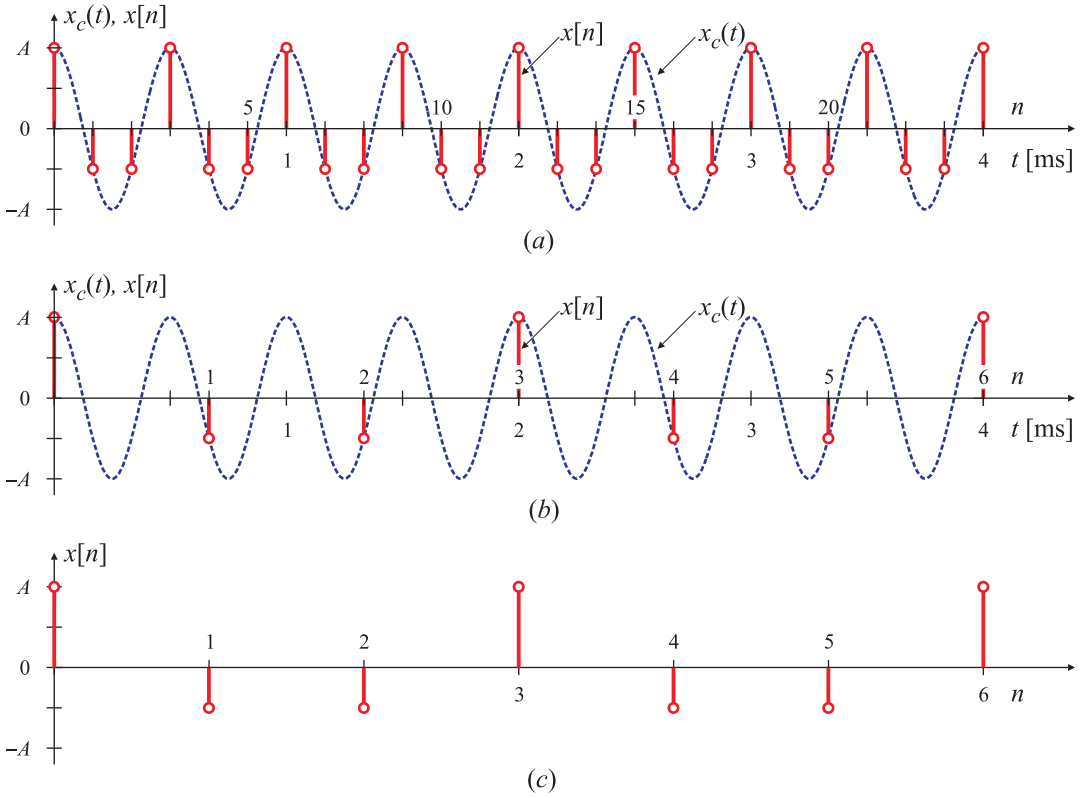


Fig. 5.12. Interpretación del *aliasing* en el dominio tiempo. Señal del Ejemplo 5.1, de frecuencia $f_0 = 2$ kHz muestreada a $F_s = 6$ kHz y sus muestras (a); señal del Ejemplo 5.3, de la misma frecuencia $f_0 = 2$ kHz que la señal del Ejemplo 5.1 pero muestreada a $F_s = 1{,}5$ kHz y sus muestras (b); detalle de la señal discreta que resulta de muestrar las señales continuas de ambos ejemplos (c).

5.4. Otra interpretación del muestreo en el dominio frecuencia

Otra manera de visualizar los efectos del muestreo en el dominio frecuencial es imaginar que el espectro $X_c(f)$ de la señal continua $x_c(t)$ se grafica sobre un papel transparente, como se representa en la Fig. 5.13(a). En este caso, la señal continua no cumple con el teorema del muestreo, y por lo tanto se producirá distorsión por solapamiento o *aliasing*. Para simplificar la presentación, se supone que el espectro tiene simetría par, es decir que la señal $x_c(t)$ es real.

El efecto de muestrear la señal continua $x_c(t)$ es equivalente a doblar el papel transparente en tramos de longitud F_s en $\pm F_s/2$, $\pm 3F_s/2$, $\pm 5F_s/2$, etc., como sugiere la Fig. 5.13(b). Al solapar los distintos pliegues de la hoja los rangos de frecuencia que estaban fuera del intervalo $-F_s/2 < f < F_s/2$ se mapean dentro de esta zona. El espectro que se obtiene al agrupar todos los pliegues se representa en la Fig. 5.13(c): éste es el espectro $X_s(f)$ de la señal $x_s(t)$, es decir, del tren de impulsos $p_T(t)$ modulado por la señal continua $x_c(t)$. Las porciones del espectro comprendidas entre $F_s/2$ y $3F_s/2$, $5F_s/2$ y $7F_s/2$, etc., y entre $-3F_s/2$ y $F_s/2$, $-7F_s/2$ y $-5F_s/2$, etc., se superponen *reflejadas* sobre las porciones comprendidas entre $\pm F_s/2$, mientras que las comprendidas entre $3F_s/2$ y $5F_s/2$, $7F_s/2$ y $9F_s/2$, etc., y entre $-5F_s/2$ y $-3F_s/2$, $-9F_s/2$ y $-7F_s/2$, etc., se superponen sin reflexión,

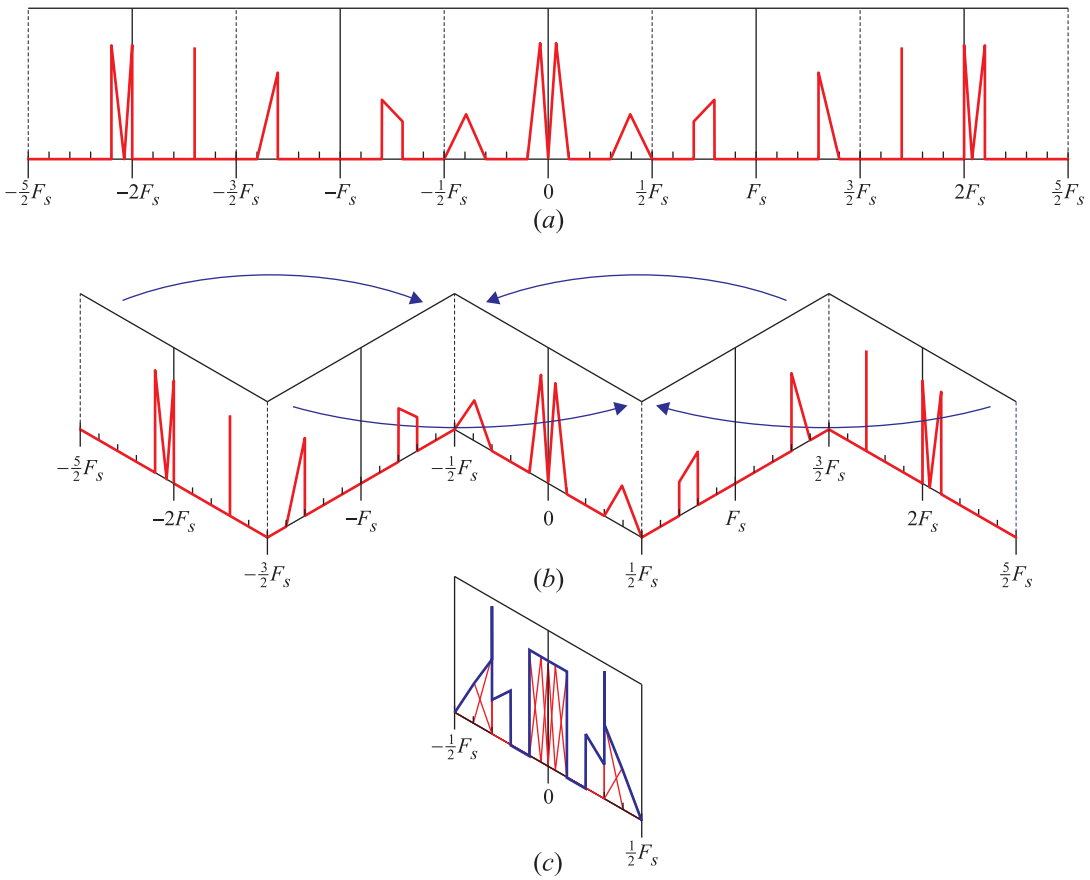


Fig. 5.13. Otra interpretación de los efectos del muestreo en el dominio frecuencial. Espectro de la señal original (a); efecto del muestreo (b); espectro de la señal muestreada $x_s(t)$ (c).

como se muestra en las Fig. 5.14(a) y (b) .

Esta representación muestra que si la señal no satisface el teorema del muestreo, se puede perder mucha información, porque a partir del espectro de la Fig. 5.14(c) es imposible conocer en qué "pliegue" estaba cada porción del espectro, y por lo tanto, es imposible recuperar el espectro original representado en la Fig. 5.14(a) . Cualquier componente frecuencial que esté *fuera* de la banda comprendida entre $\pm F_s/2$ se replica *dentro* de esta banda, "ensuciando" el espectro, y aumentando potencialmente el nivel de ruido.

Estos problemas no se producen con señales que tengan ancho de banda finito, y que satisfagan las hipótesis del teorema del muestreo. No obstante, no siempre se conoce con certeza si la señal es de ancho de banda limitado o no, o si tiene componentes frecuenciales por encima de $\pm F_s/2$. Para evitar estos inconvenientes es frecuente utilizar un filtro, conocido como *prefiltro* o *filtro antialiasing*, que se coloca antes del conversor C/D y que limita el contenido frecuencial de la señal continua $x_c(t)$ al intervalo entre $\pm F_s/2$, tal como se analiza en la Sección 5.11.1.

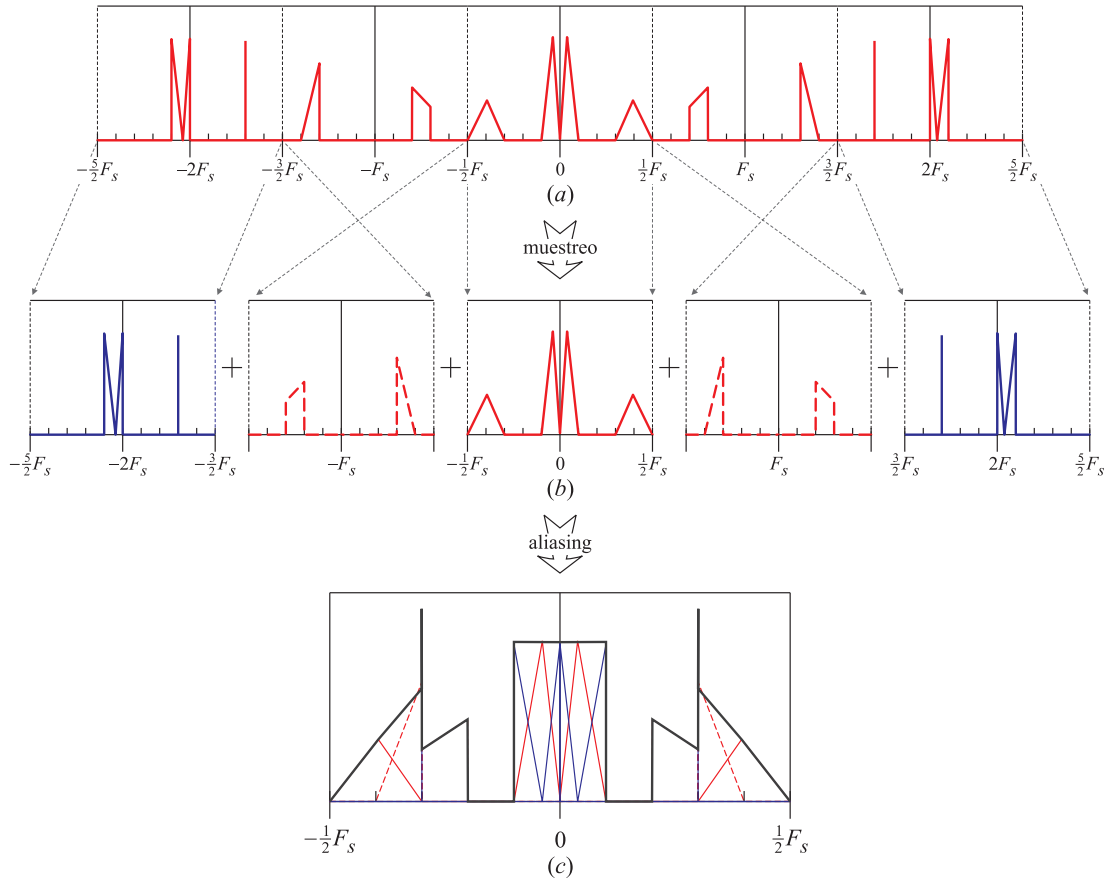


Fig. 5.14. Representación del "aliasing" en el dominio frecuencial.

5.5. Unidades de frecuencia típicas

La Fig. 5.15 muestra las distintas escalas de frecuencia que suelen utilizarse en el procesamiento digital de señales, y los extremos del intervalo de Nyquist. Si el procesamiento discreto está asociado de alguna manera a una señal continua, como en el caso de los Ejemplos 5.1, 5.2, 5.3, se prefieren las escalas en Hertz o en radianes por segundo, como muestran las Fig. 5.15(a) y (b) , respectivamente.

En otros casos suele preferirse una escala adimensional, como la que se usa con los espectros de señales discretas, como se indica en la Fig. 5.15(c). El muestreo de una exponencial compleja continua $x_c(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ cada $t = nT$ segundos, donde $T = 1/F_s$ es el período de muestreo, y F_s la frecuencia de muestreo resulta en la señal discreta

$$x[n] = e^{j2\pi f_0 Tn} = e^{j2\pi \frac{f_0}{F_s} n} = e^{j\Omega_0 Tn} = e^{j\omega_0 n},$$

donde $\Omega_0 = 2\pi f_0$. Es evidente que

$$\omega_0 = \Omega_0 T = \frac{\Omega_0}{F_s} = \frac{f_0}{F_s} 2\pi = 2\pi f_0 T. \tag{5.15}$$

En el libro de Oppenheim se usa el escalado $\omega_0 = \Omega_0 T$. En estos apuntes se prefiere la forma $\omega_0 = f_0(2\pi/F_s)$ porque:

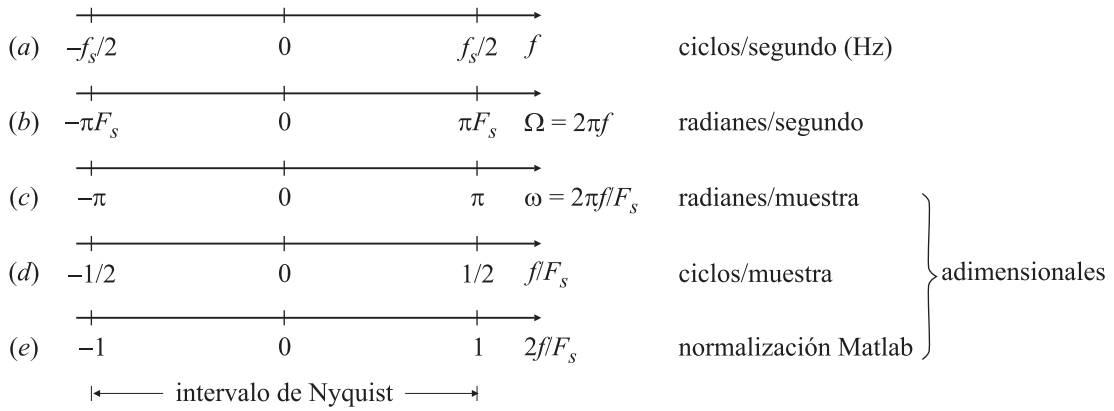


Fig. 5.15. Intervalos de frecuencia utilizados habitualmente en el procesamiento de señales.

- los espectros continuos se grafican en Hz, como la mayoría de los instrumentos de medición;
- esta forma recuerda el escalado proporcional entre la frecuencia continua f y la frecuencia discreta ω: si $f_0 = F_s$, entonces $\omega_0 = 2\pi$.

También es habitual normalizar la frecuencia f con respecto a la frecuencia de muestreo F_s como se representa en la Fig. 5.15(d), o con respecto de la frecuencia de Nyquist $f_N = F_s/2$ [Fig. 5.15(e)] que es el estilo adoptado en MATLAB; en este caso el intervalo de Nyquist es $(-1, 1]$. Con estas dos normalizaciones se evita la aparición del símbolo "π" en los gráficos.

En aplicaciones donde se utiliza una única frecuencia de muestreo las unidades radianes por muestra (ω) o ciclos por muestra (f/F_s) son las preferidas, mientras que en el procesamiento multirate, donde distintas etapas de procesamiento trabajan con diferentes frecuencias de muestreo, es más conveniente trabajar con unidades dimensionales (ciclos o radianes por segundo).

5.6. Efectos de la distorsión por solapamiento (aliasing)

En esta sección se desarrollan dos casos que muestran los efectos de violar las hipótesis del teorema del muestreo. En el primero, la señal bajo estudio es de banda limitada, pero no su frecuencia es mayor que la mitad de la frecuencia de muestreo: es el efecto estroboscópico que se obtiene al iluminar un objeto que gira con una luz pulsante (flash). En el segundo caso la señal no es de banda limitada: se estudia qué es lo que ocurre al muestrear una onda cuadrada.

5.6.1. Movimiento rotacional

Las propiedades del muestreo de señales sinusoidales se pueden comprender de manera más intuitiva representando una sinusoide compleja $x_c(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ como una rueda que rota a razón de f_0 revoluciones por segundo (Orfanidis, 1996, pp. 27-29). Esta representación es conveniente porque permite asociar el signo de la frecuencia con el sentido

de giro del disco: las frecuencias positivas representan rotaciones en sentido antihorario. La rueda se encuentra en un ambiente oscuro, y se ilumina mediante una serie de destellos luminosos (*flashes*) que ocurren F_s veces por segundo. La frecuencia de rotación de la rueda en radianes por segundo es $\Omega_0 = 2\pi f_0$. Durante el intervalo $T = 1/F_s$ entre destellos la rueda gira un ángulo

$$\omega_0 = \Omega_0 T = 2f_0 T = \frac{2\pi f_0}{F_s}.$$

Esta cantidad no es otra cosa que la *frecuencia digital*, que se mide en radianes por muestra (Sección 5.5). En función de la frecuencia digital ω, la señal sinusoidal muestreada es

$$x[n] = x_c(nT) = e^{j2\pi f_0 nT} = e^{j\omega_0 n}.$$

En esta escala la frecuencia de Nyquist $f_N = F_s/2$ se convierte en $\omega_N = \pi$, y el intervalo $[-f_N, f_N)$ en $[-\pi, \pi)$. Las réplicas de frecuencia $f = f_0 + mF_s$ aparecen en las frecuencias digitales

$$\frac{2\pi(f_0 + mF_s)}{F_s} = \frac{2\pi f_0}{F_s} + 2\pi m = \omega_0 + 2\pi m.$$

Como la frecuencia $f = F_s$ corresponde a $\omega = 2\pi$, las réplicas de las frecuencias $f > F_s/2$ aparecen en

$$\omega_a = 2\pi \left(\!\!\left(f\right)\!\!\right)_{F_s} = 2\pi \left(\!\!\left(\frac{f}{F_s}\right)\!\!\right)_1 = ((\omega))_{2\pi}$$

donde $((\cdot))_M$ indica la operación *módulo M*. Esta operación es una extensión natural de la operación definida en el Capítulo 4, ya que M puede ser un número *real*, y no necesariamente un entero. Se define como

$$((x))_y = x - ny,$$

con $n = \lfloor x/y \rfloor$ donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función *piso*: $\lfloor x \rfloor$ es el mayor de los enteros menores que x.

La cantidad $fT = f/F_s$ representa el número de revoluciones que gira la rueda durante el intervalo T entre destellos. Si $|f_0| < F_s/2$ en este lapso de tiempo la rotación es menor que media revolución. En cambio, si la rueda gira a una frecuencia superior a la frecuencia $F_s = 1/T$, por ejemplo $f_1 = f_0 + mF_s$, donde $f_0 \in [-F_s/2, F_s/2)$, entonces durante el tiempo T rotará

$$f_1 T = (f_0 + mF_s)T = f_0 T + m$$

vueltas: habrá girado m revoluciones completas más una fracción $\omega_0 = f_0 T$. Si el disco está iluminado solamente por los destellos, un observador es incapaz de percibir estas m revoluciones extras y no puede distinguir si la rueda gira a f_1 rev/s o a f_0 rev/s: la velocidad de rotación percibida por el observador es siempre

$$f_a = ((f))_{F_s}. \tag{5.16}$$

Los siguientes ejemplos ilustran este punto. En todos los casos se supone que el intervalo de tiempo T entre los destellos es $T = 1/4$ de segundo, o bien $F_s = 4$ Hz. En los esquemas frecuenciales, la flecha continua indica la frecuencia real de oscilación, la flecha de trazos discontinuos la frecuencia de los destellos, y la flecha hueca las réplicas de las componentes frecuenciales del espectro discreto. Un par de líneas punteadas señala el intervalo de Nyquist $[-F_s/2, F_s/2)$ o $[-\pi, \pi)$, según corresponda.

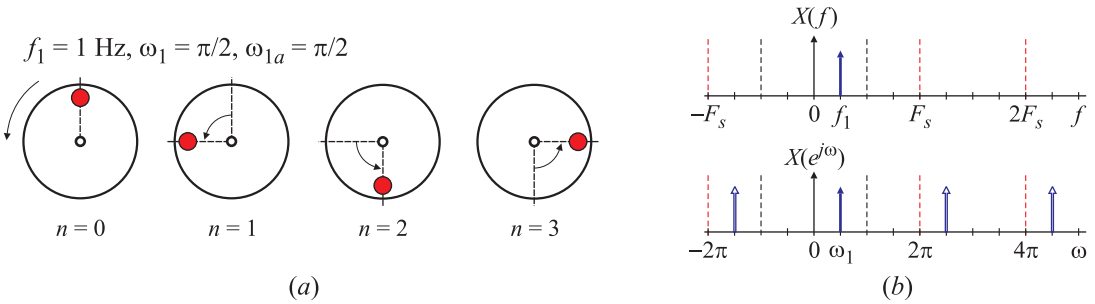


Fig. 5.16. Disco rotante. Posiciones del disco al momento del destello cuando gira a 1 rev/s (a). Espectro de la posición y de las muestras (b). El destello ocurre 4 veces por segundo.

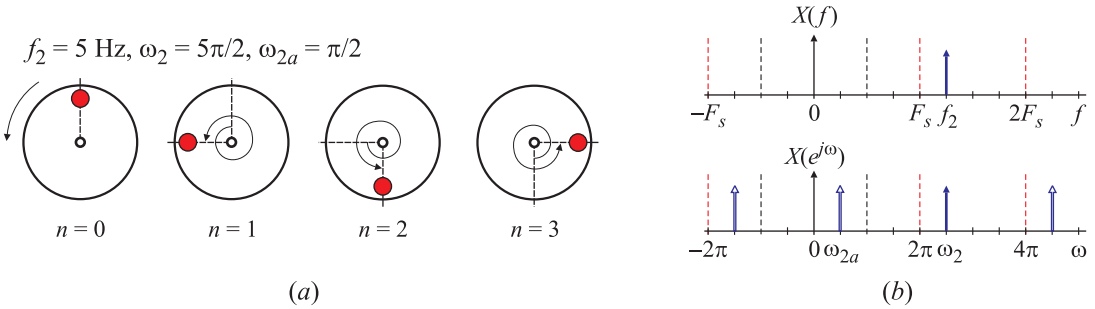


Fig. 5.17. Disco rotante. Posiciones del disco al momento del destello cuando gira a 5 rev/s (a). Espectro de la posición y de las muestras (b). El destello ocurre 4 veces por segundo.

EJEMPLO **5.4. Velocidad errónea, sentido correcto**

Dos ruedas giran en sentido antihorario, una de ellas a $f_1 = 1$ Hz y otra a $f_2 = 5$ Hz, como se muestra en la Fig. 5.16 y en la Fig. 5.17, respectivamente. Ambas se observan bajo una luz estroboscópica que destella 4 veces por segundo ($F_s = 4$ Hz); la velocidad de rotación del segundo disco es f_2 y se verifica que $f_2 = f_1 + F_s$.

Durante el intervalo de tiempo entre destellos ($T = 1/4$ s) la primera rueda recorre $f_1 T = f_1/F_s = 1/4$ de revolución en sentido horario; el ángulo de rotación es $\omega_1 = 2\pi f_1 T = 2\pi f_1/F_s = 2\pi/4 = \pi/2$ radianes. Una persona que observase el movimiento del disco iluminado con la luz estroboscópica notaría que la rueda se desplaza $1/4$ de revolución con cada destello (cada $T = 1/4$ de segundo), por lo que su velocidad de rotación es

$$\frac{1/4 \text{ rev}}{1/4 \text{ s}} = 1 \text{ rev/s}.$$

En consecuencia el observador percibiría la velocidad y el sentido correcto de la rotación.

La segunda rueda, en cambio, en el mismo lapso de tiempo $T = 1/4$ s gira $f_2 T = f_2/F_s = 5/4$ revoluciones, abarcando un ángulo de rotación de $\omega_2 = 5\pi/2$. Comparada con la primera rueda, gira una vuelta completa de más. Sin embargo, un observador que apreciase el movimiento de esta rueda bajo una luz estroboscópica seguiría notando que la rueda se desplaza $1/4$ de revolución en sentido horario cada $T = 1/4$ de segundo, de donde concluiría (erróneamente) que la velocidad de rotación es también de 1 rev/s. Este resultado coincide con el que resulta de aplicar (5.16)

$$f_{2a} = ((f_2))_{F_s} = ((5))_4 = 5 - 4 = 1. \qquad \square$$

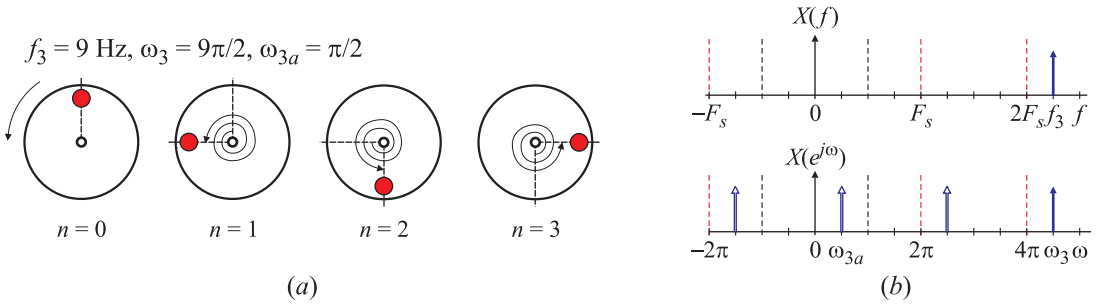


Fig. 5.18. Disco rotante. Posiciones del disco al momento del destello cuando gira a 9 rev/s (a). Espectro de la posición y de las muestras (b). El destello ocurre 4 veces por segundo.

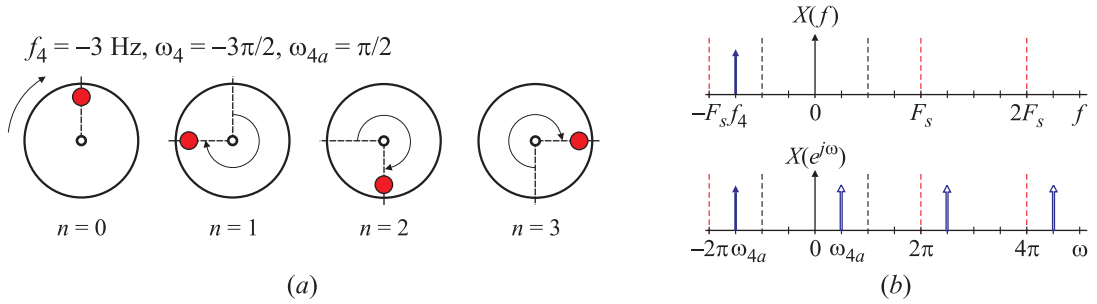


Fig. 5.19. Disco rotante. Posiciones del disco al momento del destello cuando gira a (-3) rev/s (a). Espectro de la posición y de las muestras (b). El destello ocurre 4 veces por segundo.

En este caso la velocidad percibida es errónea, pero el sentido de giro es correcto. En el siguiente Ejemplo se analiza otra variante del problema.

EJEMPLO **5.5. Velocidad y sentido incorrectos**

En la Fig. 5.18 y en la Fig. 5.19 se muestran otros dos discos, uno de ellos que gira en sentido antihorario a razón de $f_3 = 9$ rev/s y el otro en sentido horario a $f_4 = -3$ rev/s, respectivamente. El signo negativo indica rotación en sentido horario.

Durante el período $T = 1/4$ s entre dos destellos, la tercera rueda recorre $f_3 T = 9/4 = 1/4 + 2$ revoluciones, esto es, dos giros completos adicionales al recorrido de la rueda 1 del Ejemplo anterior. Al igual que lo que sucede con el disco 2 del Ejemplo anterior (Fig. 5.17), una persona que observe las ruedas bajo la luz estroboscópica concluiría (nuevamente de manera equivocada) que la rueda gira a razón de 1 rev/s; en símbolos, $f_{3a} = ((f_3))_{F_s} = ((9))_4 = 9 - 2 \times 4 = 1$ rev/s.

El caso de la cuarta rueda es más interesante. Durante el período entre dos destellos recorre $f_4 T = -3/4$ revoluciones en sentido antihorario. El observador aprecia que en cada destello la posición del disco cambia en $3/4$ revolución en sentido antihorario, o bien $1/4$ de revolución *en sentido horario*, como muestra la Fig. 5.19(a), y concluye que la rueda tiene la misma velocidad que el disco 1 del Ejemplo anterior. En este caso, tanto la velocidad de rotación como el sentido de giro se aprecian de manera incorrecta. También en este caso la ecuación (5.16) permite interpretar correctamente el resultado:

$$f_{4a} = ((f_4))_{F_s} = ((-3))_4 = -3 + 4 = 1. \qquad \square$$

En el siguiente ejemplo se muestra que si una rueda gira a una velocidad menor que $1/2$ revolución entre instantes de muestreo, es decir que $fT < 1/2$ o $\omega = 2\pi f T < \pi$, el

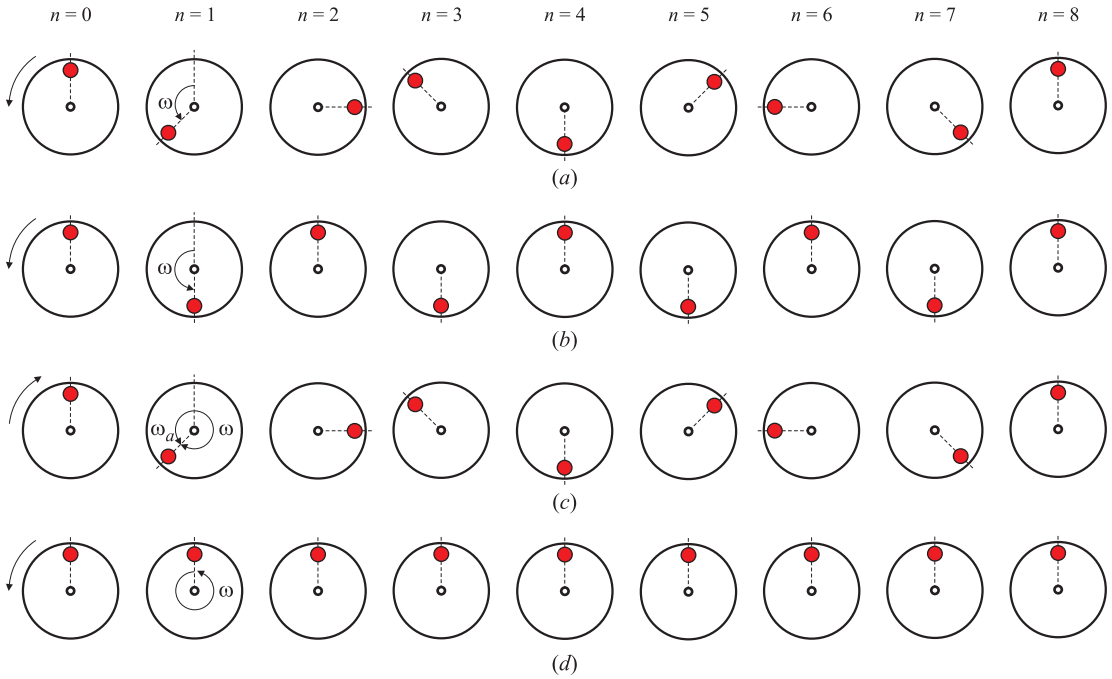


Fig. 5.20. Discos girando a diferentes velocidades: $f_1 = 1{,}5$ Hz (a); $f_2 = 2$ Hz (b); $f_3 = -2{,}5$ Hz (c); $f_4 = 4$ Hz (d). En todos los casos la frecuencia de los destellos es $F_s = 4$ Hz.

movimiento percibido coincide con el movimiento real en velocidad y sentido. Las condiciones $fT < 1/2$ u $\omega < \pi$ son equivalentes a la condición impuesta por el teorema del muestreo: $F_s > 2f_N$. Si la rueda se desplaza más de media vuelta entre dos destellos consecutivos de la lámpara, el movimiento se percibirá como un giro en dirección contraria, a una velocidad menor.

EJEMPLO **5.6. Cuatro discos rotando a distintas velocidades**

La Fig. 5.20 muestra cuatro ruedas que giran con velocidades $f_1 = 1{,}5$ Hz, $f_2 = 2$ Hz, $f_3 = -2{,}5$ Hz, $f_4 = 4$ Hz, que se observan bajo una luz estroboscópica que destella a razón de 4 veces por segundo ($F_s = 4$ Hz). Los discos 1, 2, y 4 giran en sentido antihorario, mientras que el disco 3 gira en sentido horario, como indican los signos de las velocidades $f_1, ..., f_4$.

La primera rueda [Fig. 5.20(a)] gira $fT = 3/8$ de vuelta cada $T = 1/4$ segundos. Por lo tanto, un observador percibiría que en el n-ésimo instante de tiempo el disco se desplazó $3\pi n/4$ radianes.

La segunda rueda [Fig. 5.20(b)] rota exactamente media vuelta ($fT = 1/2$, $\omega = 2\pi fT = \pi$ rad) en el período que transcurre entre los destellos. El observador notaría que el punto destacado del disco oscila alternativamente entre arriba y abajo, y es imposible determinar el sentido de giro.

La tercera rueda [Fig. 5.20(c)] gira más de media vuelta (en sentido horario) en el intervalo de tiempo comprendido entre dos destellos, $fT = 5/8$. El observador notaría que en ese lapso de tiempo el disco rota $\omega_3 = -5\pi/4$ rad, y percibe el movimiento en función del menor ángulo de rotación, y creerá que el sentido de giro es contrario al real, cubriendo un ángulo de $\omega_a = ((\omega_4))_{2\pi} = ((-5\pi/4))_{2\pi} = 2\pi - 5\pi/4 = 3\pi/4$, que equivale a 3/8 de vuelta y corresponde a una frecuencia $f_{3a} = (3/8 \text{ rev})/(1/4 \text{ s}) = 1{,}5$ Hz. Es decir que el disco parece girar a la misma velocidad, y en el mismo sentido que el primer disco, aunque la velocidad real y el sentido de giro real son diferentes.

La cuarta rueda [Fig. 5.20(d)] parece estar quieta, ya que $f_4 = F_s = 4$, y el movimiento se muestrea exactamente una vez por revolución: en el intervalo de tiempo que transcurre entre dos destellos

el disco gira exactamente 1 vuelta, es decir $\omega_4 = 2\pi$. La frecuencia de rotación observada es $f_{4a} = ((f_4))_{F_s} = ((4))_4 = 4 - 4 = 0$. □

5.6.2. Muestreo de una onda cuadrada

Una onda cuadrada de período $T_0 = 1$ s, definida en un período $0 \leq t < 1$ por

$$x_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < t < 0{,}5, \\ -1, & \text{si } 0{,}5 < t < 1, \\ 0, & \text{si } t = 0 \text{ o } t = 0{,}5, \end{cases}$$

donde t se expresa en segundos, se muestrea a F_s Hz, y las muestras $x[n] = x_c(n/F_s)$ se filtran con un reconstructor ideal. Se desea determinar la señal continua en el tiempo $x_r(t)$ a la salida del filtro reconstructor para dos frecuencias de muestreo: $F_s^A = 4$ Hz y $F_s^B = 8$ Hz.

Como la onda cuadrada tiene simetría de media onda, la expansión en series de Fourier está compuesta solamente por las armónicas impares de la frecuencia fundamental $f_0 = 1/T_0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \text{ impar}} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T_0} kt\right) = \sum_{k \text{ impar}} b_k \operatorname{sen}(2\pi f_k t) \\ &= b_1 \operatorname{sen}(2\pi t) + b_3 \operatorname{sen}(6\pi t) + b_5 \operatorname{sen}(10\pi t) + \cdots \end{aligned}$$

donde $b_k = 4/(\pi k)$, $f_k = k/T_0$, $k = 1, 3, 5, \ldots$. Como la señal tiene infinitas armónicas, no es de banda limitada, y en consecuencia no puede muestrearse adecuadamente. Cuando la frecuencia de muestreo es $F_s^A = 4$ Hz, sólo la primera armónica de frecuencia f_1 queda dentro del intervalo de Nyquist, que es $(-2, 2]$ Hz. Para $F_s^B = 8$ Hz las componentes frecuenciales comprendidas en el intervalo de Nyquist $[-4, 4)$ Hz son $f_1 = 1$ Hz, y $f_3 = 3$ Hz. El resto de las componentes sufrirán distorsión por solapamiento (*aliasing*), y algunas réplicas aparecerán dentro del intervalo de Nyquist. La tabla siguiente muestra las frecuencias de las réplicas dentro del intervalo de Nyquist correspondientes a las armónicas de la señal para las dos frecuencias de muestreo.

frecuencia de	frecuencia de las réplicas para las armónicas $f_k = k/T$								
muestreo F_s	$k \rightarrow$	1	3	5	7	9	11	13	15	$\cdots$
$F_s^A = 4$ Hz	$\omega_k = ((f_k - \frac{F_s^A}{2}))_{F_s^A} - \frac{F_s^A}{2}$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	$\cdots$
$F_s^B = 8$ Hz	$\omega_k = ((f_k - \frac{F_s^B}{2}))_{F_s^B} - \frac{F_s^B}{2}$	1	3	−3	−1	1	3	−3	−1	$\cdots$

En este ejemplo, las frecuencias que yacen fuera del intervalo de Nyquist aparecen replicadas dentro de la banda con un patrón bien definido. De esta forma se puede encontrar

una forma cerrada para la señal discreta

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k \text{ impar}} b_k \operatorname{sen}\left(2\pi f_k \frac{n}{F_s}\right) = \sum_{m \text{ impar}} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s}\omega_k n\right) \\ &= b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s}\omega_1 n\right) + b_3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s}\omega_3 n\right) + b_5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s}\omega_5 n\right) + \cdots \end{aligned}$$

que para la frecuencia de muestreo $F_s^A = 4$ Hz resulta

$$x_A[n] = (b_1 - b_3 + b_5 - b_7 + b_9 - b_{11} + \cdots) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s^A}\omega_1 n\right) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s^A}\omega_1 n\right)$$

donde

$$A = \sum_{k=0}^{\infty}(b_{1+4k} - b_{3+4k}) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+4k} - \frac{1}{3+4k}\right). \tag{5.17}$$

De manera similar, para $F_s^B = 8$ Hz se encuentra que

$$\begin{aligned} x_B[n] &= (b_1 - b_7 + b_9 - b_{15} + \cdots) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s^B}\omega_1 n\right) + (b_3 - b_5 + b_{11} - b_{13} + \cdots) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s^B}\omega_3 n\right) \\ &= B \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s^B}\omega_1 n\right) + C \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{F_s^B}\omega_3 n\right), \end{aligned}$$

donde

$$B = \sum_{r=0}^{\infty}(b_{1+8r} - b_{7+8r}) = \frac{4}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+8r} - \frac{1}{7+8r}\right) \tag{5.18}$$

$$C = \sum_{r=0}^{\infty}(b_{3+8r} - b_{5+8r}) = \frac{4}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3+8r} - \frac{1}{5+8r}\right) \tag{5.19}$$

Los coeficientes A, B, y C se pueden determinar de dos maneras:

- Evaluando las sumatorias de las ecuaciones (5.17)-(5.19). Las tres expresiones son casos especiales de la sumatoria más general

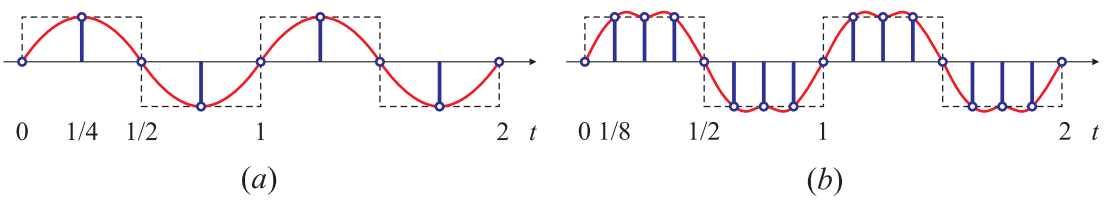
$$b(m, M) = \frac{4}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+Mr} - \frac{1}{M-m+Mr}\right) \tag{5.20}$$

donde $M > m > 0$. Notando que

$$\frac{1}{m+Mk} - \frac{1}{M-m+Mk} = \int_0^{\infty}(e^{-mx} - e^{-(M-m)x})e^{-Mkx}dx, \tag{5.21}$$

cada uno de los términos de (5.20) se puede reemplazar por la integral de (5.21). Intercambiando el orden de la sumatoria y la integración, y recordando que $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-Mkx} = 1/(1-e^{-Mx})$ para $x > 0$, resulta

$$b(m, M) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-mx} - e^{-(M-m)x}}{1-e^{-Mx}}dx = \frac{4}{M}\cot\left(\frac{m\pi}{M}\right).$$



(a) (b)

Fig. 5.21. Muestreo de una onda cuadrada: $F_s = 4/T_0$ (a); $F_s = 8/T_0$ (b).

El último paso se obtiene de una tabla de integrales (Gradshtein y Ryzhik, 1980). Los coeficientes A, B, y C son entonces

$$\begin{aligned} A &= b(1,4) = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ B &= b(1,8) = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \\ C &= b(3,8) = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}. \end{aligned}$$

- Imponiendo que la señal recuperada $x_r(t)$ y la señal de entrada $x(t)$ *coincidan en los instantes de muestreo* (justificado en la sección siguiente), es decir

$$x(n/f_s) = x_r(n/f_s).$$

Para la frecuencia de muestreo $F_s^A = 4$ Hz,

$$x_r(n/F_s^A) = x_A[n] = A\,\mathrm{sen}[(2\pi/F_s^A)\omega_1 n] = A\,\mathrm{sen}(\pi n/2).$$

Evaluando en $n = 1$, $x(1/F_s^A) = 1$ y entonces

$$A = 1.$$

Para el segundo caso, donde $F_s^B = 8$ Hz, se tiene que

$$x_r(n/F_s^B) = x_B[n] = B\,\mathrm{sen}(\pi n/4) + C\,\mathrm{sen}(3\pi n/4).$$

Imponiendo que $x(n/F_s^B) = x_r(n/F_s^B)$ en $n = 1, 2$, se obtienen dos ecuaciones

$$\begin{aligned} B\,\mathrm{sen}(\pi/4) + C\,\mathrm{sen}(3\pi/4) &= 1, \\ B\,\mathrm{sen}(\pi/2) + C\,\mathrm{sen}(3\pi/2) &= 1, \end{aligned}$$

de donde resulta $B = (\sqrt{2}+1)/2$, $C = (\sqrt{2}-1)/2$.

La Fig. 5.21(a) muestra la señal $x(t)$, $x_r(t)$ y sus muestras para la frecuencia de muestreo $F_s^A = 4$ Hz, y la Fig. 5.21(b) para el caso de $F_s^B = 8$ Hz.

Los resultados anteriores se pueden generalizar para cualquier frecuencia de muestreo $F_s^M = MF_s^A$. Por ejemplo, si $M = 3$ ($F_s^3 = 12$ Hz), se obtiene

$$x_r(t) = b(1,12)\,\mathrm{sen}(2\pi t) + b(3,12)\,\mathrm{sen}(6\pi t) + b(5,12)\,\mathrm{sen}(10\pi t),$$

y de manera más general,

$$x_r(t) = \sum_{k=1,3,\ldots(M/2-1)} b(k,M)\,\mathrm{sen}(2\pi k t). \tag{5.22}$$

Tabla 5.1: Variación de los coeficientes de (5.22) en función de la frecuencia de muestreo.

coeficientes	frecuencia de muestreo				
	4 Hz	8 Hz	12 Hz	16 Hz	∞
b_1	1,000	1,207	1,244	1,257	1,273
b_3	–	0,207	0,333	0,374	0,424
b_5	–	–	0,089	0,167	0,255
b_7	–	–	–	0,050	0,182

A medida que $M \to \infty$, los coeficientes $b(k, M)$ tienden a b_k, los coeficientes de la serie de Fourier. Utilizando la aproximación $\cot(x) \approx 1/x$, válida para x pequeño, se obtiene el límite

$$\lim_{M\to\infty} b(k, M) = \frac{4}{M}\frac{1}{\pi k/M} = \frac{4}{\pi k} = b_k.$$

La Tabla 5.1 muestra las mejoras sucesivas de los valores de los coeficientes de los armónicos a medida que se incrementa la frecuencia de muestreo.

En este ejemplo, las frecuencias de muestreo se eligieron de manera que la frecuencia de las réplicas coincidiesen con armónicas de las frecuencias de la señal. En otras palabras, la frecuencia de muestreo es un múltiplo de la frecuencia fundamental $f_0 = 1/T_0$. Para otras frecuencias de muestreo, las réplicas pueden no coincidir con las armónicas contenidas dentro del intervalo de Nyquist, cambiando no sólo el balance de las armónicas, sino también las componentes frecuenciales.

5.7. Reconstrucción de una señal de banda limitada a partir de sus muestras

De acuerdo con el teorema del muestreo, o de Kotelnikov-Nyquist-Shannon, una señal de tiempo continuo se puede representar exactamente por un conjunto de valores discretos (las muestras de la señal), si éstos son tomados suficientemente próximos. Esto significa que es posible recuperar la señal original a partir de los valores de las muestras, y del conocimiento de la frecuencia de muestreo, es decir, cada cuánto fueron tomadas esas muestras. Este proceso de reconstrucción puede comprenderse a partir de la modulación de un tren de impulsos, de manera similar a la utilizada para derivar los formalismos matemáticos de la conversión continuo a discreto (C/D).

En la Sección 5.3 se estudió que si se verifican las condiciones del teorema del muestreo, y si el tren de impulsos se filtra con un filtro pasabajos de ancho de banda adecuado, la transformada de Fourier a la salida del filtro será idéntica a la transformada de Fourier de la señal continua de entrada $x_c(t)$, y por lo tanto, la señal de salida del filtro reconstructor $x_r(t)$ será igual a $x_c(t)$.

Si se parte de una sucesión discreta $x[n]$ se puede obtener un tren de impulsos $x_s(t)$ en el

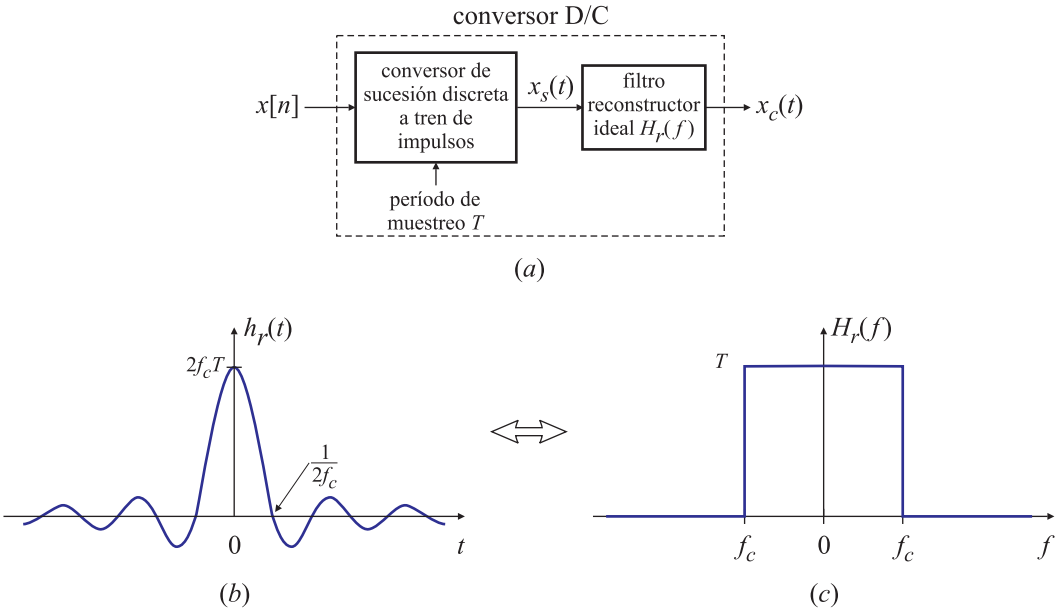


Fig. 5.22. Diagrama bloque de un sistema reconstructor ideal (a).Respuesta impulsiva $h_r(t)$ (b) y respuesta en frecuencia $H_r(f)$ (c) del filtro reconstructor ideal.

cual el área del impulso n-ésimo sea igual al valor de la muestra n-ésima $x[n]$:

$$x_s(t) = \sum_n x[n]\delta(t - nT). \tag{5.23}$$

Esa expresión indica que el valor de la muestra n-ésima está asociada al área del impulso en $t = nT$, donde $T = 1/F_s$ es el período de muestreo. Si este tren de impulsos es la entrada a un filtro pasabajos continuo con respuesta en frecuencia $H_r(f)$ y respuesta impulsiva $h_r(t)$, la salida del filtro será la señal $x_r(t)$ dada por

$$\begin{aligned} x_r(t) &= h_r(t) * x_s(t) \\ &= h_r(t) * \sum_n x[n]\delta(t - nT) \\ &= \sum_n x[n]h_r(t - nT). \end{aligned} \tag{5.24}$$

En la Fig. 5.22 se muestra un diagrama bloque del proceso de reconstrucción. El filtro reconstructor ideal tiene una ganancia $T = 1/F_s$ en la banda de paso para compensar el factor $1/T$ que aparece durante el proceso de muestreo, como indican las ecuaciones (5.10) o (5.11), es decir

$$H_r(f) = \begin{cases} T, & \text{si } |f| < f_c. \\ 0, & \text{si } |f| \geq f_c. \end{cases}$$

La frecuencia de corte f_c debe quedar comprendida entre f_N (la mayor componente de frecuencia de la señal original $x_c(t)$) y $F_s - f_N$:

$$f_N < f_c < F_s - f_N.$$

Una elección conveniente y habitual es elegir la frecuencia de corte del filtro reconstructor como la mitad de la frecuencia de muestreo, es decir

$$f_c = F_s/2.$$

Esta elección es apropiada para cualquier valor de f_N y F_s, siempre que $F_s > 2f_N$.

La respuesta impulsiva $h_r(t)$ del filtro reconstructor se puede calcular a partir de la transformada de Fourier inversa de $H_r(f)$, y resulta ser

$$h_r(t) = 2f_cT\,\text{sinc}\,(2f_ct) = 2f_cT\frac{\text{sen}(2\pi f_ct)}{2\pi f_ct}$$

que para $f_c = F_s/2$ se puede escribir como

$$h_r(t) = 2\frac{F_s}{2}T\,\text{sinc}\left(2\frac{F_s}{2}t\right) = \text{sinc}(F_st) = \text{sinc}(t/T) = \frac{\text{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T}. \tag{5.25}$$

Esta respuesta impulsiva se representa en la Fig. 5.22(b) . Sustituyendo (5.25) en (5.24) se tiene que

$$x_r(t) = \sum_n x[n]\frac{\text{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}. \tag{5.26}$$

A partir del punto de vista frecuencial estudiado en la Sección 5.3, se observa que si $x[n] = x_c(nT)$ con $X_c(f) = 0$ para $|f| > F_s/2$, entonces $x_r(t)$ es igual a $x_c(t)$. Esta igualdad no es evidente de la ecuación (5.26), aunque pueden destacarse algunas propiedades. En primer lugar, la respuesta impulsiva del filtro reconstructor dada por la ecuación (5.25) se nota que

$$h_r(t)|_{t=0} = 1, \tag{5.27}$$

que resulta de aplicar la regla de l'Hôpital. Además,

$$h_r(t)|_{t=nT} = 0, \qquad \text{para } n = \pm1, \pm2, \ldots. \tag{5.28}$$

A partir de (5.27), (5.28) y (5.24), se encuentra que, si $x[n] = x_c(nT)$,

$$x_r(mT) = x_c(mT) \tag{5.29}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. La ecuación (5.29) muestra que la señal resultante es una reconstrucción exacta de $x_c(t)$ en los instantes de muestreo (cuando $t = nT$), como indica la expresión (5.26). Pero ¿qué pasa en el resto del tiempo? Un análisis gráfico de este fenómeno se muestra en la Fig. 5.23, donde se representa la señal continua $x_c(t)$, y el tren de impulsos modulado $x_s(t)$. En la Fig. 5.23(c) se muestran varios de los términos

$$x[n]\frac{\text{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

y la señal reconstruida $x_r(t)$, revelando que la respuesta impulsiva del filtro reconstructor ideal *interpola* entre los impulsos de $x_s(t)$ para construir la señal de tiempo continuo $x_r(t)$. El hecho que el filtro pasabajo ideal interpola "correctamente" entre las muestras de $x_s(t)$ para obtener exactamente $x_c(t)$ para todo $(n-1)T < t < nT$, $n \in \mathbb{Z}$, queda asegurado por el argumento frecuencial desarrollado en la Sección 5.3.

Este es uno de los casos en que el análisis del problema en un dominio (frecuencial en este caso) es mucho más sencillo que en el otro dominio (temporal). La idea es que si dos señales tienen exactamente el mismo espectro, entonces estas señales deben ser iguales: si $X_r(f) = X_c(f)$, entonces $x_r(t) = x_c(t)$ para todo t. El desarrollo de esta demostración

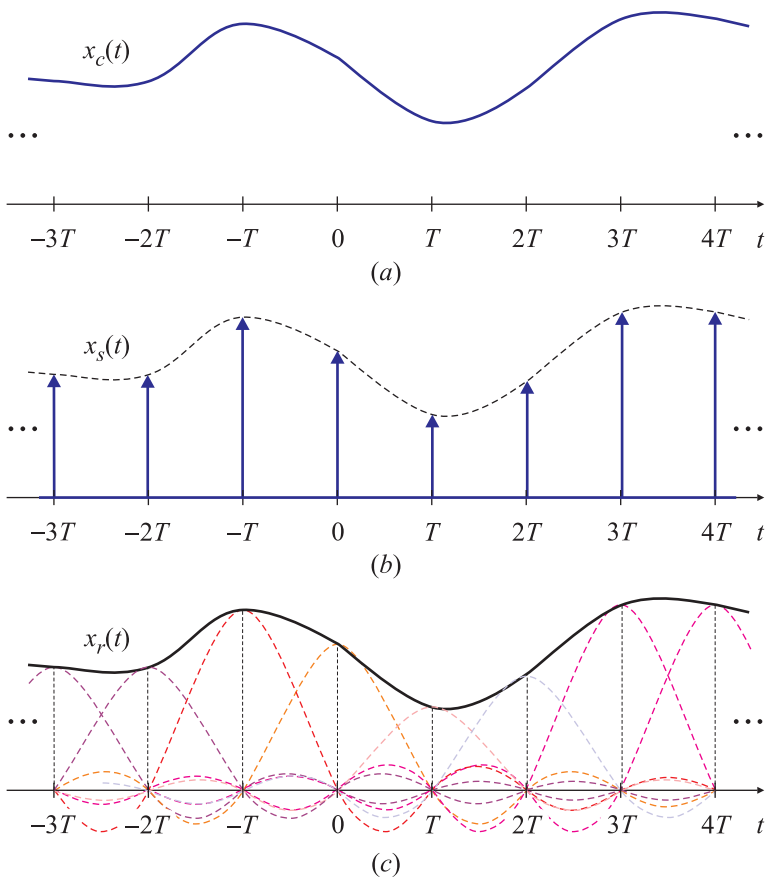


Fig. 5.23. Interpolación ideal de una señal de banda limitada.

enteramente en el domino temporal es muy engorrosa. Algunos casos especiales, para señales particulares, se discuten en la Sección 5.8.

El proceso de reconstrucción explicado en esta sección puede ser formalizado definiendo un sistema ideal que reconstruya una señal de banda limitada a partir de un conjunto de muestras $x[n]$. Este sistema se denomina *conversor discreto a continuo ideal* (D/C), y su diagrama bloque se muestra en la Fig. 5.24. Como se ha explicado más arriba, el proceso de reconstrucción ideal puede ser representado como la conversión de una sucesión a un tren de impulsos, como se indica en (5.23), seguido de un filtrado con un filtro pasabajos ideal, resultando en la salida $x_r(t)$ dada por la expresión (5.26). El paso intermedio, de pasar de una sucesión a un tren de impulsos, es una conveniencia matemática útil para derivar la ecuación (5.26) y para entender el proceso de reconstrucción. Una vez que estos pasos han sido comprendidos cabalmente es conveniente utilizar una representación más compacta, como se muestra en la Fig. 5.24, donde la entrada es la sucesión $x[n]$ y la salida es la señal reconstruida $x_r(t)$ de la ecuación (5.26).

Las propiedades del conversor discreto a continuo ideal se ven más fácilmente en el dominio frecuencia. Para derivar una relación entrada/salida en este dominio, basta calcular la transformada de Fourier de (5.24) o (5.26) teniendo en cuenta la propiedad de desplazamiento temporal: si

$$x_r(t) = \sum_n x[n] h_r(t - nT)$$

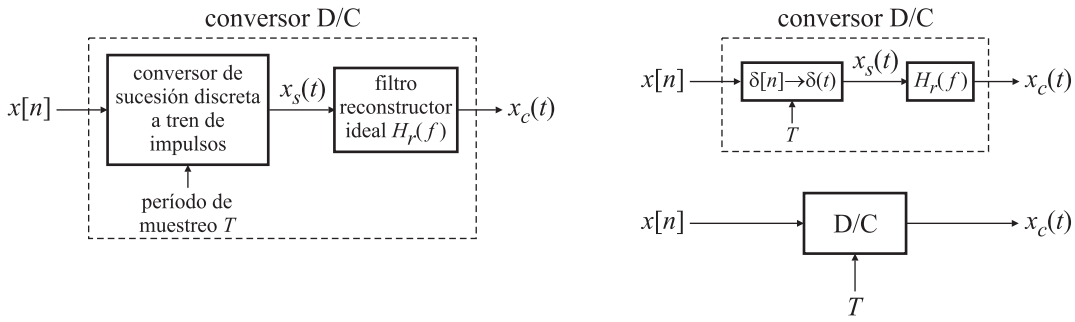


Fig. 5.24. Tres representaciones esquemáticas del conversor discreto a continuo (D/C).

la transformada de Fourier de $h_r(t-nT)$ es $H_r(f)e^{-j2\pi(nT)f}$, y entonces

$$X_r(f) = \sum_n x[n]H_r(f)e^{-j2\pi(nT)f} = H_r(f)\sum_n x[n]e^{-j2\pi(nT)f},$$

donde el tercer término resulta de observar que como $H_r(f)$ no depende de n, se puede escribir afuera de la sumatoria. Por lo tanto,

$$X_r(f) = H_r(f)X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi Tf=f\frac{2\pi}{F_s}} = \begin{cases} TX(e^{j\omega})\big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}, & \text{si } |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{5.30}$$

La ecuación (5.30) es una representación frecuencial del conversor D/C ideal. Según esta expresión, $X(e^{j\omega})$ se escala en frecuencia (es decir, se reemplaza ω por $f(2\pi/F_s)$). El filtro pasabajos ideal $H_r(f)$ selecciona el período centrado en $f=0$ de esta respuesta en frecuencia (periódica y escalada), y compensa por el factor de ganancia $1/T$ que aparece por el proceso de muestreo. En definitiva, si la sucesión $x[n]$ se ha obtenido por muestreo periódico de una señal continua $x_c(t)$ de banda limitada a una tasa de Nyquist o superior, entonces la señal reconstruida $x_r(t)$ será idéntica a la señal continua original: $x_r(t) = x_c(t)$ para todo t. La ecuación (5.30) muestra también que la salida de un conversor D/C ideal es de banda limitada por efecto del filtro reconstructor ideal. Es decir que la respuesta en frecuencia es nula para cualquier frecuencia $|f| > f_c$, donde la frecuencia de corte f_c del filtro es, típicamente, la mitad de la frecuencia de muestreo, $f_c = F_s/2$.

5.8. Análisis temporal de la reconstrucción de señales*

En la sección anterior se ha demostrado es posible recuperar una señal $x_c(t)$ de banda limitada a partir de las muestras $x[n] = x_c(nT)$ obtenidas al muestrear $x_c(t)$ a una frecuencia mayor al doble de su máxima componente frecuencial. La demostración se efectúa en el dominio frecuencia, buscando que el espectro $X_r(f)$ de la señal $x_r(t)$ a la salida del filtro reconstructor coincida con el espectro $X_c(f)$ de la señal continua $x_c(t)$.

En esta Sección se obtiene este resultado para cierta clase de señales trabajando enteramente en el dominio temporal. El desarrollo es muy engorroso, y uno de los propósitos que se persiguen es mostrar que trabajando en el dominio temporal es posible recuperar la señal original a partir de sus muestras. El otro objetivo es poner en evidencia que el cálculo es mucho más complicado que cuando se desarrolla en el dominio frecuencial.

5.8.1. Reconstrucción de una señal sinusoidal

La señal continua

$$x_c(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \phi) \tag{5.31}$$

se muestrea con una frecuencia $F_s = 1/T$. La señal discreta resultante es

$$x[n] = x_c(t)|_{t=nT} = A\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 T n + \phi) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 n + \phi),$$

donde ω_0 está dada por la ecuación (5.15) (repetida aquí por comodidad)

$$\omega_0 = 2\pi\frac{f_0}{F_s} = 2\pi f_0 T \tag{5.32}$$

que es la frecuencia discreta en rad/muestra. Esta señal discreta se aplica a un conversor continuo/discreto (C/D) como el de la Fig. 5.24; su salida está dada por las ecuaciones (5.24) o (5.26), que en este caso toman la forma

$$x_r(t) = A\sum_n \mathrm{sen}(\omega_0 n + \phi)\,\mathrm{sinc}(t/T - n) = A\sum_n \mathrm{sen}(\omega_0 n + \phi)\,\mathrm{sinc}(F_s t - n). \tag{5.33}$$

Se desea probar que la salida del conversor C/D coincide exactamente con la señal continua original (5.31). Esto es, se busca probar que

$$\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \phi) = \sum_n \mathrm{sen}(\omega_0 n + \phi)\,\mathrm{sinc}(F_s t - n) \tag{5.34}$$

donde ω_0 y f_0 están relacionados por (5.32).

Desarrollo en el dominio tiempo

El procedimiento es largo pero no presenta dificultades. Teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = (1/2)[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$, el término dentro de la sumatoria puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}(\omega_0 n+\phi)\,\mathrm{sinc}(F_s t-n) &= \frac{\mathrm{sen}(\omega_0 n+\phi)\,\mathrm{sen}(\pi F_s t-\pi n)}{\pi(F_s t-n)} \\
&= \frac{\cos(\omega_0 n+\phi-\pi F_s t+n\pi)}{2\pi(F_s t-n)} - \frac{\cos(\omega_0 n+\phi+\pi F_s t-n\pi)}{2\pi(F_s t-n)} \\
&= \frac{\cos[(\omega_0+\pi)n+(\phi-\pi F_s t)]}{2\pi(F_s t-n)} - \frac{\cos[(\omega_0-\pi)n+(\phi+\pi F_s t)]}{2\pi(F_s t-n)} \\
&= \frac{\cos[(\omega_0+\pi)n]\cos(\phi-\pi F_s t)}{2\pi(F_s t-n)} - \frac{\mathrm{sen}[(\omega_0+\pi)n]\,\mathrm{sen}(\phi-\pi F_s t)}{2\pi(F_s t-n)} \\
&\quad - \frac{\cos[(\omega_0-\pi)n]\cos(\phi+\pi F_s t)}{2\pi(F_s t-n)} + \frac{\mathrm{sen}[(\omega_0-\pi)n]\,\mathrm{sen}(\phi+\pi F_s t)}{2\pi(F_s t-n)},
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
x_r(t) &= \frac{A}{2\pi}\cos(\phi-\pi F_s t)\sum_n \frac{\cos[(\omega_0+\pi)n]}{F_s t-n} - \frac{A}{2\pi}\,\mathrm{sen}(\phi-\pi F_s t)\sum_n \frac{\mathrm{sen}[(\omega_0+\pi)n]}{F_s t-n} \\
&\quad - \frac{A}{2\pi}\cos(\phi+\pi F_s t)\sum_n \frac{\cos[(\omega_0-\pi)n]}{F_s t-n} + \frac{A}{2\pi}\,\mathrm{sen}(\phi+\pi F_s t)\sum_n \frac{\mathrm{sen}[(\omega_0-\pi)n]}{F_s t-n}.
\end{aligned}$$

Además, como $\cos[(\omega_0-\pi)n] = \cos[(\omega_0+\pi)n]$ y $\operatorname{sen}[(\omega_0-\pi)n] = \operatorname{sen}[(\omega_0+\pi)n]$, resulta

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \frac{A}{2\pi}[\cos(\phi-\pi F_s t) - \cos(\phi+\pi F_s t)] \sum_n \frac{\cos[(\omega_0+\pi)n]}{F_s t-n} \\ &\quad + \frac{A}{2\pi}[-\operatorname{sen}(\phi-\pi F_s t) + \operatorname{sen}(\phi+\pi F_s t)] \sum_n \frac{\operatorname{sen}[(\omega_0+\pi)n]}{F_s t-n} \\ &= \frac{A}{\pi}\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}(\pi F_s t) \sum_n \frac{\cos[(\omega_0+\pi)n]}{F_s t-n} + \frac{A}{\pi}\cos\phi \operatorname{sen}(\pi F_s t) \sum_n \frac{\operatorname{sen}[(\omega_0+\pi)n]}{F_s t-n} \end{aligned}$$

De una tabla de series se encuentra que

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen} n\theta}{a-n} = -\frac{\pi \operatorname{sen} a(\pi-\theta)}{\operatorname{sen} a\pi}, \qquad \text{y} \qquad \sum_n \frac{\cos n\theta}{a-n} = \frac{\pi \cos a(\pi-\theta)}{\operatorname{sen} a\pi},$$

que valen para $0 < \theta < 2\pi$ (es decir, para $-\pi < \omega_0 < \pi$). Adoptando $a = t/T$ y $\theta = \pi + \omega_0$, $x_r(t)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \frac{A}{\pi}\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}(\pi t/T)\frac{\pi\cos[(t/T)(-\omega_0)]}{\operatorname{sen}(t/T\pi)} - \frac{A}{\pi}\cos\phi \operatorname{sen}(\pi t/T)\frac{\pi\operatorname{sen}[(t/T)(-\omega_0)]}{\operatorname{sen}(t/T\pi)} \\ &= A\operatorname{sen}\phi\cos(\omega_0 t/T) + TA\cos\phi\operatorname{sen}(\omega_0 t/T) \\ &= A\operatorname{sen}(\omega_0 F_s t + \phi), \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\omega_0 = 2\pi f_0/F_s$ resulta $F_s\omega_0 = 2\pi f_0$, de modo que

$$x_r(t) = A\operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \phi)$$

Este resultado, junto con las ecuaciones (5.31) y (5.33) prueban la igualdad (5.34).

Desarrollo en el dominio frecuencia

La demostración de la igualdad (5.34) en el dominio frecuencial es mucho más sencilla. La señal continua $x_c(t)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x_c(t) &= A\operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2j}\left(e^{j(2\pi f_0 t+\phi)} - e^{-j(2\pi f_0 t+\phi)}\right) \\ &= \frac{A}{2}\left(-je^{j(2\pi f_0 t+\phi)} + je^{-j(2\pi f_0 t+\phi)}\right) \end{aligned}$$

y su espectro $X_c(f)$ está dado por

$$X_c(f) = -j\frac{A}{2}e^{j\phi}\delta(f-f_0) + j\frac{A}{2}e^{-j\phi}\delta(f+f_0).$$

El espectro de la señal muestreada $X(e^{j\omega})$ está relacionado con $X_c(f)$ según

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c(f-kF_s)\big|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}},$$

y en este caso resulta

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k \left[-j\frac{A}{2}e^{j\phi}\delta(f-kF_s-f_0) + j\frac{A}{2}e^{-j\phi}\delta(f-kF_s+f_0)\right]\Bigg|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}. \tag{5.35}$$

Como

$$\delta(f-kF_s-f_0)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}} = \delta\left(\frac{\omega F_s}{2\pi}-kF_s-f_0\right) = \delta\left(\frac{F_s}{2\pi}\left[\omega-k2\pi-\frac{f_0}{F_s}2\pi\right]\right) = \frac{2\pi}{F_s}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k),$$

y teniendo en cuenta que $F_sT = 1$, la expresión (5.35) se puede escribir como

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\sum_k -j\frac{2\pi}{F_s}\frac{A}{2}e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + j\frac{2\pi}{F_s}\frac{A}{2}e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &= \sum_k -j\pi Ae^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + j\pi Ae^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k). \end{aligned}$$

Este es el espectro de una señal discreta $x[n] = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 n + \phi)$. Cuando esta señal se aplica al conversor C/D, se tiene que el espectro de la señal de salida $x_r(t)$ es

$$X_r(f) = H_r(f)X_s(f),$$

donde

$$X_s(f) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}.$$

Operando, se encuentra que

$$\begin{aligned} X_r(f) &= H_r(f)X_s(f) = H_r(f)\,X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} \\ &= H_r(f)\pi A\sum_k \left[-je^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + je^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right]\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \delta(\omega-\omega_0-2\pi k)|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} &= \delta\left(f\frac{2\pi}{F_s}-\omega_0-2\pi k\right) \\ &= \delta\left(\frac{2\pi}{F_s}\left[f-\omega_0\frac{F_s}{2\pi}-2\pi k\frac{F_s}{2\pi}\right]\right) = \frac{F_s}{2\pi}\delta\left(f-f_0-kF_s\right) \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} \hat{X}_c(f) &= H_r(f)\pi A\frac{F_s}{2\pi}\sum_k -je^{j\phi}\delta\left(f-f_0-kF_s\right) + je^{-j\phi}\delta\left(f+f_0-kF_s\right) \\ &= F_sT\left[-je^{-j\phi}\frac{A}{2}\delta\left(f-f_0\right) + je^{j\phi}\frac{A}{2}\delta\left(f+f_0\right)\right] \end{aligned}$$

y antitransformando,

$$x_r(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \phi)$$

que es idéntica a $x_c(t)$. El desarrollo en el dominio frecuencial es considerablemente más simple que la derivación en el dominio temporal efectuada más arriba.

La igualdad (5.34) vale únicamente si se cumplen las condiciones del teorema del muestreo, esto es cuando $f_0 < F_s/2$. Los siguientes ejemplos muestran que cuando se viola el Teorema la señal recuperada a partir de las muestras puede ser distinta de la señal continua original.

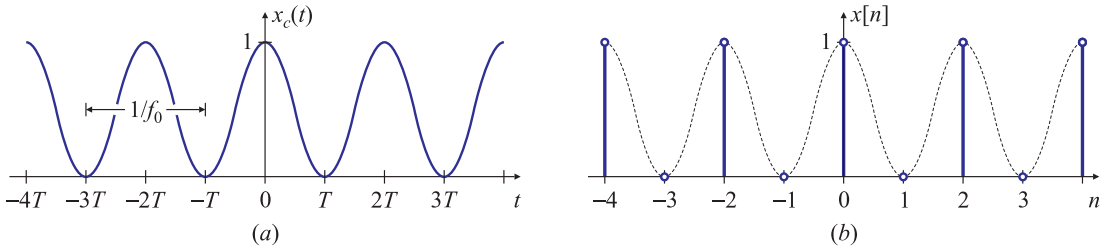


Fig. 5.25. Señal continua $x_c(t) = (1/2)+(1/2)\cos(2\pi f_0 t)$ (a) y señal discreta $x[n] = [1+(-1)^n]/2$ (b) que resulta de muestrear $x_c(t)$ al doble de la frecuencia máxima (a $F_s = f_0$ Hz).

EJEMPLO **5.7. Muestreo crítico de una señal coseno elevado ($f_s = 2f_0$): parte 1.**
La señal continua

$$x_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)$$

que se grafica en la Fig. 5.25(a) se muestrea exactamente al doble de la frecuencia de la señal, $F_s = 2f_0$, $T = 1/(2f_0)$ obteniéndose la señal discreta

$$x[n] = x_c(t)|_{t=nT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 Tn) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

es decir

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \tag{5.36}$$

como se muestra en la Fig. 5.25(b) . En este caso se dice que el muestreo es crítico porque frecuencias de muestreo menores (o períodos de muestreo mayores) violarían el criterio de Nyquist.

Para aplicar la identidad (5.34) se supone la señal $x[n]$ compuesta por dos tonos, uno de frecuencia $\omega_0 = 0$, amplitud $A_0 = 1/2$, y fase $\phi_0 = +\pi/2$, y otro de frecuencia $\omega_1 = \pi$, amplitud $A_1 = 1/2$ y fase $\phi_1 = +\pi/2$. Se tiene entonces que $x_r(t) = x_{r0}(t) + x_{r1}(t)$, donde

$$\begin{aligned} x_{r0}(t) &= A_0 \sum_n \text{sen}(\omega_0 n + \phi_0)\,\text{sinc}(F_s t - n) = A_0\,\text{sen}(\omega_0 F_s t + \phi_0) \\ &= \frac{1}{2}\,\text{sen}(0+\pi/2) = \frac{1}{2}, \\ x_{r1}(t) &= A_1 \sum_n \text{sen}(\omega_1 n + \phi_1)\,\text{sinc}(F_s t - n) = A_1\,\text{sen}(\omega_1 F_s t + \phi_1) \\ &= \frac{1}{2}\,\text{sen}(\pi 2 f_0 t + \pi/2) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t), \end{aligned}$$

de modo que la señal recuperada a la salida del conversor discreto/continuo es

$$x_r(t) = x_{r0}(t) + x_{r1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t),$$

que coincide con $x_c(t)$. □

En este caso, como el muestreo es exactamente el doble de la frecuencia de la señal, se podría dudar de la aplicación del la identidad (5.34). A continuación se reconstruye la señal continua directamente a partir de las muestras.

EJEMPLO **5.8. Muestreo crítico de una señal coseno elevado ($F_s = 2f_0$): parte 2.**
Como $x[n]$ en la ecuación (5.36) se anula en las muestras impares, es conveniente expresar la señal reconstruida (5.26) destacando los términos pares $n = 2\ell$ y los impares $n = 2\ell + 1$, es decir

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sum_\ell \underbrace{x[2\ell]}_{=1} \operatorname{sinc}\left(\frac{t-(2\ell)T}{T}\right) + \sum_\ell \underbrace{x[2\ell+1]}_{=0} \operatorname{sinc}\left(\frac{t-(2\ell+1)T}{T}\right) \\ &= \sum_\ell \operatorname{sinc}\left(F_s t - 2\ell\right). \end{aligned}$$

Para resolver la sumatoria se separan los términos correspondientes a $\ell = 0$, $\ell < 0$ y $\ell > 0$,

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \operatorname{sinc}\left(F_s t\right) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left[\operatorname{sinc}\left(F_s t - 2\ell\right) + \operatorname{sinc}\left(F_s t + 2\ell\right)\right] \\ &= \operatorname{sinc}\left(F_s t\right) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\pi F_s t - 2\pi\ell\right)}{\pi\left(F_s t - 2\ell\right)} + \frac{\operatorname{sen}\left(\pi F_s t + 2\pi\ell\right)}{\pi\left(F_s t + 2\ell\right)}\right]. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}\left(\pi F_s t \pm 2\pi\ell\right) = \operatorname{sen}(\pi F_s t)\underbrace{\cos(2\pi\ell)}_{=1} \pm \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi\ell)}_{=0}\cos(\pi F_s t) = \operatorname{sen}(\pi F_s t) \tag{5.38}$$

la ecuación (5.37) puede escribirse como

$$x_r(t) = \operatorname{sinc}\left(F_s t\right) + \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\pi F_s t\right) \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{F_s t - 2\ell} + \frac{1}{F_s t + 2\ell}\right). \tag{5.39}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{F_s t - 2\ell} + \frac{1}{F_s t + 2\ell}\right) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{F_s t - 2\ell + F_s t + 2\ell}{\left(F_s t - 2\ell\right)\left(F_s t + 2\ell\right)}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{2F_s t}{\left(F_s t\right)^2 - \left(2\ell\right)^2}\right) = \frac{F_s t}{2} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\left(F_s t/2\right)^2 - \ell^2}\right), \end{aligned} \tag{5.40}$$

la ecuación (5.39) se puede expresar como

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \operatorname{sinc}\left(F_s t\right) + \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(F_s t\right) \frac{F_s t}{2} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\left(F_s t/2\right)^2 - \ell^2}\right) \\ &= \operatorname{sinc}\left(F_s t\right) + \frac{\operatorname{sen}(\pi F_s t)}{\pi F_s t} \frac{1}{2} \left(F_s t\right)^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\left(F_s t/2\right)^2 - \ell^2}\right) \\ &= \operatorname{sinc}\left(F_s t\right) \left[1 + 2\left(F_s t/2\right)^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(F_s t/2\right)^2 - \ell^2}\right]. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Notando que

$$1 + 2a^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2 - \ell^2}\right) = \frac{\pi a}{\tan(\pi a)},$$

con $a = F_s t/2$, la ecuación (5.41) se puede escribir como

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \operatorname{sinc}\left(F_s t\right) \frac{\pi F_s t}{2} \frac{1}{\tan(\pi F_s t/2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(\pi F_s t)}{\pi F_s t} \pi f_s t \frac{\cos(\pi F_s t/2)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/2)} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi F_s t)\frac{\cos(\pi F_s t/2)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/2)}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

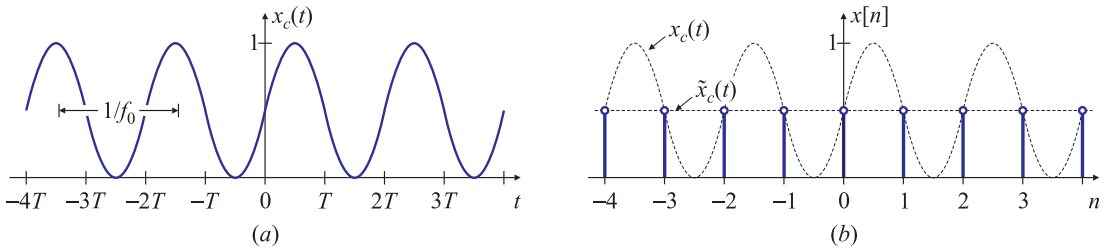


Fig. 5.26. Señal continua $x_c(t) = (1/2)+(1/2)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$ (a) y señal discreta $x[n] = 1/2$ (b) que resulta de muestrear $x_c(t)$ a $F_s = 2f_0$ Hz.

Aplicando la identidad trigonométrica

$$\mathrm{sen}\,(\pi t/T) = \mathrm{sen}(2\pi F_s t/2) = 2\,\mathrm{sen}(\pi F_s t/2)\cos(\pi F_s t/2), \tag{5.43}$$

se puede expresar (5.42) como

$$x_r(t) = \frac{1}{2}\,[2\,\mathrm{sen}(\pi F_s t/2)\cos(\pi F_s t/2)]\,\frac{\cos(\pi F_s t/2)}{\mathrm{sen}(\pi F_s t/2)} = \cos^2(\pi F_s t/2) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\,(\pi F_s t)\,. \tag{5.44}$$

Finalmente, recordando que $F_s = 2f_0$, la expresión (5.44) resulta

$$x_r(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t) \equiv x_c(t).$$

que es válida para todo $t \in \mathbb{R}$, y muestra que es posible recuperar exactamente la señal $x_c(t)$ a partir de sus muestras $x[n] = x_c(t)|_{t=nT}$. □

Aunque en estos ejemplo la seña recuperada coincide con la señal original, el muestreo a una frecuencia que sea *exactamente* el doble de la frecuencia máxima $(F_s = 2f_0)$ *no asegura* que la señal recuperada coincida con la original, como revela el siguiente Ejemplo.

EJEMPLO **5.9. Muestreo crítico de la señal del Ejemplo 5.7 desfasada un cuarto de ciclo**
La señal continua

$$x_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[2\pi f_0\left(t + \tfrac{T_0}{4}\right)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0 t + \tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2\pi f_0 t)$$

que se grafica en la Fig. 5.25(a), es esencialmente la misma señal del ejemplo anterior, desfasada en $T_0/4$. Si se muestrea al doble de la máxima frecuencia de la señal, $T = 1/(2f_0)$ se obtiene la señal discreta

$$x[n] = x_c(t)|_{t=nT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 T n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\pi n) = \frac{1}{2},$$

como se muestra en la Fig. 5.25(b).

Para aplicar la identidad (5.34) se supone la señal $x[n]$ compuesta por un tono de frecuencia $\omega_0 = 0$, amplitud $A_0 = 1/2$, y fase $\phi_0 = 0$, de donde resulta

$$x_r(t) = A_0 \sum_n \mathrm{sen}(\omega_0 n)\,\mathrm{sinc}(F_s t - n) = A_0\,\mathrm{sen}(\omega_0 F_s t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(0) = \frac{1}{2},$$

que *no* coincide con $x_c(t)$.

Nuevamente, como la frecuencia de muestreo es exactamente el doble de la frecuencia de la señal (muestreo crítico), el teorema del muestreo no es aplicable. Para verificar estos resultados se calcula la señal de salida del conversor D/C a partir de las muestras $x[n] = 1/2$. En este caso la señal recuperada se puede escribir como

$$x_r(t) = \frac{1}{2}\sum_n \text{sinc}\,(F_s t - n)$$

y separando los términos correspondientes a $n = 0$, $n > 0$, y $n < 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \frac{1}{2}\,\text{sinc}\,(F_s t) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\text{sinc}\,(F_s t - n) + \text{sinc}\,(F_s t + n)\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\text{sinc}\,(F_s t) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\text{sen}\,(\pi F_s t - \pi n)}{\pi\,(F_s t - n)} + \frac{\text{sen}\,(\pi F_s t + \pi n)}{\pi\,(F_s t + n)}\right]. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Teniendo en cuenta que

$$\text{sen}\,(\pi F_s t \pm \pi n) = \text{sen}(\pi F_s t)\underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^k} \pm \underbrace{\text{sen}(\pi n)}_{=0}\cos(\pi F_s t) = (-1)^k\,\text{sen}(\pi F_s t)$$

la ecuación (5.45) puede escribirse como

$$x_r(t) = \text{sinc}\,(F_s t) + \frac{1}{\pi}\,\text{sen}\,(\pi F_s t)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{F_s t - n} + \frac{1}{F_s t + n}\right). \tag{5.46}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{F_s t - n} + \frac{1}{F_s t + n}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{F_s t - n + F_s t + n}{(F_s t - n)\,(F_s t + n)}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{2F_s t}{(F_s t)^2 - n^2}\right) = 2F_s t\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(F_s t)^2 - n^2}\right), \end{aligned}$$

la ecuación (5.46) se puede expresar como

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \frac{1}{2}\,\text{sinc}\,(F_s t) + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\,\text{sen}\,(\pi F_s t)\,2F_s t\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(F_s t)^2 - n^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\text{sinc}\,(F_s t) + \frac{(F_s t)\,\text{sen}(\pi F_s t)}{\pi(F_s t)}F_s t\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(F_s t)^2 - n^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\text{sinc}\,(F_s t)\left[1 + 2(F_s t)^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(F_s t)^2 - n^2}\right]. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Notando que

$$1 + 2a^2\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^k}{a^2 - \ell^2}\right] = \frac{\pi a}{\text{sen}(\pi a)},$$

con $a = F_s t$, la ecuación (5.47) se puede escribir como

$$x_r(t) = \frac{1}{2}\,\text{sinc}\,(F_s t)\,\frac{\pi F_s t}{\text{sen}(\pi F_s t)} = \frac{1}{2}.$$

En este caso, la señal recuperada $x_r(t)$ es distinta a la señal original $x_c(t)$; de hecho, las muestras de la señal $x_c(t)$ coinciden con las muestras de la señal continua $\tilde{x}_c(t) = 1/2$, como se observa en la Fig. 5.26(b). □

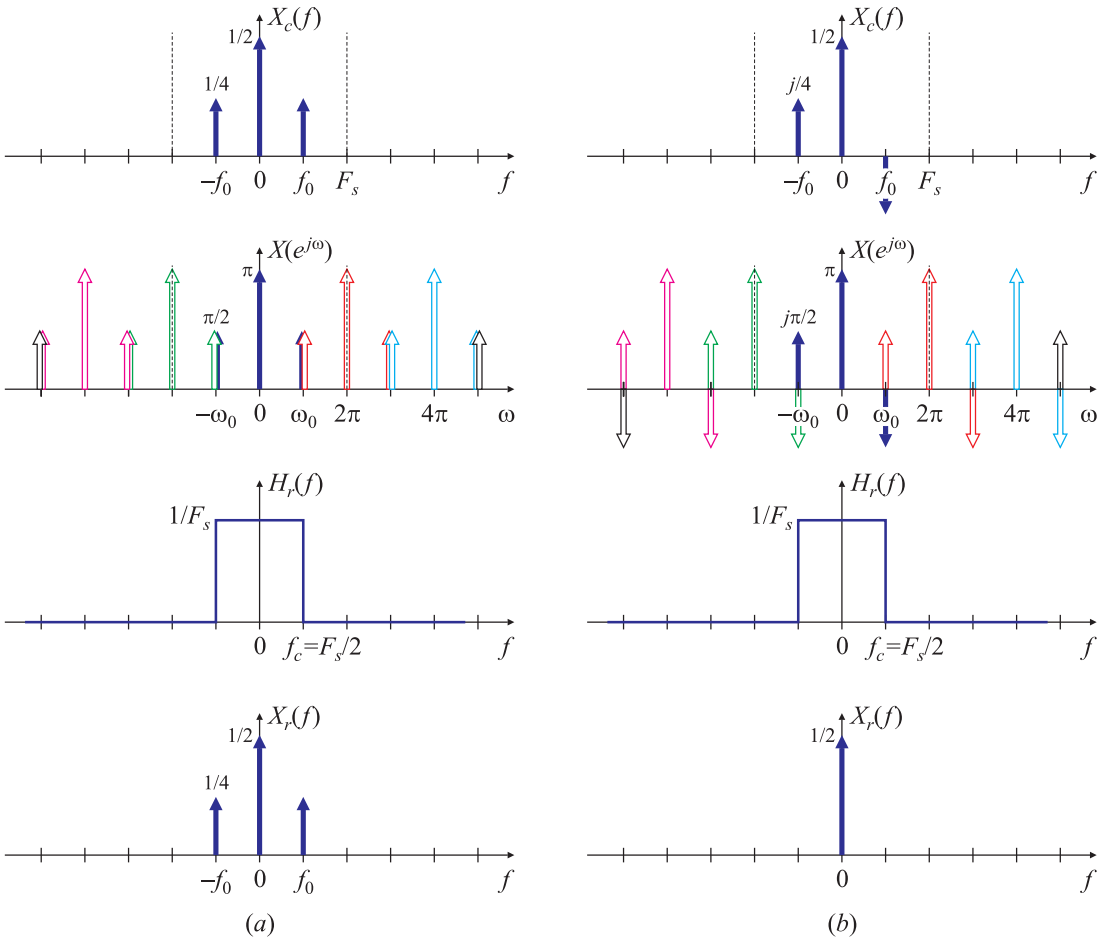


Fig. 5.27. Espectros de las señales del Ejemplo 5.7 (a) y del Ejemplo 5.9 (b) para $F_s = 2f_0$.

Los Ejemplos 5.7 y 5.9 muestran que si la frecuencia de muestreo es exactamente el doble de la máxima frecuencia de la señal, la recuperación exacta parece depender de la *fase* entre la señal continua y el tren de impulsos del muestreo.

Estos ejemplos pueden interpretarse de forma más sencilla en el dominio transformado. La Fig. 5.27(a) muestra los espectros de las distintas señales del Ejemplo 5.7. El espectro de la señal $x_c(t) = (1 + \cos 2\pi f_0 t)/2$ es

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f + f_0) + \frac{1}{4}\delta(f - f_0).$$

De particular interés es el espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal discreta $x[n]$. Como la señal continua $x_c(t)$ de frecuencia máxima f_0 se muestrea a $F_s = 2f_0$, la señal discreta tiene una componente de frecuencia $\omega_0 = 2\pi f_0/F_s = \pi$. De manera que el espectro está dado por

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_k \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{\pi}{2} \sum_k \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k),$$

donde la primera sumatoria corresponde a la componente de continua de $x_c(t)$ y la segunda a la señal $(1/2)\cos\omega_0 n = (1/2)\cos\pi n$. La periodicidad inherente de $X(e^{j\omega})$ hace que las réplicas $\omega_0 - 2\pi k = \pi - 2k\pi$ se solapen con las réplicas $-\omega_0 - 2\pi k = -\pi - 2k\pi$.

Para evitar problemas en la reconstrucción, es conveniente considerar que la frecuencia de la señal es $\omega_0 - \varepsilon = \pi - \varepsilon$, con $\varepsilon \to 0$, de modo que el espectro resulta

$$X_\varepsilon(e^{j\omega}) = \pi \sum_k \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{\pi}{2} \sum_k \delta(\omega + (\omega_0 - \varepsilon) - 2\pi k) + \delta(\omega - (\omega_0 - \varepsilon) - 2\pi k)$$

y las réplicas no se solapan exactamente, como sugiere el gráfico de $X(e^{j\omega})$ en la Fig. 5.27(a). Finalmente, el filtro reconstructor ideal permite recuperar (con $\varepsilon \to 0$) una señal $x_r(t)$ idéntica a la original $x_c(t)$.

El análisis espectral para el Ejemplo 5.9 se ilustra en la Fig. 5.27(b). En este caso, el espectro $X(f)$ tiene componentes complejas debidos al sen $2\pi f_0 t$, y puede escribirse como

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{j}{4}\delta(f + f_0) - \frac{j}{4}\delta(f - f_0).$$

El espectro discreto está formado por las réplicas cada 2π de los impulsos $\pi\delta(\omega)$ correspondientes a la señal de continua, y por las réplicas cada 2π de los impulsos $(j\pi/2)\delta(\omega + \omega_0)$ y $(-j\pi/2)\delta(\omega - \omega_0)$ con $\omega_0 = 2\pi f_0/f_s = \pi$:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_k \delta(\omega - 2\pi k) + j\frac{\pi}{2} \sum_k \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) - \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k).$$

Como $\omega_0 = \pi$ las réplicas complejas se cancelan entre sí, como sugiere el gráfico de $X(e^{j\omega})$ de la Fig. 5.27(b). Por lo tanto, el espectro $X_r(f)$ de la señal reconstruida está formado por un único impulso de amplitud $1/2$ ubicado en $f = 0$, que corresponde a una señal continua $x_r(t) = 1/2$.

La señal continua en estos dos ejemplos es casi la misma: la diferencia es un desfasaje de $T_0/4$ segundos entre ambas. Sin embargo, las señales recuperadas son totalmente distintas. Para evitar estos problemas la frecuencia de muestreo debe ser *mayor* al doble de la frecuencia máxima de la señal.

Los ejemplos siguientes muestran que bajo esta condición la diferencia de fase no es un inconveniente para asegurar la recuperación exacta. Aunque en estos casos se puede aplicar directamente la interpretación temporal de la Sección 5.8.1, se reconstruyen las señales de salida del conversor D/C paso a paso para enfatizar las ventajas del cálculo en el dominio frecuencia.

EJEMPLO **5.10. Muestreo de la señal del Ejemplo 5.7 a** $F_s = 4f_0$.
La señal continua del Ejemplo 5.7

$$x_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t) \tag{5.48}$$

que se grafica en la Fig. 5.28(a) se muestrea ahora cada $T = 1/(4f_0)$ obteniéndose la señal discreta

$$x[n] = x_c(t)|_{t=nT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 T n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

es decir

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, 4, 8, ..., 4\ell, \\ 1/2, & \text{si } n \text{ es impar, } n = 2\ell + 1, \\ 0, & \text{si } n = 2, 6, 10, ..., 4\ell + 2, \end{cases}$$

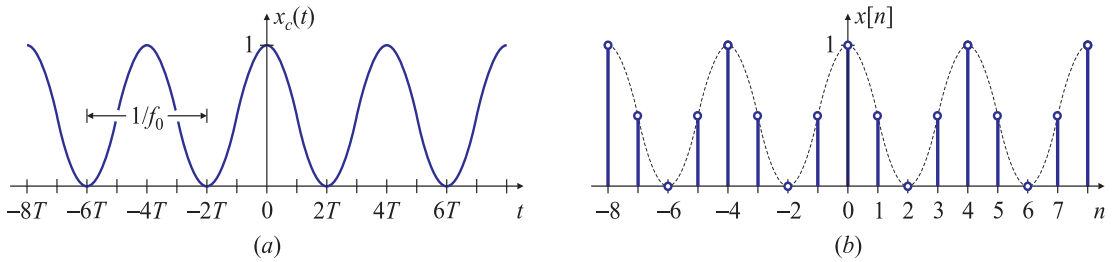


Fig. 5.28. Señal continua $x_c(t) = (1/2)+(1/2)\cos(2\pi f_0 t)$ (a) y señal discreta $x[n]$ (b)que resulta de muestrear $x_c(t)$ a $F_s = 4f_0$ Hz.

como se muestra en la Fig. 5.28(b).

La señal reconstruida (5.26) se puede escribir como

$$x_r(t) = \sum_{\ell} \left\{ \underbrace{x[4\ell]}_{=1} \operatorname{sinc}(f_s t - 4\ell) + \underbrace{x[4\ell+2]}_{=0} \operatorname{sinc}[F_s t - (4\ell+2)] + \underbrace{x[2\ell+1]}_{=1/2} \operatorname{sinc}[F_s t - (2\ell+1)] \right\}$$

y separando las muestras correspondientes a $\ell = 0$, $\ell > 0$ y $\ell < 0$ en cada uno de los dos sumandos remanentes, se tiene que

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \operatorname{sinc}(F_s t) + \sum_{\ell=1}^{\infty} [\operatorname{sinc}(F_s t - 4\ell) + \operatorname{sinc}(F_s t + 4\ell)] + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \{\operatorname{sinc}[F_s t - (2\ell+1)] + \operatorname{sinc}[F_s t + (2\ell+1)]\} \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \operatorname{sinc}(F_s t) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}\pi(F_s t - 4\ell)}{\pi(F_s t - 4\ell)} + \frac{\operatorname{sen}\pi(F_s t + 4\ell)}{\pi(F_s t + 4\ell)} \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}\pi(F_s t - 2\ell - 1)}{\pi(F_s t - 2\ell - 1)} + \frac{\operatorname{sen}\pi(F_s t + 2\ell + 1)}{\pi(F_s t + 2\ell + 1)} \right]. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\pi(F_s t \pm 4\ell) &= \operatorname{sen}\pi F_s t \underbrace{\cos 4\ell\pi}_{=1} \pm \cos\pi F_s t \underbrace{\operatorname{sen} 4\ell\pi}_{=0} = \operatorname{sen}\pi F_s t, \\ \operatorname{sen}\pi[F_s t \pm (2\ell+1)] &= \operatorname{sen}\pi F_s t \underbrace{\cos(2\ell+1)\pi}_{=-1} \pm \cos\pi F_s t \underbrace{\operatorname{sen}(2\ell+1)\pi}_{=0} = -\operatorname{sen}\pi F_s t, \end{aligned} \tag{5.50}$$

y además

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_s t - 4\ell} + \frac{1}{F_s t + 4\ell} &= \frac{F_s t}{8} \frac{1}{(F_s t/4)^2 - \ell^2} \\ \frac{1}{F_s t - 2\ell - 1} + \frac{1}{F_s t + 2\ell + 1} &= 2F_s t \frac{1}{(F_s t)^2 - (2\ell+1)^2} \end{aligned}$$

la expresión (5.49) se puede escribir como

$$x_r(t) = \operatorname{sinc}(F_s t) + \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi F_s t)\left[\frac{F_s t}{8}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(F_s t/4)^2-\ell^2} - \frac{1}{2}2F_s t\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(F_s t)^2-(2\ell+1)^2}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\pi F_s t)}{\pi F_s t}\left[1+2\left(\frac{F_s t}{4}\right)^2\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(F_s t/4)^2-\ell^2} - (F_s t)^2\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(F_s t)^2-(2\ell+1)^2}\right]. \qquad (5.51)$$

Como además

$$2a^2\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-\ell^2} = -1+\frac{\pi a}{\tan \pi a}, \qquad b^2\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{b^2-(2\ell+1)^2} = -\frac{b\pi}{4}\tan\frac{\pi b}{2},$$

con $a = F_s t/4$, $b = F_s t$, la ecuación (5.51) resulta

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \frac{\operatorname{sen}(\pi F_s t)}{\pi F_s t} f\left(1-1+\frac{\pi F_s t/4}{\tan(\pi F_s t/4)}+\frac{\pi F_s t}{4}\tan\frac{\pi F_s t}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(\pi F_s t)\left(\frac{\cos(\pi F_s t/4)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)}+\frac{\operatorname{sen}(\pi F_s t/2)}{\cos(\pi F_s t/2)}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(\pi F_s t)\,\frac{\cos(\pi F_s t/4)\cos(\pi F_s t/2)+\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)\operatorname{sen}(\pi F_s t/2)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)\cos(\pi F_s t/2)} \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(\pi F_s t)\,\frac{\cos(\pi F_s t/4)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)\cos(\pi F_s t/2)}. \end{aligned} \qquad (5.52)$$

Finalmente, utilizando la igualdad (5.43), y notando que

$$\operatorname{sen}(\pi F_s t/2) = \operatorname{sen}(2\pi F_s t/4) = 2\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)\cos(\pi F_s t/4) \qquad (5.53)$$

resulta, reemplazando (5.43) y (5.53) en (5.52), que

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \frac{1}{4}\left(2\operatorname{sen}(\pi F_s t/2)\cos(\pi F_s t/2)\right)\frac{\cos(\pi F_s t/4)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)\cos(\pi F_s t/2)} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi F_s t/2)\frac{\cos(\pi F_s t/4)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)} = \frac{1}{2}\left[2\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)\cos(\pi F_s t/4)\right]\frac{\cos(\pi F_s t/4)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)} \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi F_s t}{4}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi F_s t}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $F_s = 4f_0$, se encuentra que

$$x_r(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t) = x_c(t),$$

que indica que la señal reconstruida $x_r(t)$ coincide con la señal continua original (5.48) para todo $t \in \mathbb{R}$. □

EJEMPLO **5.11. Muestreo de la señal del Ejemplo 5.9 a** $F_s = 4f_0$.
La señal continua del Ejemplo 5.9

$$x_c(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \qquad (5.54)$$

que se grafica en la Fig. 5.29(a) se muestrea cada $T = 1/(4f_0)$ obteniéndose la señal discreta

$$x[n] = x_c(t)|_{t=nT} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi f_0 T n) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}n)$$

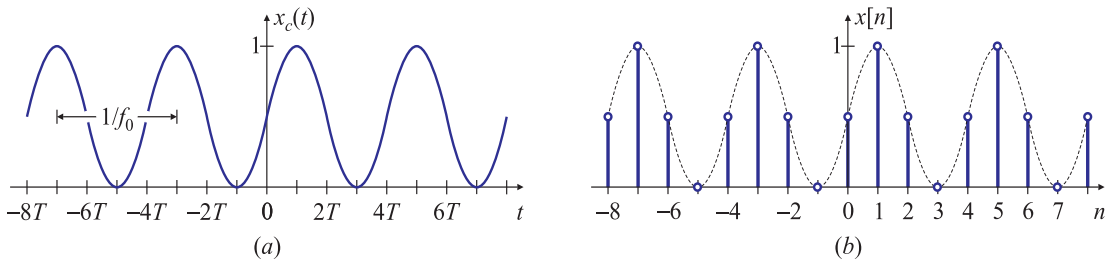


Fig. 5.29. Señal continua $x_c(t) = (1/2)+(1/2)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$ (a) y señal discreta $x[n]$ (b) que resulta de muestrear $x_c(t)$ a $F_s = 4f_0$ Hz.

es decir

$$x[n] = \begin{cases} 1/2, & \text{si } n \text{ es par, } n = 2\ell, \\ 1, & \text{si } n = -3,1,5,9,\ldots, \; n = 4\ell+1, \\ 0 & \text{si } n = -1,3,7,11,\ldots, \; n = 4\ell+3, \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. 5.29(b).

La señal reconstruida (5.26) se puede escribir como

$$x_r(t) = \sum_{\ell} \left\{ \underbrace{x[2\ell]}_{=1/2} \mathrm{sinc}\,(F_s t - 2\ell) + \underbrace{x[4\ell+1]}_{=1} \mathrm{sinc}[F_s t - (4\ell+1)] \right\}.$$

Escribiendo $\mathrm{sinc}\,(x)$ como $\mathrm{sen}(\pi x)/(\pi x)$, y separando las muestras correspondientes a $\ell = 0$, $\ell > 0$ y $\ell < 0$ en cada uno de los dos sumandos remanentes, se tiene que

$$\begin{aligned} x_r(t) \;=\; & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}(\pi F_s t)}{(\pi F_s t)} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{sen}\,\pi\,(F_s t - 2\ell)}{\pi\,(F_s t - 2\ell)} + \frac{\mathrm{sen}\,\pi\,(F_s t + 2\ell)}{\pi\,(F_s t + 2\ell)}\right] + \\ & \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\pi\,[F_s t - (4\ell+1)]}{\pi\,[F_s t - (4\ell+1)]} + \sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\pi\,[F_s t - (-4\ell+1)]}{\pi\,[F_s t - (-4\ell+1)]}. \end{aligned} \tag{5.55}$$

La sumatoria de los términos de la forma $\mathrm{sinc}[F_s t - (4\ell+1)]$ debe tratarse con cuidado. El último término corresponde a los índices de $x[n]$ para $n < 0$, y cuando ℓ varía entre 1 y $+\infty$ el índice $(-4\ell+1)$ recorre -3, -7, -11,... [Fig. 5.29(b)]. Por otra parte, el anteúltimo término recorre los índices positivos: para $0 \le \ell < \infty$, $(4\ell+1)$ varía entre 1, 5, 9,.... Para uniformizar los límites de las sumatorias, es conveniente escribir

$$\begin{aligned} x_r(t) \;=\; & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}(\pi F_s t)}{(\pi F_s t)} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{sen}\,\pi\,(F_s t - 2\ell)}{\pi\,(F_s t - 2\ell)} + \frac{\mathrm{sen}\,\pi\,(F_s t + 2\ell)}{\pi\,(F_s t + 2\ell)}\right] + \\ & \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left\{\frac{\mathrm{sen}\,\pi\,[F_s t - (4\ell+1)]}{\pi\,[F_s t - (4\ell+1)]} + \frac{\mathrm{sen}\,\pi\,[F_s t - (-4\ell+1)]}{\pi\,[F_s t - (-4\ell+1)]}\right\} + \frac{\mathrm{sen}[\pi(F_s t - 1)]}{\pi(F_s t - 1)}, \end{aligned} \tag{5.56}$$

donde el último término de (5.56) corresponde al caso $\ell = 0$ de la anteúltima sumatoria de (5.55). De manera que, teniendo en cuenta (5.38) y el equivalente a (5.53) la ecuación (5.55) puede escribirse

$$\begin{aligned} x_r(t) \;=\; & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}(\pi F_s t)}{(\pi F_s t)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\pi F_s t)\frac{1}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_s t - 2\ell} + \frac{1}{F_s t + 2\ell}\right) - \\ & \mathrm{sen}(\pi F_s t)\frac{1}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_s t - 4\ell - 1} + \frac{1}{F_s t + 4\ell - 1}\right) - \frac{\mathrm{sen}(\pi F_s t)}{\pi(F_s t - 1)}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Observando que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{1}{F_s t-2\ell}+\frac{1}{F_s t+2\ell}\right] &= -\frac{1}{\pi F_s t}+\frac{1/2}{\tan(\pi F_s t/2)},\\ \frac{1}{\pi}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{F_s t-4\ell-1}+\frac{1}{F_s t+4\ell-1}\right] &= \frac{1}{4}-\frac{1}{\pi(F_s t-1)}-\frac{1/2}{1-\tan(\pi F_s t/4)},\end{aligned}$$

la ecuación (5.57) se puede escribir como

$$\begin{aligned}x_r(t) &= \operatorname{sen}(\pi F_s t)\left[\frac{1}{2\pi F_s t}-\frac{1}{2\pi F_s t}+\frac{1/4}{\tan(\pi F_s t/2)}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi(F_s t-1)}+\frac{1/2}{1-\tan(\pi F_s t/4)}-\frac{1}{\pi(F_s t-1)}\right].\end{aligned}$$

Simplificando términos se tiene que

$$\begin{aligned}x_r(t) &= \operatorname{sen}(\pi F_s t)\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\tan(\pi F_s t/2)}+\frac{1/2}{1-\tan(\pi F_s t/4)}\right]\\ &= \operatorname{sen}(\pi F_s t)\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{\cos(\pi F_s t/2)}{\operatorname{sen}(\pi F_s t/2)}+\frac{1}{2}\frac{\cos(\pi F_s t/4)}{\cos(\pi F_s t/4)-\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)}\right]\\ &= \operatorname{sen}(\pi F_s t)\frac{1}{4\operatorname{sen}(\pi F_s t/2)}\left[\frac{\cos(\pi F_s t/4)+\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)}{\cos(\pi F_s t/4)-\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)}\right].\end{aligned}$$

Aplicando la identidad trigonométrica (5.43),

$$x_r(t)=\tfrac{1}{4}\cos(\pi F_s t/2)\left[\frac{\cos(\pi F_s t/4)+\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)}{\cos(\pi F_s t/4)-\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)}\right],$$

y como $\cos\alpha=[\cos(\alpha/2)]^2-[\operatorname{sen}(\alpha/2)]^2=[\cos(\alpha/2)+\operatorname{sen}(\alpha/2)][\cos(\alpha/2)-\operatorname{sen}(\alpha/2)]$ resulta

$$\begin{aligned}x_r(t) &= \tfrac{1}{2}\left[(\pi F_s t/4)+\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)\right]^2\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(\pi F_s t/4)^2+\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)^2+2\cos(\pi F_s t/4)\operatorname{sen}(\pi F_s t/4)\right]\\ &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi F_s t/2),\end{aligned}$$

usando en el último paso la identidad (5.43). Recordando finalmente que $F_s=4f_0$, se obtiene

$$x_r(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$$

que es válida para todo $t\in\mathbb{R}$. Nuevamente, la señal recuperada $x_r(t)$ coincide exactamente con la señal original $x_c(t)$ dada por la ecuación (5.54). □

Contrariamente a lo que sucede en los Ejemplos 5.7 y 5.9, en los Ejemplos 5.10 y 5.11 se recupera *exactamente* la señal original, independientemente de cuál sea la relación de fases entre ella y el tren de impulsos de muestreo. La diferencia entre ambos pares de ejemplos es que en los dos primeros la frecuencia de muestreo $F_s=1/T$ es justo el doble de la frecuencia máxima de la señal (caso límite del teorema de Nyquist), mientras que en los dos últimos es superior ($F_s=4f_0$).

La interpretación en el dominio transformado de los Ejemplos 5.10 y 5.11 se ilustra en la Fig. 5.30(a) y (b), respectivamente. La frecuencia de la señal discreta es $\omega_0=2\pi f_0/F_s=$

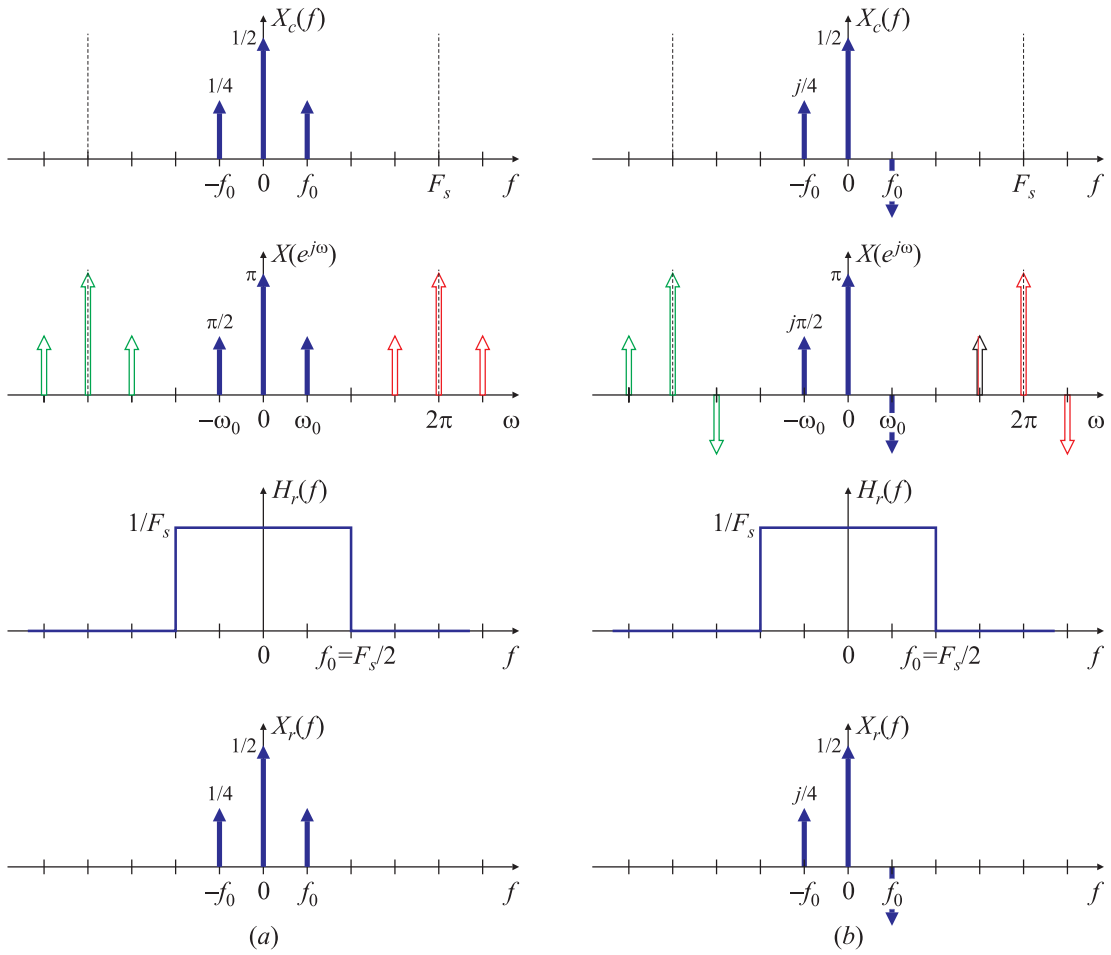


Fig. 5.30. Espectros de las señales de los Ejemplos 5.10 (a) y 5.11 (b) para $F_s = 4f_0$.

$\pi/2$, y por lo tanto las réplicas que forman el espectro $X(e^{j\omega})$ no se solapan; en cualquiera de los casos, la señal $x_r(t)$ recuperada con un filtro reconstructor ideal coincide con la señal continua original $x_c(t)$.

Los Ejemplos 5.7 y 5.9 muestran que la violación del teorema del muestreo hace que la cascada conversor C/D-conversor D/C no sólo sea *variante al desplazamiento*, sino que también *pierda la linealidad*: en el Ejemplo 5.9 la entrada es una señal de frecuencia f_0, pero la salida es una señal de continua (de frecuencia nula). Estos temas se tratan con más detalle en la siguiente sección.

5.9. Procesamiento discreto de señales de tiempo continuo

Una de las aplicaciones más importantes de los sistemas discretos es el procesamiento de señales de tiempo continuo. Esto se puede hacer usando un sistema como el que se muestra en el diagrama bloque de la Fig. 5.31, compuesto por la cascada de un conversor continuo a discreto (C/D), un sistema discreto, y un conversor discreto a continuo (D/C).

El esquema de la Fig. 5.31 representa una clase grande de sistemas porque la frecuen-

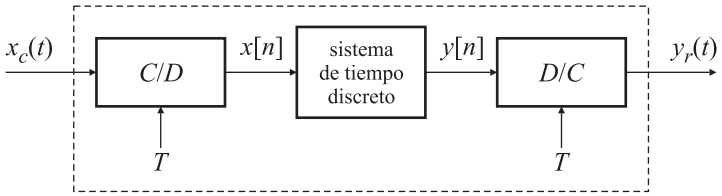


Fig. 5.31. Sistema para procesamiento discreto de señales continuas.

cia de muestreo y el sistema discreto pueden elegirse a voluntad. El sistema completo es equivalente a un sistema de tiempo continuo ya que transforma la señal de tiempo continuo $x_c(t)$ en la salida de tiempo continuo $y_r(t)$. Sin embargo, las propiedadesl del sistema dependen de la elección del sistema discreto y del período de muestreo. Por el momento, se supondrá que el conversor C/D y el conversor D/C de la Fig. 5.31 tienen la misma frecuencia de muestreo; este requisito no es esencial, y en algunas secciones posteriores se considerarán sistemas donde el tiempo de muestreo de las señales de entrada y de salida no sea el mismo

En las Secciones 5.2 y 5.7 se han detallado los modelos de los conversores C/D y D/C, respectivamente. Por conveniencia, y como primer paso para comprender el funcionamiento del sistema completo, se resumen las representaciones matemáticas de estas operaciones.

A partir de una señal continua $x_c(t)$, el conversor C/D produce una señal discreta

$$x[n] = x_c(nT), \tag{5.58}$$

tomando muestras cada $T = 1/F_s$ de $x_c(t)$. La transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de la sucesión $x[n]$ y la transformada de Fourier de la señal continua $x_c(t)$ están relacionadas por

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c(f - kF_s)\big|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}. \tag{5.59}$$

El conversor D/C produce una salida de tiempo continuo de la forma

$$y_r(t) = \sum_n y[n]\,\mathrm{sinc}[(t - nT)/T], \tag{5.60}$$

donde la sucesión $y[n]$ es la salida del sistema de tiempo discreto cuando la entrada es la sucesión $x[n]$. De la ecuación (5.30), la transformada de Fourier $Y_r(f)$ de la señal de tiempo continuo $y_r(t)$ y la transformada de Fourier $Y(e^{j\omega})$ de la sucesión $y[n]$ están relacionadas por

$$Y_r(f) = H_r(f)Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} = \begin{cases} TY(e^{j\omega})\big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}, & \text{si } |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{5.61}$$

La relación entre $y[n]$ y $x[n]$, o entre $Y(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$ depende de la naturaleza del sistema discreto. El caso más sencillo es cuando el sistema discreto es la identidad, es decir $y[n] = x[n]$, que se ha analizado detalladamente en la Sección 5.7. Se ha estudiado que si $x_c(t)$ es una señal limitada en banda tal que su transformada de Fourier $X_c(f) = 0$ para $|f| > F_s/2$, y si el sistema de tiempo discreto en la Fig. 5.31 es el sistema identidad tal que

$y[n] = x[n] = x_c(nT)$, entonces la salida será $y_r(t) = x_c(t)$. Para obtener este resultado, se utilizó la representación frecuencial de las señales de tiempo continuo y de tiempo discreto, ya que la idea de distorsión por solapamiento (*aliasing*) se entiende más fácilmente en el dominio frecuencial. Cuando el sistema discreto en el esquema de la Fig. 5.31 es más complicado que el sistema identidad, es habitual realizar el análisis también en el dominio frecuencia.

Si el sistema de tiempo discreto es no lineal, o variante en el tiempo, en general no es sencillo encontrar una relación entre las transformadas de Fourier de las señales de entrada y salida del sistema de la Fig. 5.31. Sin embargo, se puede obtener un resultado simple y muy útil cuando el sistema discreto es lineal e invariante en el tiempo.

5.9.1. Sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo

Si el sistema discreto en el esquema de la Fig. 5.31 es lineal e invariante en el tiempo, la relación entre las transformadas de Fourier $Y(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$ de la salida $y[n]$ y de la entrada $x[n]$ es

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \tag{5.62}$$

donde $H(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia del sistema discreto (la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva $h[n]$). Combinando las ecuaciones (5.61) y (5.62) se encuentra que

$$Y_r(f) = H_r(f)\ H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}},$$

y usando (5.59),

$$Y_r(f) = H_r(f)\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} \frac{1}{T}\sum_k X_c(f - kF_s) \tag{5.63}$$

Como $X_c(f) = 0$ para $|f| > F_s/2$, entonces el filtro reconstructor $H_r(f)$ cancela el factor $1/T$ y selecciona en la sumatiora de la ecuación (5.63) el término que corresponde a $k = 0$, es decir

$$Y_r(f) = \begin{cases} H(e^{j\omega})\big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}\ X_c(f), & \text{si } |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto, si $X_c(f)$ está limitada en banda y si la frecuencia de muestreo es tal que se cumplen las condiciones del teorema del muestreo, la salida y la entrada del sistema discreto de procesamiento de señales continuas de la Fig. 5.31 quedan relacionadas según

$$Y_r(f) = H_e(f)X_c(f),$$

donde $H_e(f)$ está dada por

$$H_e(f) = \begin{cases} H(e^{j\omega})\big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}, & \text{si } |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{5.64}$$

Estas ecuaciones indican que el sistema de la Fig. 5.31 se comporta como un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta en frecuencia efectiva es la de la ecuación (5.64).

La linealidad y la invariancia en el tiempo del sistema completo mostrado en la Fig. 5.31 depende de dos factores:

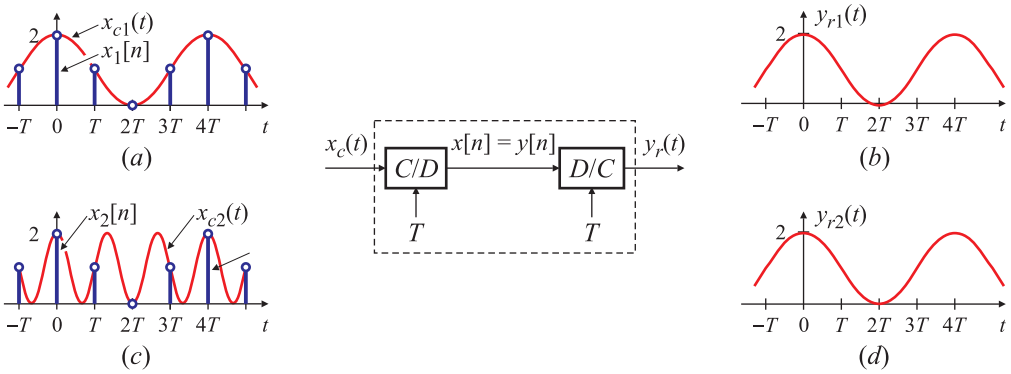


Fig. 5.32. Falla de la propiedad de linealidad en un sistema discreto de procesamiento de datos continuo si no se cumple el teorema de Nyquist.

- el sistema de tiempo discreto debe ser lineal e invariante en el tiempo;
- la señal de entrada debe ser de banda limitada, y la frecuencia de muestreo debe ser suficientemente alta de manera que no se produzca aliasing.

Si alguna de estas condiciones no se cumple, el sistema de la Fig. 5.31 no se comporta como un sistema lineal e invariante en el tiempo, como se muestra en los siguientes ejemplos. En el primero se analiza qué ocurre cuando la señal de entrada es de banda limitada, pero no se satisface la condición del teorema del muestreo referida a la relación entre la máxima frecuencia de la señal y la frecuencia de muestreo.

EJEMPLO **5.12. Falla de linealidad si la entrada es de banda limitada, pero viola el teorema del muestreo**

La Fig. 5.32 muestra un sistema discreto de procesamiento de datos continuo en el que el sistema discreto de la Fig. 5.31 es el sistema identidad, por lo que $y[n] = x[n]$. Si la señal de entrada es $x_{c1}(t) = 1 + \cos(2\pi f_1 t)$, como se muestra en la Fig. 5.32(a) y la frecuencia de muestreo es $F_s = 1/T > 2f_1$ (en este caso $F_s = 4f_1$) se satisfacen las condiciones del teorema del muestreo. La señal discreta es

$$x_1[n] = x_{c1}(nT) = 1 + \cos(\pi n/2).$$

De acuerdo a lo comentado más arriba, la salida del sistema completo será igual a la entrada, es decir, $y_{r1}(t) = x_{c1}(t)$ como se muestra en la Fig. 5.32(b).

Si se cambia la frecuencia de la señal de entrada a $f_2 = 3f_1$, manteniendo la misma frecuencia de muestreo $F_s = 4f_1$, como se muestra en Fig. 5.32(c), ya no se cumple el criferio de Nyquist pues $F_s = (4/3)f_2 \not> 2f_2$. En este caso la señal continua de entrada es $x_{c2}(t) = 1 + \cos(2\pi f_2 t) = 1 + \cos[2\pi(3f_1)t]$, y la señal discreta resulta

$$x_2[n] = x_{c2}(nT) = 1 + \cos(3\pi n/2) = 1 + \cos(\pi n + \pi n/2) = 1 + \cos(\pi n/2) = x_1[n].$$

Como la señal discreta es la misma que para la señal anterior, la salida del sistema será $y_{r2}(t) = y_{r1}(t) = x_{c1}(t)$, como se indica en la Fig. 5.32(d).

Sintetizando,

- si la entrada es $x_{c1}(t) = 1 + \cos(2\pi f_1 t)$ la salida es $y_{r1}(t) = 1 + \cos(2\pi f_1 t)$;
- si la entrada es $x_{c2}(t) = 1 + \cos(2\pi f_2 t)$, con $f_2 = 3f_1$, la salida es $y_{r1}(t) = 1 + \cos(2\pi f_1 t)$.

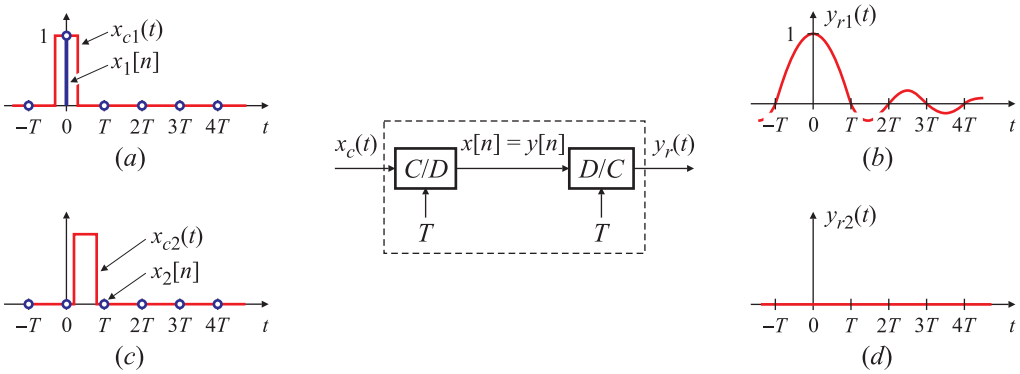


Fig. 5.33. Falla de la invariación temporal si la señal de entrada no es de banda limitada.

Esto prueba que el sistema *no es lineal*, pues en un sistema lineal, una entrada del tipo

$$x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

produce una salida

$$y_r(t) = A\,|H_e(f)||_{f=f_0}\cos(2\pi f_0 t + \phi_0),$$

donde $\phi_0 = \arg(H_e(f)|_{f=f_0})$. Es decir, la salida es una versión escalada y desfasada de la entrada, *pero de la misma frecuencia*. Si la frecuencia de la señal de entrada y la frecuencia de muestreo no cumplen con las condiciones del teorema del muestreo, las componentes frecuenciales de la señal de salida son distintas a las componentes frecuenciales de la señal de entrada, como indican los cálculos anteriores y se representa en la Fig. 5.32 s. Por lo tanto, el sistema dicreto de procesamiento de señales continuas no se comporta como un sistema lineal. □

En el siguiente ejemplo se explora lo que ocurre cuando la entrada al sistema discreto de procesamiento de datos continuos de la Fig. 5.31 no está limitada en banda, y por lo tanto tampoco cumple con las condiciones del teorema del muestreo.

EJEMPLO **5.13. Falla de la invariación temporal si la entrada no es de banda limitada**
Si ante una entrada $x_{c1}(t)$ un sistema produce una salida $y_{r1}(t)$, se dice que el sistema es *invariante en el tiempo* si al excitarlo con una entrada $x_{c2}(t) = x_{c1}(t-\tau)$ produce una salida $y_{r2}(t) = y_{r1}(t-\tau)$. En este ejemplo se muestra que si la señal de entrada no es de banda limitada, el sistema de la Fig. 5.32 puede no comportarse como invariante en el tiempo.

Para demostrar esta falla, se supone que la señal de entrada es un pulso rectangular, de amplitud unitaria y duración menor al período de muestreo, como se muestra en la Fig. 5.33(a). El pulso $x_{c1}(t)$ es tal que vale 1 en $t = 0$. La señal discreta $x_1[n] = \delta[n]$, pues como el ancho del pulso es menor a un período de muestreo, al muestrear la señal continua sólo se "ve" el valor unitario de $x_{c1}(t)$ en $t = 0$. Como $y[n] = x[n] = \delta[n]$, la salida del conversor D/C está dada por la ecuación (5.60) para $n = 0$. es decir, que $y_{r1}(t)$ es la respuesta impulsiva del filtro reconstructor,

$$y_{r1}(t) = \text{sinc}(F_s t)$$

como se muestra en la Fig. 5.33(b).

Si la entrada $x_{c2}(t)$ es un desplazamiento temporal de $x_{c1}(t)$, por ejemplo,

$$x_{c2}(t) = x_{c1}(t-\tau),$$

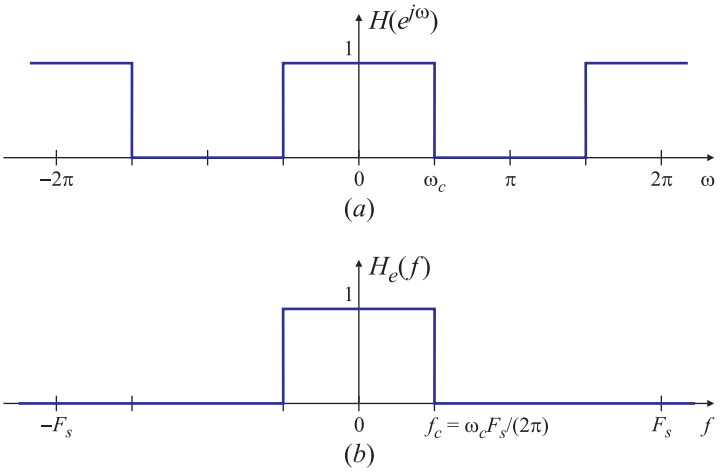


Fig. 5.34. Respuesta en frecuencia del sistema discreto de la Fig. 5.31 (a). Respuesta en frecuencia efectiva del sistema completo (de tiempo continuo) para señales limitadas en banda (b).

donde τ es tal que el lapso se tiempo en el que el pulso vale 1 queda comprendido en medio de dos instantes de muestreo, como se muestra en la Fig. 5.33(c), es evidente que $x_2[n] = 0$ para todo n. Por lo tanto, $y_2[n] = 0$ para todo n, y de acuerdo con (5.60),

$$y_{r2}(t) = 0$$

para todo t, como se muestra en la Fig. 5.33(d). Esto prueba que el sistema *no* es invariante en el tiempo, pues si lo fuese, debería haberse encontrado que la salida del sistema ante la nueva entrada debería haber sido la respuesta ante la entrada $x_c 1(t)$ desplazada en el tiempo, es decir, $y_{r2}(t) = y_{r1}(t-\tau) = \text{sinc}[F_s(t-\tau)]$. La falla de la invariación temporal se debe a que la señal de entrada es un pulso rectangular que, como se estudió en el Capítulo 2, no está limitado en banda pues su transformada de Fourier tiene componentes de frecuencias que se extienden hasta $\pm\infty$. □

En general, si el sistema discreto del esquema de la Fig. 5.31 es lineal e invariante en el tiempo, y si la frecuencia de muestreo y el ancho de banda de la señal de entrada $x_c(t)$ satisfacen el teorema del muestreo, entonces se garantiza que el sistema completo será equivalente a un sistema de tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo, con una respuesta en frecuencia efectiva dada por (5.64). Más aún, la ecuación (5.64) es válida aún cuando se solapen algunas de las réplicas del espectro de la señal a la salida del conversor C/D, siempre y cuando el sistema discreto $H(e^{j\omega})$ anule la banda de frecuencias donde se produce el solapamiento. El siguiente ejemplo ilustra este caso.

EJEMPLO **5.14. Filtrado pasabajos ideal se una señal continua usando un filtro pasabajos ideal discreto**

En el sistema de procesamiento discreto de señales continuas de la Fig. 5.31 el sistema discreto es un filtro pasabajos cuya respuesta en frecuencia en un período está dada por

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases} \tag{5.65}$$

La respuesta en frecuencia es, por supuesto, periódica de período π, como se muestra en la Fig. 5.34(a). Para señales de banda limitada muestreadas adecuadamente (es decir, cumpliendo

las hipótesis del teorema del muestreo), resulta de la ecuación (5.64) que el sistema completo de la Fig. 5.31 se comporta como un sistema de tiempo continuo, lineal e invariante en el tiempo, cuya respuesta en frecuencia es

$$H_e(f) = \begin{cases} H(e^{j\omega})\big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}, & \text{si } |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{si } |f| > F_s/2. \end{cases}$$

Reemplazando $\omega = f(2\pi)/F_s$ en (5.65) se tiene que

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} = \begin{cases} 1, & \left|f\frac{2\pi}{F_s}\right| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \left|f\frac{2\pi}{F_s}\right| < \pi. \end{cases}$$

La primera desigualdad puede escribirse como

$$\left|f\frac{2\pi}{F_s}\right| < \omega_c \quad \equiv \quad |f| < \omega_c\frac{F_s}{2\pi} := f_c,$$

y la segunda se transforma en

$$\omega_c < \left|f\frac{2\pi}{F_s}\right| < \pi \quad \equiv \quad \omega_c\frac{F_s}{2\pi} < |f| < \pi\frac{F_s}{2\pi} = \frac{F_s}{2},$$

de modo que

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} = \begin{cases} 1, & |f| < \omega_c\frac{F_s}{2\pi} := f_c, \\ 0, & f_c = \omega_c\frac{F_s}{2\pi} < |f| < \frac{F_s}{2}. \end{cases}$$

Esta ecuación, junto con (5.64), expresan que la respuesta en frecuencia del sistema completo es

$$H_e(f) = \begin{cases} 1 & |f| < \omega_c\frac{F_s}{2\pi} := f_c, \\ 0, & \text{si } |f| > f_c. \end{cases} \tag{5.66}$$

Esta es la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos ideal de tiempo continuo, como se representa en la Fig. 5.34(b). Comparando las Fig. 5.34(a) y (b), se observa que la respuesta en frecuencia del sistema equivalente de tiempo continuo $H_e(f)$ es un período de la respuesta en frecuencia del sistema discreto $H(e^{j\omega})$ escalada según $\omega = f(2\pi)/F_s$, para el rango $-F_s/2 < f < F_s/2$, y cero para las frecuencias por encima de F_s o por debajo de $(-F_s)$.

El proceso de filtrado de una señal de banda limitada arbitraria $x_c(t)$ con respuesta en frecuencia $X_c(f)$ se representa en la Fig. 5.35. La máxima componente de frecuencia de $x_c(t)$ es f_N, como se nota en la gráfica del espectro $X_c(f)$ de $x_c(t)$ representado en la Fig. 5.35(a). El muestreo satisface los requisitos del teorema de Nyquist porque $f_N < F_s/2$.

En la Fig. 5.35(b) se muestra el espectro de la señal intermedia $x_s(t)$ que resulta de modular un tren de impulsos espaciados cada $T = 1/F_s$ con la señal de entrada $x_c(t)$. Esta respuesta en frecuencia es periódica y su período es F_s, como se indica en la figura, y coincide con la respuesta en frecuencia $X(e^{j\omega})$ de la señal discreta $x[n] = x_c(nT)$ cuando se evalúa en $\omega = f(2\pi)/F_s$.

En la Fig. 5.35(c) el espectro $X(e^{j\omega})$ y la respuesta en frecuencia del filtro discreto $H(e^{j\omega})$ se grafican en función de la frecuencia discreta ω. Si bien f_N y ω_N son *números* distintos, la forma de representar las Fig. 5.35(b) y (c) pone de manifiesto que la representación en el dominio frecuencial continuo o discreto sólo se diferencian por un cambio de escalas en el eje de frecuencias (al menos en el rango $|f| < F_s/2$, u $|\omega| < \pi$).

El espectro $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$ de la salida $y[n] = h[n] * x[n]$ del filtro discreto se ilustra en la Fig. 5.35(d), donde se aprecia que la mayor componente de frecuencia ha quedado reducida a ω_c por la acción del filtro.

En la Fig. 5.35(e) se representa la transformada de Fourier de la salida del filtro discreto en función de la variable frecuencial continua f. (Este espectro corresponde a la señal intermedia $x_s(t)$ en el esquema del conversor D/C de la Fig. 5.24). En la misma figura se representa la respuesta en frecuencia del filtro (continuo) reconstructor ideal $H_r(f)$ del conversor D/C.

Finalmente, en la Fig. 5.35(f) se muestra la transformada de Fourier $Y_r(f)$ de la salida $y_r(t)$ del filtro reconstructor ideal. Comparando las Fig. 5.35(a) y (f) se observa que el sistema completo se comporta como un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo con respuesta en frecuencia dada por (5.66), y representada en la Fig. 5.34(b). □

El ejemplo 5.14 permite destacar dos conclusiones importantes:

- El filtro pasabajos ideal discreto con frecuencia de corte (discreta) ω_c se comporta como un filtro pasabajos ideal continuo con frecuencia de corte (continua) $f_c = \omega_c F_s/(2\pi)$ cuando se utiliza en la configuración de la Fig. 5.31. La frecuencia de corte del filtro equivalente depende tanto de ω_c *como de la frecuencia de muestreo* F_s. En particular, utilizando un filtro discreto determinado, y variando la frecuencia de muestreo, es posible implementar un filtro continuo con frecuencia de corte continuamente variable. No es para nada trivial diseñar un filtro "analógico" que tenga esta característica. Por otra parte, los filtros de capacitores conmutados explotan esta característica. En la Fog. 5.36 se muestran un par de páginas de las hojas de datos del filtro de capacitores conmutados LMF100 de National Semiconductor, donde se han resaltado los párrafos donde se especifica que la frecuencia de corte del filtro es función de la frecuencia de reloj f_{CLK}. Otros parámetros del filtro (Q, ancho de banda, etc.) se controlan con el valor de una relación entre dos resistencias.

- La ecuación (5.66) también es válida aún cuando se solapen las réplicas del espectro de la señal original como se muestra en los espectros de la Fig. 5.35(b) y (c), siempre y cuando estas componentes de distorsión sean eliminadas por el filtro $H(e^{j\omega})$. La Fig. 5.35(c) revela que para que la las réplicas solapadas no aparezcan en la salida del sistema, es suficiente con que

$$2\pi - \omega_N = 2\pi - f_N \frac{2\pi}{F_s} > \omega_c.$$

Esta es la situación que se muestra en la Fig. 5.37. En la Fig. 5.37(a) se muestra el espectro de una señal $x_c(t)$ limitada en banda, cuya máxima componente frecuencial es f_N. Esta señal se muestrea a F_s, pero en este caso no se cumple que $F_s > 2f_N$. Por lo tanto, al muestrear la señal $x_c(t)$ se producirá distorsión por solapamiento. Esto se pone de manifiesto en la Fig. 5.37(b), que muestra el espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal $x[n]$, pero graficado en función de la variable continua f. En la misma figura se indican con líneas de puntos las réplicas de $X_c(f)$ cada F_s. La banda de frecuencias comprendida entre $F_s - f_N$ y f_N (sombreada en la figura) es donde se solapan las réplicas de los espectros de $X_c(f)$. En la Fig. 5.37(c) se grafica este mismo espectro en función de la frecuencia discreta ω, junto con la respuesta en frecuencia del filtro pasabajos discreto $H(e^{j\omega})$. La banda de frecuencias discretas donde aparece la distorsión por solapamiento es

$$(F_s - f_N)\frac{2\pi}{F_s} < \omega < f_N \frac{2\pi}{F_s}$$

es decir

$$2\pi - \omega_N < \omega < \omega_N,$$

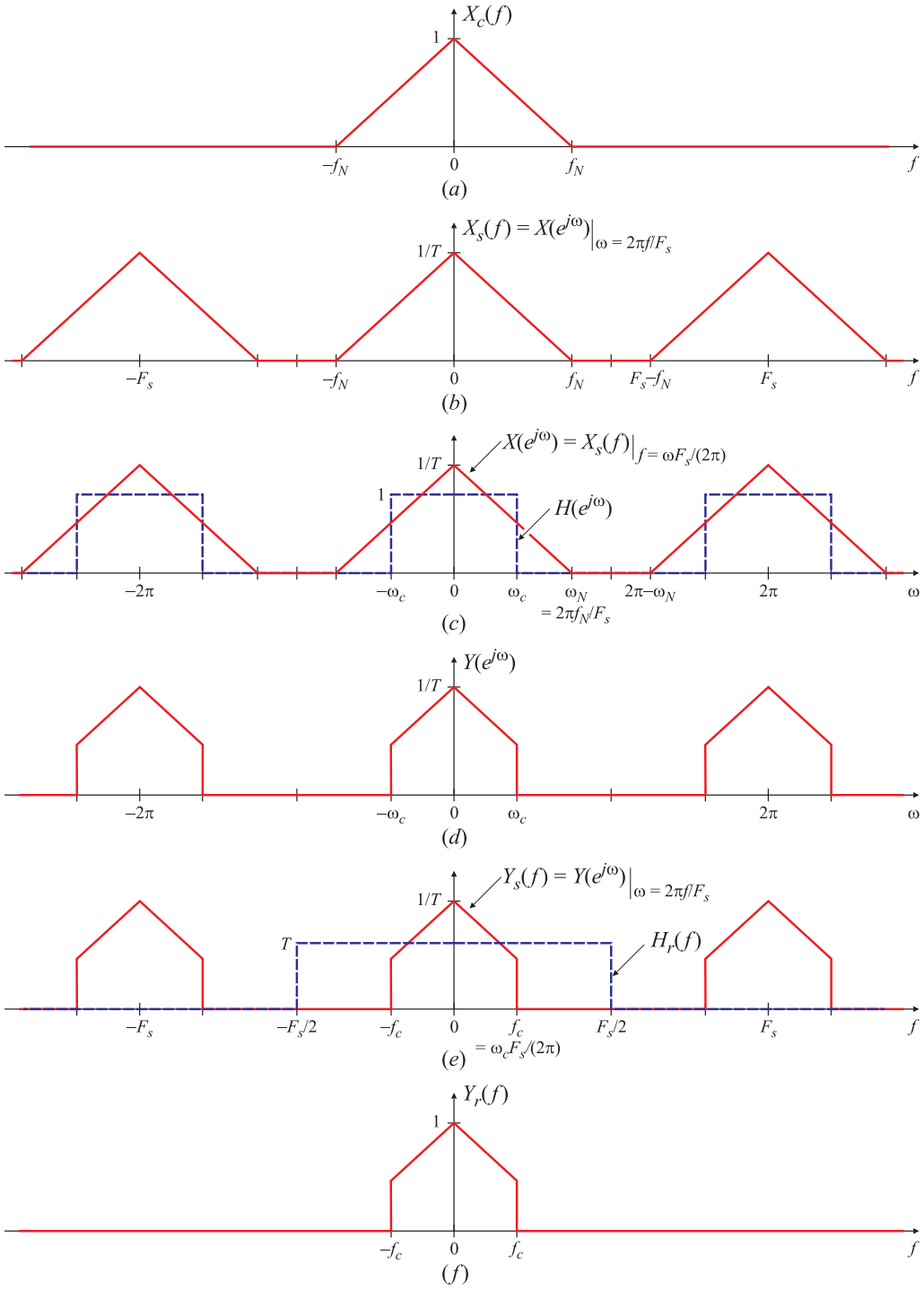
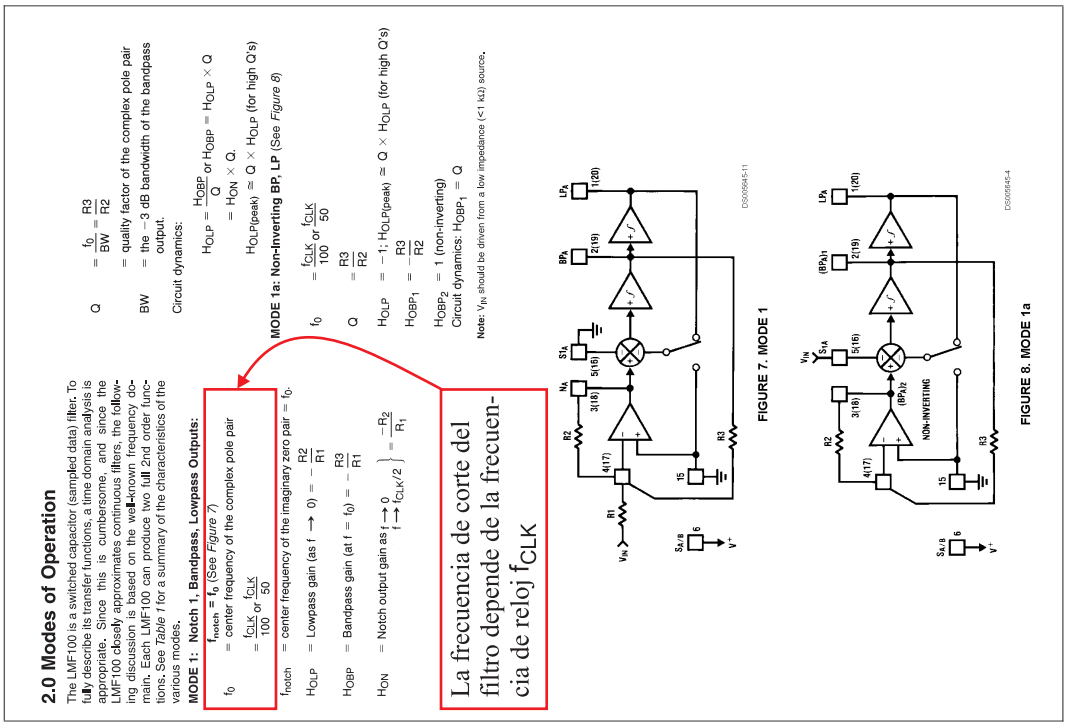


Fig. 5.35. Transformada de Fourier de una señal limitada en banda (a). Transformada de Fourier de la señal muestreada graficada en función de la frecuencia continua f (b). Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de la sucesión discreta $x[n]$ y respuesta en frecuencia del sistema discreto $H(e^{j\omega})$ en función de la frecuencia discreta ω (c). Transformada de Fourier $Y(e^{j\omega})$ de la salida $y[n]$ del sistema discreto (d). Trasnformada de Fourier de la salida del sistema discreto y respuesta en frecuencia del filtro reconstructor ideal $H_r(f)$ en función de la frecuencia continua f (e). Transformada de Fourier $Y_r(f)$ de la salida de tiempo continuo $y_r(t)$ (f).



LMF100 High Performance Dual Switched Capacitor Filter

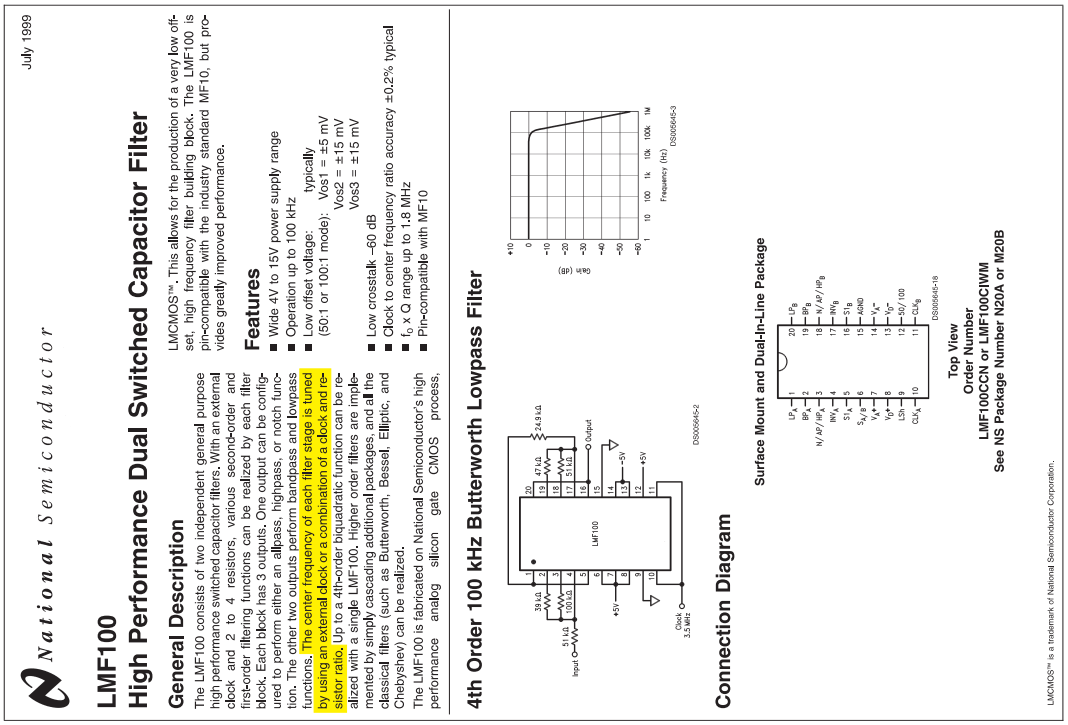


Fig. 5.36. Detalle de las hojas de datos del filtro de capacitores conmutados LMF100 de National Semiconductor.

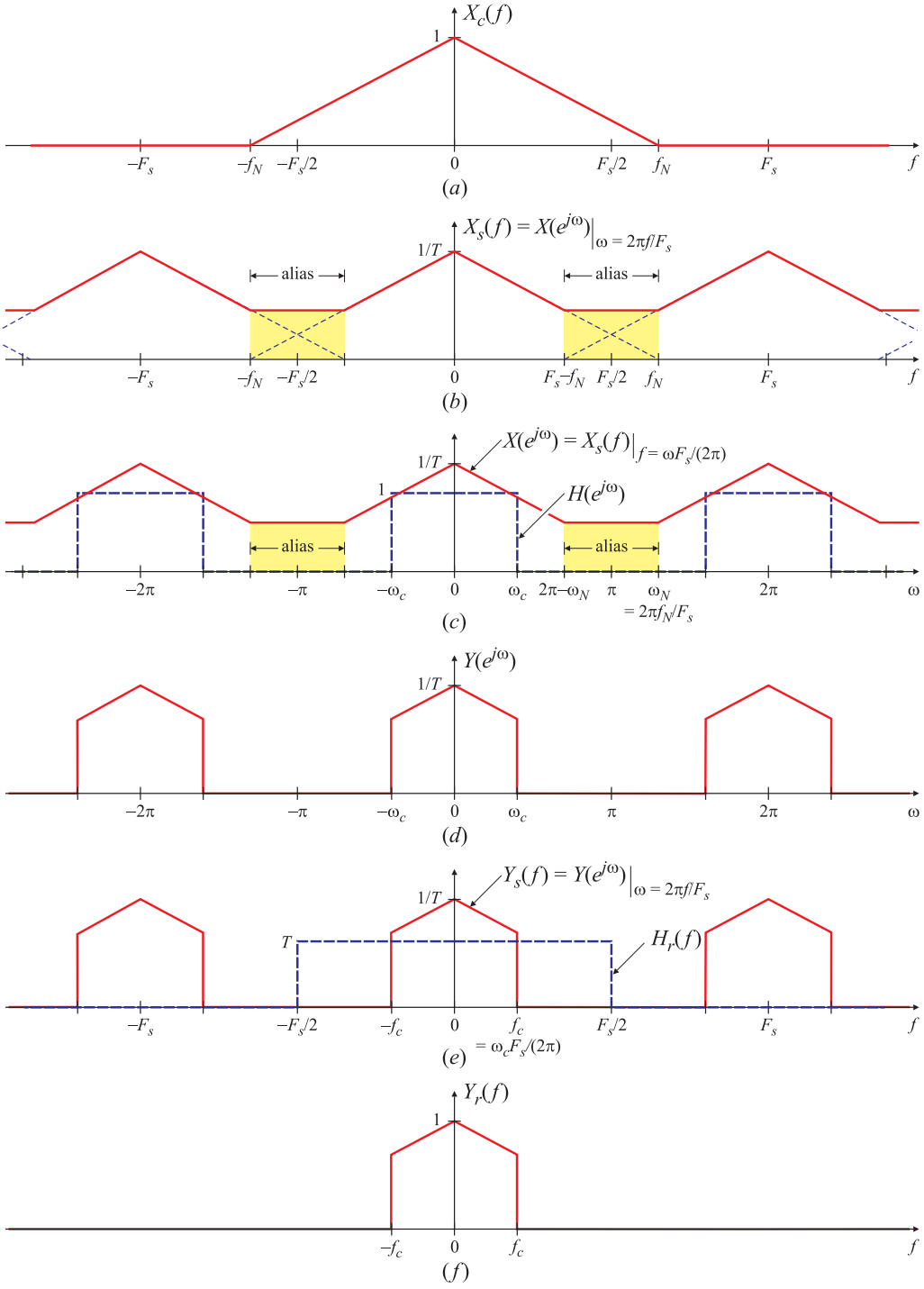


Fig. 5.37. Transformada de Fourier de una señal limitada en banda que no satisface el teorema del muestreo (a). Transformada de Fourier de la señal muestreada graficada en función de f; como no cumple con el teorema del muestreo, las réplicas se solapan (b). Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de la sucesión discreta $x[n]$ y respuesta en frecuencia del sistema discreto $H(e^{j\omega})$ en función de ω. En este caso, el filtro discreto elimina completamente la distorsión por *aliasing* (c). Transformada de Fourier $Y(e^{j\omega})$ de la salida $y[n]$ del sistema discreto (d). Transformada de Fourier de $y[n]$ y respuesta en frecuencia del filtro reconstructor ideal $H_r(f)$ en función de f (e). Transformada de Fourier $Y_r(f)$ de la salida $y_r(t)$ (f).

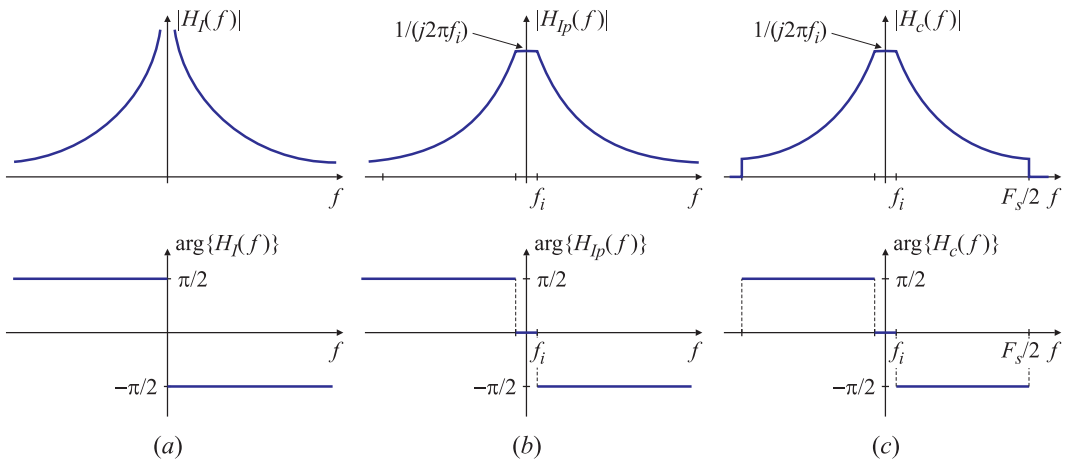


Fig. 5.38. Respuesta en frecuencia (módulo y fase) de integradores de tiempo continuo: ideal (a); con pérdida (b); con pérdida y de banda limitada (c).

donde $\omega_N = f_N(2\pi)/F_s$. Se aprecia que, *en este caso*, la frecuencia de corte ω_c del filtro discreto queda por debajo de la banda donde se produce el solapamiento de las réplicas,

$$\omega_c < 2\pi - \omega_N$$

y que en esa banda la respuesta en frecuencia del filtro tiene módulo nulo. Por lo tanto, el espectro $Y(e^{j\omega})$ de la salida $y[n]$ del filtro discreto no se ve afectada por el solapamiento, como se muestra en la Fig. 5.37(d) . El espectro de esta señal, graficado en función de la frecuencia continua f se representa en la Fig. 5.37(e) , junto con la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor ideal. Finalmente, el espectro $Y_r(f)$ de la salida $y_r(t)$ del filtro reconstructor ideal se grafica en la Fig. 5.37(f) . Comparando los espectros $X_c(f)$ de la señal continua de entrada $x_c(t)$, e $Y_r(f)$ de la señal continua de salida $y_r(t)$, se observa que el sistema de procesamiento discreto de señales continuas de la Fig. 5.31 se comporta como un filtro pasabajoc continuo con frecuencia de corte $f_c = \omega_c(2\pi/F_s)$, *aún cuando el ancho de banda de la señal de entrada y la frecuencia de muestreo no satisfacen el teorema del muestreo*.

Aunque en este caso "todo anduvo bien", en ciertas aplicaciones este tipo de comportamiento puede dar lugar a fenómenos no deseados. Por ello en muchas aplicaciones es habitual limitar el ancho de banda de la señal de entrada antes de procesarla con el conversor C/D para eliminar todas las componentes de frecuencia que se extiendan más allá de la frecuencia de muestreo. Este filtro (analógico) se conoce como *prefiltro* o *filtro antialiasing*, y su funcionamiento se discutirá más adelante, al estudiar algunas consideraciones prácticas del proceso de muestreo (Sección 5.11).

Los siguientes ejemplos de sistemas discretos de procesamiento se señales continuas estudian el caso de un sistema que se comporta como un integrador "con pérdida" o de banda limitada, y un diferenciador limitado en banda.

EJEMPLO **5.15. Integrador de banda limitada**
La respuesta en frecuencia de un integrador continuo ideal es

$$H_I(f) = \frac{1}{j2\pi f}, \quad -\infty < f < \infty,$$

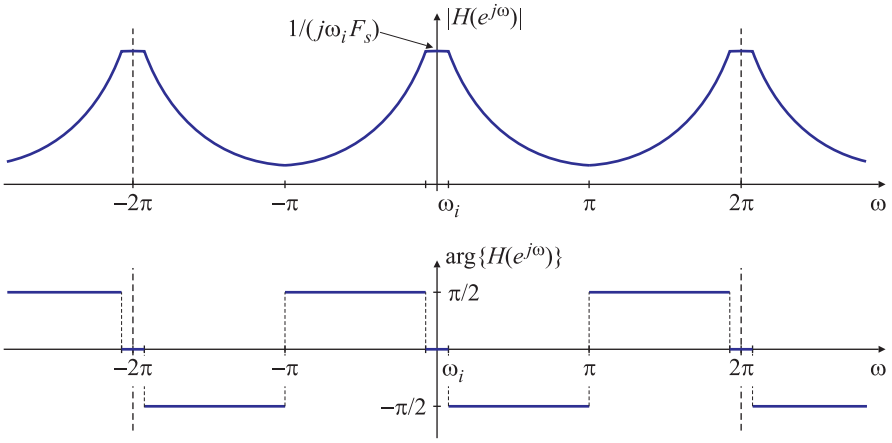


Fig. 5.39. Respuesta en frecuencia (módulo y fase) de un integrador discreto de banda limitada.

tal como se representa en la Fig. 5.38(a). En aplicaciones es habitual utilizar un "integrador con pérdida", que en realidad es un filtro pasabajos. La respuesta en frecuencia de un integrador de este tipo, ilustrada en la Fig. 5.38(b), es

$$H_{Ip}(f) = \begin{cases} 1/(j2\pi f_i), & |f| < f_i, \\ 1/(j2\pi f), & f_i < |f|. \end{cases}$$

Finalmente, si este integrador desea implementarse como un sistema de procesamiento discreto de señales continuas es necesario limitarlo en banda a la mitad de la frecuencia de muestreo, como se representa en la Fig. 5.38(c). Resulta entonces un sistema con función transferencia

$$H_c(f) = \begin{cases} 1/(j2\pi f_i), & |f| < f_i, \\ 1/(j2\pi f), & f_i < |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El sistema con función transferencia $H_c(f)$ se comporta como un integrador para cualquier señal con contenido frecuencial comprendido en el intervalo $[f_i, f_s/2)$.

La versión discreta del integrador resulta de efectuar el cambio de variables $f \mapsto \omega F_s/(2\pi)$, y replicar la función resultante cada 2π:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_k H_c\left(\omega\frac{F_s}{2\pi} - 2\pi k\right),$$

que en el rango $|\omega| < \pi$ puede escribirse como

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1/(j\omega_i F_s), & |\omega| < 2\pi(f_i/F_s) = \omega_i, \\ 1/(j\omega F_s), & 2\pi(f_i/F_s) < |f| < \pi. \end{cases} \tag{5.67}$$

donde $\omega_i = 2\pi f_i/F_s$. Esta respuesta en frecuencia se representa en la Fig. 5.39. □

A continuación se muestra que el sistema de procesamiento discreto de datos continuos de la Fig. 5.31 donde el sistema discreto es el integrador discreto de banda limitada del Ejemplo anterior se comporta efectivamente como un integrador de tiempo continuo.

EJEMPLO **5.16. Respuesta del integrador de banda limitada ante una entrada senoidal**
El sistema del ejemplo anterior se excita con una entrada senoidal

$$x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t),$$

donde $f_i < f_0 < f_s/2$, cuyo espectro es

$$X_c(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f - f_0).$$

La señal discreta $x[n]$ se obtiene muestreando al señal continua cada $T = 1/F_s$ segundos,

$$x[n] = x_c(t)|_{t=nT} = A\cos[2\pi(f_0/F_s)n] = A\cos\omega_0 n \tag{5.68}$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0/F_s$. El espectro de esta señal puede obtenerse por inspección directamente a partir de la ecuación (5.68), de donde resulta

$$X(e^{j\omega}) = \sum_k \pi A\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + \pi A\delta(\omega+\omega_0-2\pi k), \tag{5.69}$$

o bien a partir del espectro de $X_c(f)$:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\sum_k X_c(f-kF_s)|_{f=\omega\frac{f_s}{2\pi}} \\ &= \frac{1}{T}\sum_k \left[\frac{A}{2}\delta(f-kF_s-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f-kF_s+f_0)\right]\Big|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Como

$$\delta(f-kF_s-f_0)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}} = \delta\left(\frac{\omega F_s}{2\pi}-kF_s-f_0\right) = \delta\left(\frac{F_s}{2\pi}\left[\omega-k2\pi-\frac{f_0}{F_s}2\pi\right]\right) = \frac{2\pi}{F_s}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k),$$

y teniendo en cuenta que $F_s T = 1$, la expresión (5.70) se puede escribir como

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\sum_k \frac{2\pi}{F_s}\frac{A}{2}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + \frac{2\pi}{F_s}\frac{A}{2}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &= \sum_k \pi A\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + \pi A\delta(\omega+\omega_0-2\pi k), \end{aligned}$$

que (naturalmente!) coincide con (5.69).

La señal $y[n]$ de salida del filtro discreto puede calcularse como la salida de estado estacionario del integrador discreto limitado en banda dado por (5.67) cuando se lo excita con la señal (5.68), o bien calculando el espectro de $Y(e^{j\omega})$ y antitransformando. En el primer caso,

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \phi_0),$$

donde $\phi_0 = \arg\{|H(e^{j\omega_0})|\}$. En este caso, de la expresión (5.67) se encuentra que

$$|H(e^{j\omega_0})| = \frac{1}{\omega_0 F_s}, \quad \phi_0 = \arg\{|H(e^{j\omega_0})|\} = -\frac{\pi}{2},$$

y por lo tanto,

$$y[n] = \frac{A}{\omega_0 F_s}\cos(\omega_0 n - \pi/2) = \frac{A}{\omega_0 F_s}\operatorname{sen}(\omega_0 n). \tag{5.71}$$

Si, en cambio, se calcula $y[n]$ antitransformando el espectro de $Y(e^{j\omega})$, se tiene que

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\,\pi A\sum_k \delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + \delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &= \pi A\sum_k H(e^{j(\omega_0+2\pi k)})\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + H(e^{(-j\omega_0+2\pi k)})\delta(\omega+\omega_0-2\pi k). \end{aligned}$$

Como

$$H(e^{j(\omega_0+2\pi k)}) = H(e^{j\omega_0}) = \frac{1}{j\omega_0 F_s}, \qquad \text{y} \qquad H(e^{(-j\omega_0+2\pi k)}) = H(e^{-j\omega_0}) = -\frac{1}{j\omega_0 F_s},$$

porque la respuesta en frecuencia es 2π periódica, se tiene que

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \pi A \sum_k \frac{1}{j\omega_0 F_s}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) - \frac{1}{j\omega_0 F_s}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &= \pi A \sum_k \frac{-j}{\omega_0 F_s}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + \frac{j}{\omega_0 F_s}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &= \frac{\pi A}{\omega_0 F_s}\sum_k -j\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + j\delta(\omega+\omega_0-2\pi k). \end{aligned}$$

El espectro $Y(e^{j\omega})$ es la transformada de un seno discreto de amplitud $A/(\omega_0 F_s)$ y frecuencia ω_0, que nuevamente coincide con (5.71).

Una vez calculada $y[n]$, se puede determinar $y_c(t)$. Para ello hay que calcular $y_s(t)$ y procesarla con el filtro reconstructor ideal. Como

$$y_s(t) = \sum_n y[n]\delta(t-nT)$$

y el filtro reconstructor ideal tiene respuesta impulsiva $h_r(t) = \text{sinc}(t/T)$, se tiene que

$$\begin{aligned} y_c(t) &= h_r(t) * y_s(t) = h_r(t) * \sum_n y[n]\delta(t-nT) = \sum_n y[n]h_r(t-nT) \\ &= \sum_n \frac{A}{\omega_0 F_s}\,\text{sen}(\omega_0 n)\,\text{sinc}(t/T-n) = \frac{A}{2\pi f_0}\sum_n \text{sen}(\omega_0 n)\,\text{sinc}(t/T-n), \end{aligned}$$

pues $\omega_0 = 2\pi f_0/F_s$. De acuerdo a los resultados de la Sección 5.8.1, resulta

$$y_c(t) = \frac{A}{2\pi f_0}\,\text{sen}(2\pi f_0 t),$$

que es la integral de $x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$,

$$y_c(t) = \int_0^t x_c(\tau)d\tau.$$

El resultado es el mismo si los cálculos se desarrollan en el campo transformado. Partiendo del espectro de $Y(e^{j\omega})$ es más sencillo calcular $y_c(t)$. Como $Y_c(f) = H_r(f)Y_s(f)$, y

$$Y_s(f) = Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} Y_c(f) &= H_r(f)Y_s(f) = H_r(f)\; Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} \\ &= H_r(f)\frac{\pi A}{\omega_0 F_s}\sum_k \left[-j\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + j\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right]\big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} = \delta\left(f\frac{2\pi}{F_s}-\omega_0-2\pi k\right) = \delta\left(\frac{2\pi}{F_s}\left[f-\omega_0\frac{F_s}{2\pi}-2\pi k\frac{F_s}{2\pi}\right]\right) = \frac{F_s}{2\pi}\delta\left(f-f_0-kF_s\right)$$

resulta que

$$\begin{aligned} Y_c(f) &= H_r(f)\frac{\pi A}{\omega_0 F_s}\frac{F_s}{2\pi}\sum_k -j\delta\left(f-f_0-kF_s\right)+j\delta\left(f+f_0-kF_s\right) \\ &= T\frac{\pi}{\omega_0 F_s}\frac{F_s}{\pi}\left[-j\frac{A}{2}\delta\left(f-f_0\right)+j\frac{A}{2}\delta\left(f+f_0\right)\right] \end{aligned}$$

y antitransformando,

$$y_c(t) = \frac{1}{\omega_0 F_s} A\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2\pi f_0} A\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$$

que es la integral de $x_c(t)$. Nuevamente, el desarrollo muestra cuánto más sencillo es calcular la respuesta temporal trabajando con los espectros en el dominio frecuencia. □

En el próximo ejemplo se estudia la implementación de un derivador utilizando un sistema de procesamiento discreto de señales continuas. Al igual que con el ejemplo del integrador, para lograr una implementación exitosa es necesario limitar el rango de frecuencias donde el sistema se comporta como derivador.

EJEMPLO **5.17. Implementación discreta de un derivador continuo en el tiempo de banda limitada**

El diferenciador de tiempo continuo ideal está caracterizado por la ecuación diferencial

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(t),$$

cuya respuesta en frecuencia es

$$H_c(f) = j2\pi f.$$

Como se necesita que las entradas al sistema de procesamiento discreto de señales continuas de la Fig. 5.31 sean de banda limitada, para cumplir con los requisitos del teorema del muestreo, es sufciente que la respuesta en frecuencia de este sistema sea

$$H_e(f) = \begin{cases} j2\pi f, & |f| < F_s/2, \\ 0, & |f| > F_s/2. \end{cases}$$

cuyo módulo y fase se muestra en la Fig. 5.40(a) . El sistema de tiempo discreto tiene una respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = H_e(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}} = j2\pi\omega\frac{F_s}{2\pi},$$

para $|\omega F_s/(2\pi)| < F_s/2$, que se puede escribir como

$$H(e^{j\omega}) = jF_s\omega, \qquad \text{para } |\omega| < \pi. \tag{5.72}$$

Esta respuesta se repite periódicamente cada 2π, como se representa en la Fig. 5.40(b) . La respuesta impulsiva es

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = j\frac{F_s}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{\pi n^2 T}\left(\pi n\cos\pi n - \mathrm{sen}\,\pi n\right) \end{aligned}$$

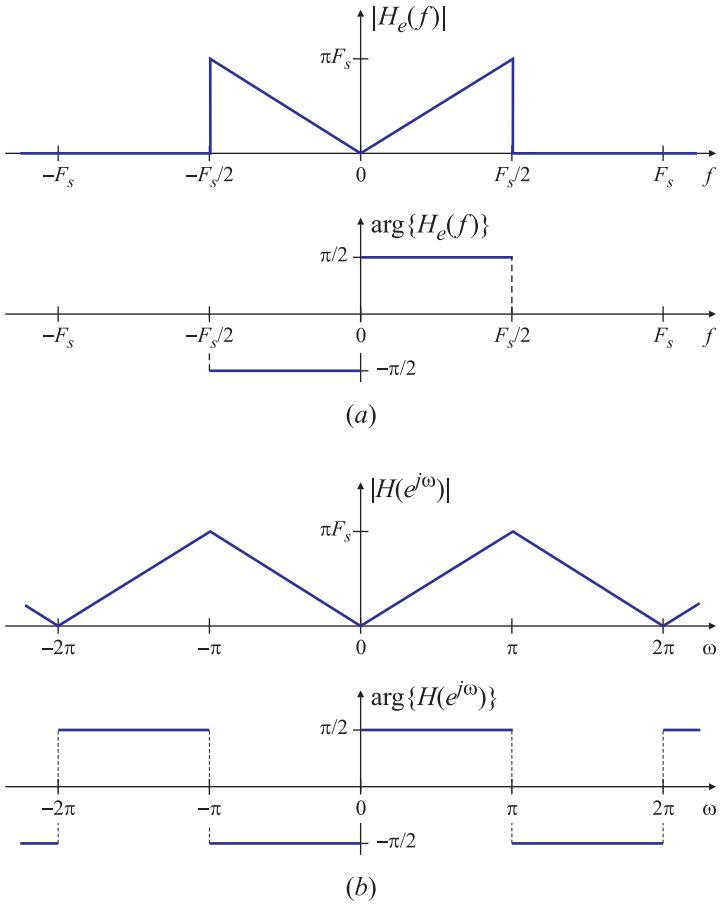


Fig. 5.40. Respuesta en frecuencia del diferenciador ideal de tiempo continuo limitado en banda (a). Respuesta en frecuencia del filtro discreto necesario para implementar un diferenciador continuo limitado en banda usando el esquema de la Fig. 5.31 (b).

que también puede expresarse como

$$h[n] == \begin{cases} 0 & n = 0, \\ \dfrac{\cos \pi n}{nT}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, si un sistema de tiempo discreto con esta respuesta impulsiva se utiliza en la configuración de la Fig. 5.31, la salida de cualquier señal de entrada de banda limitada será la derivada temporal de la entrada. □

En el ejemplo siguiente se muestra que el sistema de procesamiento discreto de señales continuas en el que se utiliza como sistema discreto el derivador discreto analizado más arriba se comporta efectivamente como un derivador analógico.

EJEMPLO **5.18. Respuesta del derivador ante una entrada sinusoidal**
Si la entrada al sistema derivador del Ejemplo 5.17 es

$$x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t), \tag{5.73}$$

con $f_0 < F_s/2$, su espectro es

$$X_c(f) = \frac{A}{2}\delta(f+f_0) + \frac{A}{2}\delta(f-f_0).$$

La señal discreta $x[n]$ está dada por

$$x[n] = x_c(nT) = A\cos(2\pi f_0 Tn) = A\cos(\omega_0 n)$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0 T = f_0(2\pi/F_s)$. La transformada de Fourier expresada en función de f es

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\sum_k X_c(f-kF_s)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}} \\ &= \frac{A}{2T}\sum_k \delta\left(\omega\frac{F_s}{2\pi}+f_0-kF_s\right) + \delta\left(\omega\frac{F_s}{2\pi}-f_0-kF_s\right) \\ &= \sum_k \pi A\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) + \pi A\delta(\omega-\omega_0-2\pi k). \end{aligned}$$

En la banda de frecuencias $|\omega| < \pi$ (que corresponde a $k=0$) se tiene que

$$X(e^{j\omega}) = \pi A\delta(\omega+\omega_0) + \pi A\delta(\omega-\omega_0) \qquad \text{para } |\omega| < \pi.$$

Este es el espectro de la señal a la entrada del sistema discreto; el espectro de la salida es $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$, donde $H(e^{j\omega})$ está dado por (5.72). Se tiene entonces que, en el intervalo $|\omega| < \pi$,

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= jF_s\omega\left[\pi A\delta(\omega+\omega_0) + \pi A\delta(\omega-\omega_0)\right] \\ &= -j\pi AF_s\omega_0\delta(\omega+\omega_0) + j\pi AF_s\omega_0\delta(\omega-\omega_0), \end{aligned}$$

donde se aplicó la propiedad de colador del impulso: $\omega\delta(\omega-\omega_0) = \omega_0\delta(\omega-\omega_0)$.

La transformada de Fourier de la salida del conversor D/C en el intervalo $|f| < F_2/2$ es, de acuerdo a la ecuación (5.61)

$$\begin{aligned} Y_r(f) &= H_r(f)\,Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} \\ &= T\left[-j\pi AF_s\omega_0\delta(\omega+\omega_0) + j\pi AF_s\omega_0(\omega-\omega_0)\right]|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} \\ &= T\left[-j\pi AF_s\omega_0\delta\left(f\frac{2\pi}{F_s}+\omega_0\right) + j\pi AF_s\omega_0\delta\left(f\frac{2\pi}{F_s}-\omega_0\right)\right] \\ &= -j\pi A\omega_0\delta\left[\frac{2\pi}{F_s}\left(f+\omega_0\frac{F_s}{2\pi}\right)\right] + j\pi A\omega_0\delta\left[\frac{2\pi}{F_s}\left(f-\omega_0\frac{F_s}{2\pi}\right)\right] \\ &= -j\pi A\omega_0\frac{F_s}{2\pi}\delta(f+f_0) + j\pi A\omega_0\frac{F_s}{2\pi}\delta(f-f_0) \\ &= -j\frac{A}{2}2\pi f_0\delta(f+f_0) + j\frac{A}{2}2\pi f_0\delta(f-f_0) \end{aligned} \tag{5.74}$$

donde se ha utilizado la propiedad de escalado del impulso, y el hecho que $\omega_0 F_s/(2\pi) = f_0$. La expresión (5.74) representa un par de impulsos de amplitud $\pm j2\pi f_0 A/2$ ubicados en $\pm f_0$, y por lo tanto es la transformada de Fourier de una señal $[-\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)]$ de amplitud $2\pi f_0 A$. Es decir

$$y_r(t) = -2\pi f_0 A\operatorname{sen}(2\pi f_0 t),$$

y se verifica efectivamente que $y_r(t)$ es la derivada temporal de $x_c(t)$ dada por (5.73). □

En los siguientes ejemplos se analiza el comportamiento de un sistema de procesamiento discreto de señales continuas cuando la entrada es una señal de banda limitada, pero

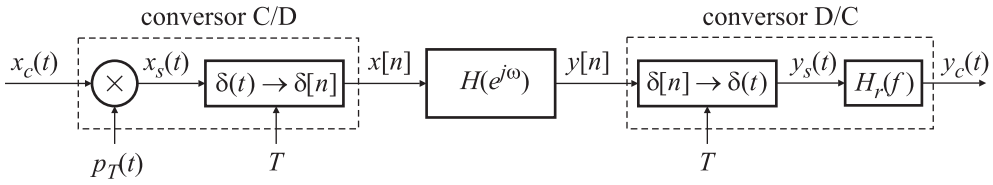


Fig. 5.41. Sistema de procesamiento discreto de datos continuos del Ejemplo 5.19.

que no satisface el teorema del muestreo, y también cuando la señal no está limitada en banda.

El primero es una extensión del Ejemplo 5.12, en que el sistema de procesamiento discreto de señales continuas no se comporta como un sistema lineal cuando la señal de entrada es de banda limitada, pero cuya máxima frecuencia es mayor que la mitad de la frecuencia de muestreo. La diferencia con el Ejemplo 5.12 es que en este caso el filtro discreto no es una constante unitaria, sino un filtro pasaaltos.

EJEMPLO **5.19. Procesamiento discreto de una señal de banda limitada que no satisface el teorema del muestreo**

En el sistema de procesamiento discreto de señales continuas de la Fig. 5.41, el sistema discreto lineal e invariante en el tiempo es un filtro pasaalto con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/3, \\ 1, & \pi/3 < |\omega| < \pi, \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. 5.42. La frecuencia de muestreo es $F_s = 8$ kHz, y la señal de entrada es

$$x_c(t) = 1 + 3\cos(2\pi f_0 t) + 4\cos(2\pi f_1 t) \tag{5.75}$$

con $f_0 = 2$ kHz, y $f_1 = 5$ kHz. El objetivo es calcular la salida continua de estado estacionario $y_c(t)$. La forma más sencilla de hacerlo es calculando los espectros de las señales en cada punto de la cascada de la Fig. 5.41.

- El espectro $X_c(f)$ de la señal de entrada es

  $$X_c(f) = \delta(f) + \tfrac{3}{2}\delta(f - f_0) + \tfrac{3}{2}\delta(f + f_0) + 2\delta(f - f_1) + 2\delta(f + f_1),$$

  como se se muestra en la Fig. 5.43(a) .
- Para calcular el espectro $X_s(f)$ de la señal $x_s(t)$, es conveniente pensar que esta señal es el resultado de modular un tren de impulsos ideal por la señal de tiempo continua $x_c(t)$. Es decir, $x_s(t)$ se puede escribir como

  $$x_s(t) = x_c(t)p_T(t),$$

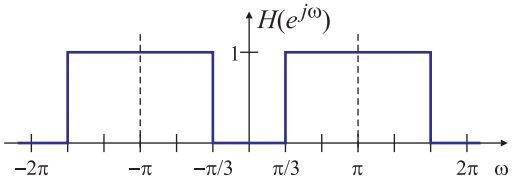


Fig. 5.42. Respuesta en frecuencia del sistema discreto del Ejemplo 5.19.

donde $p_T(t)$ es el tren de impulsos ideal, $p_T(t) = \sum_r \delta(t - rT)$, cuya transformada es

$$P_T(f) = \frac{1}{T}\sum_k \delta(f - kf_s).$$

Aplicando el teorema de convolución frecuencial, se tiene que

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X_c(f) * P_T(f) \\ &= X_c(f) * \frac{1}{T}\sum_k \delta(f - kF_s) = \frac{1}{T}\sum_k X_c(f - kF_s) \\ &= \frac{1}{T}\sum_k \delta(f-kF_s)+\tfrac{3}{2}\delta(f-f_0-kF_s)+\tfrac{3}{2}\delta(f+f_0-kF_s)+2\delta(f-f_1-kF_s)+2\delta(f+f_1-kF_s) \end{aligned}$$

que se muestra en la Fig. 5.43(b) .

- La señal discreta $x[n]$ se obtiene al muestrear $x_c(t)$ a $F_s = 1/T = 8000$ Hz, y entonces

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(t)|_{t=nT} = 1 + 3\cos(2\pi f_0 t) + 4\cos(2\pi f_1 t)|_{t=nT} \\ &= 1 + 3\cos(2\pi f_0/F_s\, n) + 4\cos(2\pi f_1/F_s\, n) \\ &= 1 + 3\cos\left(2\pi\tfrac{2000}{8000}n\right) + 4\cos\left(2\pi\tfrac{5000}{8000}n\right) \\ &= 1 + 3\cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) + 4\cos\left(\tfrac{5}{4}\pi n\right). \end{aligned}$$

Como $\cos\left(\frac{5}{4}\pi n\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi n - 2\pi n\right) = \cos\left(-\frac{3}{4}\pi n\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$, la señal $x[n]$ puede escribirse como

$$x[n] = 1 + 3\cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) + 4\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi n\right)$$

donde las frecuencias discretas son $\omega_0 = 2\pi(f_0/F_s) = \pi/2$ y $\omega_{1a} = 3\pi/4$. La frecuencia discreta original $\omega_1 = 2\pi(f_1/F_s) = 5\pi/4$ queda fuera del intervalo $(-\pi, \pi)$, pero se puede representar con una señal de frecuencia $\omega_{1a} = 3\pi/4$ que queda dentro de dicho intervalo.
El espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal discreta $x[n]$ se puede calcular como

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_s(f)|_{f=\frac{\omega}{2\pi}F_s} \\ &= \frac{1}{T}\sum_k \delta(f-kF_s)+\tfrac{3}{2}\delta(f-f_0-kF_s)+\tfrac{3}{2}\delta(f+f_0-kF_s)\Big|_{f=\frac{\omega}{2\pi}F_s} \\ &\quad + \frac{1}{T}\sum_k 2\delta(f-f_1-kF_s)+2\delta(f+f_1-kF_s)\Big|_{f=\frac{\omega}{2\pi}F_s} \\ &= \frac{1}{T}\sum_k \delta(\tfrac{\omega}{2\pi}F_s-kF_s)+\tfrac{3}{2}\delta(\tfrac{\omega}{2\pi}F_s-f_0-kF_s)+\tfrac{3}{2}\delta(\tfrac{\omega}{2\pi}F_s+f_0-kF_s) \\ &\quad +\frac{1}{T}\sum_k 2\delta(\tfrac{\omega}{2\pi}F_s-f_1-kF_s)+2\delta(\tfrac{\omega}{2\pi}F_s+f_1-kF_s) \\ &= \frac{1}{T}\sum_k \delta\left[\tfrac{F_s}{2\pi}(\omega-2\pi k)\right]+\tfrac{3}{2}\delta\left[\tfrac{F_s}{2\pi}(\omega-2\pi\tfrac{f_0}{F_s}-2\pi k)\right]+\tfrac{3}{2}\delta\left[\tfrac{F_s}{2\pi}(\omega+2\pi\tfrac{f_0}{F_s}-2\pi k)\right] \\ &\quad +\frac{1}{T}\sum_k 2\delta\left[\tfrac{F_s}{2\pi}(\omega-2\pi\tfrac{f_1}{F_s}-2\pi k)\right]+2\delta\left[\tfrac{F_s}{2\pi}(\omega+2\pi\tfrac{f_1}{F_s}-2\pi k)\right] \\ &= \frac{2\pi}{TF_s}\sum_k \delta(\omega-2\pi k)+\tfrac{3}{2}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\tfrac{3}{2}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &\quad +\frac{2\pi}{TF_s}\sum_k 2\delta(\omega-\omega_1-2\pi k)+2\delta(\omega+\omega_1-2\pi k) \\ &= \sum_k 2\pi\delta(\omega-2\pi k)+3\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+3\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &\quad +\sum_k 4\pi\delta(\omega-\omega_1-2\pi k)+4\pi\delta(\omega+\omega_1-2\pi k) \end{aligned}$$

donde $\omega_0 = 2\pi(f_0/F_s) = \pi/2$ y $\omega_1 = 2\pi(f_1/F_s) = 5\pi/4$. También se ha aplicado la propiedad de escalado del impulso, $\delta(at) = (1/|a|)\delta(t)$. De acuerdo a lo indicado más arriba, $\cos(\omega_1 n) = \cos(\omega_{1a} n)$, con $\omega_{1a} = 3\pi/4$. De modo que

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) = &\sum_k 2\pi\delta(\omega-2\pi k)+3\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+3\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &+\sum_k 4\pi\delta(\omega-\omega_{1a}-2\pi k)+4\pi\delta(\omega+\omega_{1a}-2\pi k). \end{aligned}$$

Este espectro se muestra en la Fig. 5.43(c).

- La señal $y[n]$ resulta de filtrar $x[n]$ con el filtro pasaaltos con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, representado en la Fig. 5.43(d). El filtro remueve la componente de continua $\delta(\omega)$ y sus réplicas, $\delta(\omega + 2\pi r)$, como se muestra en la Fig. 5.43(e), de manera que el espectro de la salida es

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= \sum_k 3\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+3\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \\ &\quad +\sum_k 4\pi\delta(\omega-\omega_{1a}-2\pi k)+4\pi\delta(\omega+\omega_{1a}-2\pi k). \end{aligned}$$

- La señal $y_s(t)$ se obtiene escalando temporalmente la señal discreta $y[n]$. Entonces,

$$\begin{aligned} Y_s(f) &= Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{f}{F_s}2\pi} \\ &= \sum_k 3\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+3\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\Big|_{\omega=\frac{f}{F_s}2\pi} \\ &\quad +\sum_k 4\pi\delta(\omega-\omega_{1a}-2\pi k)+4\pi\delta(\omega+\omega_{1a}-2\pi k)\Big|_{\omega=\frac{f}{F_s}2\pi} \\ &= \sum_k 3\pi\delta\left(\tfrac{f}{F_s}2\pi-\omega_0-2\pi k\right)+3\pi\delta\left(\tfrac{f}{F_s}2\pi+\omega_0-2\pi k\right) \\ &\quad +\sum_k 4\pi\delta\left(\tfrac{f}{F_s}2\pi-\omega_{1a}-2\pi k\right)+4\pi\delta\left(\tfrac{f}{F_s}2\pi+\omega_{1a}-2\pi k\right) \\ &= \sum_k 3\pi\delta\left[\tfrac{2\pi}{F_s}\left(f-\omega_0\tfrac{F_s}{2\pi}-2\pi k\tfrac{F_s}{2\pi}\right)\right]+3\pi\delta\left[\tfrac{2\pi}{F_s}\left(f+\omega_0\tfrac{F_s}{2\pi}-2\pi k\tfrac{F_s}{2\pi}\right)\right] \\ &\quad +\sum_k 4\pi\delta\left[\tfrac{2\pi}{F_s}\left(f-\omega_{1a}\tfrac{F_s}{2\pi}-2\pi k\tfrac{F_s}{2\pi}\right)\right]+4\pi\delta\left[\tfrac{2\pi}{F_s}\left(f+\omega_{1a}\tfrac{F_s}{2\pi}-2\pi k\tfrac{F_s}{2\pi}\right)\right] \\ &= \frac{F_s}{2\pi}\sum_k 3\pi\delta\left(f-f_0-kF_s\right)+3\pi\delta\left(f+f_0-kF_s\right) \\ &\quad +\frac{F_s}{2\pi}\sum_k 4\pi\delta\left(f-f_{1a}-kF_s\right)+4\pi\delta\left(f+f_{1a}-kF_s\right) \end{aligned}$$

de modo que

$$Y_s(f) = \frac{1}{T}\sum_k \tfrac{3}{2}\delta\left(f-f_0-kF_s\right)+\tfrac{3}{2}\delta\left(f+f_0-kF_s\right)+2\delta\left(f-f_{1a}-kF_s\right)+2\delta\left(f+f_{1a}-kF_s\right).$$

donde $f_{1a} = \omega_{1a}F_s/(2\pi) = 3\pi/4 \times 8000/(2\pi) = 3000$ Hz. Este espectro se grafica en la Fig. 5.43(f).

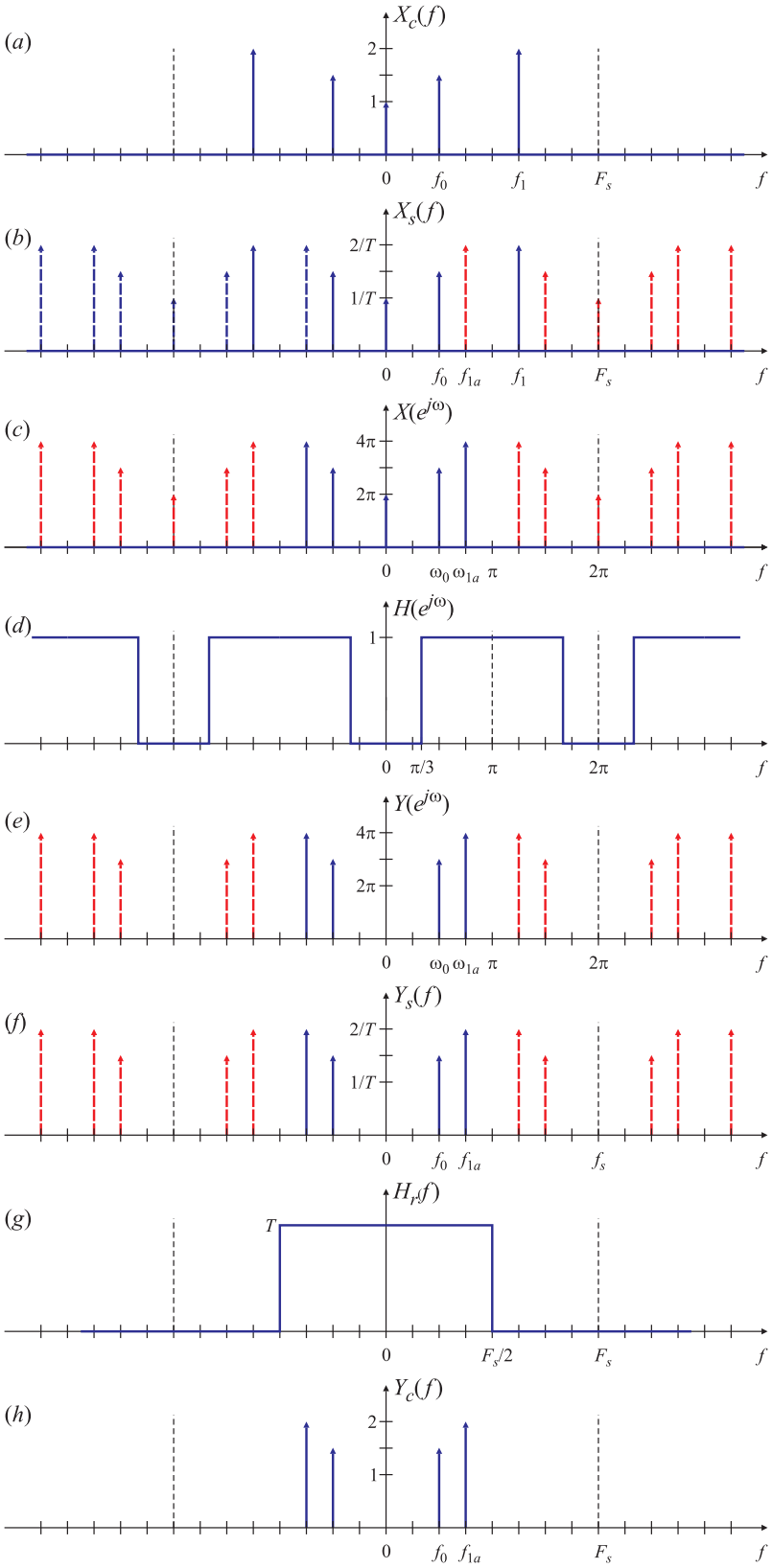


Fig. 5.43. Espectros de las diferentes señales del Ejemplo 5.19. Las réplicas se indican con líneas de trazos.

La respuesta en frecuencia del filtro reconstructor que se representa en la Fig. 5.43(g) es

$$H_r(f) = \begin{cases} T, & |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La señal continua de salida $y_c(t)$ se obtiene filtrando la señal impulsiva $y_s(t)$ por el filtro reconstructor ideal. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Y_c(f) &= H_r(f)Y_s(f) \\ &= H_r(f)\left[\frac{1}{T}\sum_k \tfrac{3}{2}\delta\left(f-f_0-kF_s\right)+\tfrac{3}{2}\delta\left(f+f_0-kF_s\right)+2\delta\left(f-f_{1a}-kF_s\right)+2\delta\left(f+f_{1a}-kF_s\right)\right] \\ &= \tfrac{3}{2}\delta\left(f-f_0\right)+\tfrac{3}{2}\delta\left(f+f_0\right)+2\delta\left(f-f_{1a}\right)+2\delta\left(f+f_{1a}\right) \end{aligned}$$

tal como se muestra en la Fig. 5.43(h).

La señal continua de salida $y_c(t)$ se puede derivar a partir del espectro $Y_s(f)$ calculado en el inciso anterior, y resulta

$$y_c(t) = 3\cos(2\pi f_0 t) + 4\cos(2\pi f_{1a} t) = 3\cos(2\pi 2000t) + 4\cos(2\pi 3000t). \tag{5.76}$$

Como la señal de entrada $x_c(t)$ no cumple con el teorema del muestreo (la mayor componente frecuencial es de frecuencia $f_1 = 5$ kHz, que es mayor que $F_s/2 = 4$ kHz) el sistema completo *no* se comporta como un sistema lineal. Esto se comprueba al comparar la señal de entrada $x_c(t)$ en (5.75) con la salida $y_c(t)$ dada por (5.76): en la señal de salida aparece una componente de frecuencia $f_{1a} = 3$ kHz que no está presente en la señal de entrada.

Para entradas que satisfagan las hipótesis del teorema del muestreo se puede calcular la respuesta en frecuencia del sistema continuo, que está dada por

$$H_c(f) = \frac{Y_c(f)}{X_c(f)} = \begin{cases} H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{f}{F_s}2\pi}, & |f| < F_s/2 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $H(e^{j\omega})$ se tiene que

$$H_c(f) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{3} < |\frac{f}{F_s}2\pi| < \pi, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{3}\frac{F_s}{2\pi} < |f| < \pi\frac{F_s}{2\pi}, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & F_s/6 < |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

que puede escribirse como

$$H_c(f) = \begin{cases} 1, & \frac{4}{3}\text{ kHz} < |f| < 4\text{ kHz}, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como se comentó anteriormente, para que todo el sistema de la Fig. 5.41 se comporte como uno lineal e invariante en el tiempo para *cualquier* tipo de entrada, se suele colocar un filtro analógico antes del conversor C/D de manera de cancelar todas las componentes de frecuencia que estén por encima de $F_s/2$. Este prefiltro será analizado en la Sección 5.11. □

El ejemplo siguiente es una variación del Ejemplo 5.13, en que el sistema de procesamiento discreto de señales continuas no se comporta como un sistema invariante en el tiempo porque la señal de entrada no es de banda limitada, y por lo tanto no cumple con las hipótesis del Teorema del muestreo. La diferencia con el Ejemplo 5.13 es que el filtro discreto es un filtro pasaaltos, en lugar de uno con función transferencia unitaria.

EJEMPLO **5.20. Procesamiento discreto de una señal continua que no está limitada en banda**

En el sistema de procesamiento discreto de señales continuas de la Fig. 5.41, el sistema discreto $H(e^{j\omega})$ es es el mismo filtro del Ejemplo 5.19. En este caso, la señal de entrada

$$x_c(t) = u(t + T/10) - u(t - T/10)$$

que se muestra en la Fig. 5.44(a) no es de banda limitada, ya que su espectro es $X_c(f) = (T/5)\,\mathrm{sinc}(Tf/5)$ [Fig. 5.44(b)]. Se desea calcular la señal continua de salida $y_c(t)$.

Cuando $x_c(t)$ se muestrea con el tren de impulsos $p_T(t)$ lo que se obtiene es la señal $x_s(t) = \delta(t)$ que se representa en la Fig. 5.44(c). El espectro $X_s(f)$ está formado por las infinitas réplicas (cada F_s) de $X_c(f)$. Como $X_c(f)$ no es de banda limitada, las réplicas se solapan, de modo que

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \tfrac{1}{T}\sum_r X_c(f - rF_s) = \tfrac{1}{T}\sum_r (T/5)\,\mathrm{sinc}[(T/5)(f - rF_s)] \\ &= \frac{1}{5}\sum_r \mathrm{sinc}(Tf/5 - r/5). \end{aligned}$$

Aunque esta suma es complicada de resolver, el espectro $X_s(f)$ se puede calcular transformando $x_s(t)$:

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1,$$

que se representa en la Fig. 5.44(d).

La señal discreta $x[n]$ resulta de convertir los impulsos continuos en impulsos discretos, cuyo valor es el área del impulso continuo. En consecuencia, $x[n] = \delta[n]$ [Fig. 5.44(e)], y su espectro es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n} = 1.$$

como se muestra en la Fig. 5.44(f). Aquí se verifica que $X(e^{j\omega}) = X_s(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}$.

La salida $y[n]$ del sistema discreto con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/3, \\ 1, & \pi/3 < |\omega| < \pi, \end{cases}$$

es la respuesta impulsiva del sistema discreto, ya que la entrada es un impulso ($x[n] = \delta[n]$), y por lo tanto se puede calcular como la antitransformada de $H(e^{j\omega})$. Este es un pasaalto con frecuencia de corte en $\pi/3$, como se muestra en la Fig. 5.44(h). Hay varias maneras de calcular $h[n]$, por ejemplo antitransformando $H(e^{j\omega})$,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega,$$

pero una particularmente sencilla es escribir el pasaaltos como la diferencia entre una constante y un pasabajos, es decir,

$$H(e^{j\omega}) = 1 - H_{PB}(e^{j\omega}),$$

de donde

$$h[n] = \delta[n] - h_{PB}[n],$$

donde $H_{PB}(e^{j\omega})$, $h_{PB}[n]$ son la respuesta en frecuencia y la respuesta impulsiva, respectivamente, de un pasabajo con frecuencia de corte en $\pi/3$. Es sencillo calcular que

$$\begin{aligned} h_{PB}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{PB}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{j2\pi n}\left(e^{j\pi n/3} - e^{-j\pi n/3}\right) \\ &= \frac{\mathrm{sen}(\pi n/3)}{\pi n} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{sen}(\pi n/3)}{\pi n/3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{sinc}(n/3), \end{aligned}$$

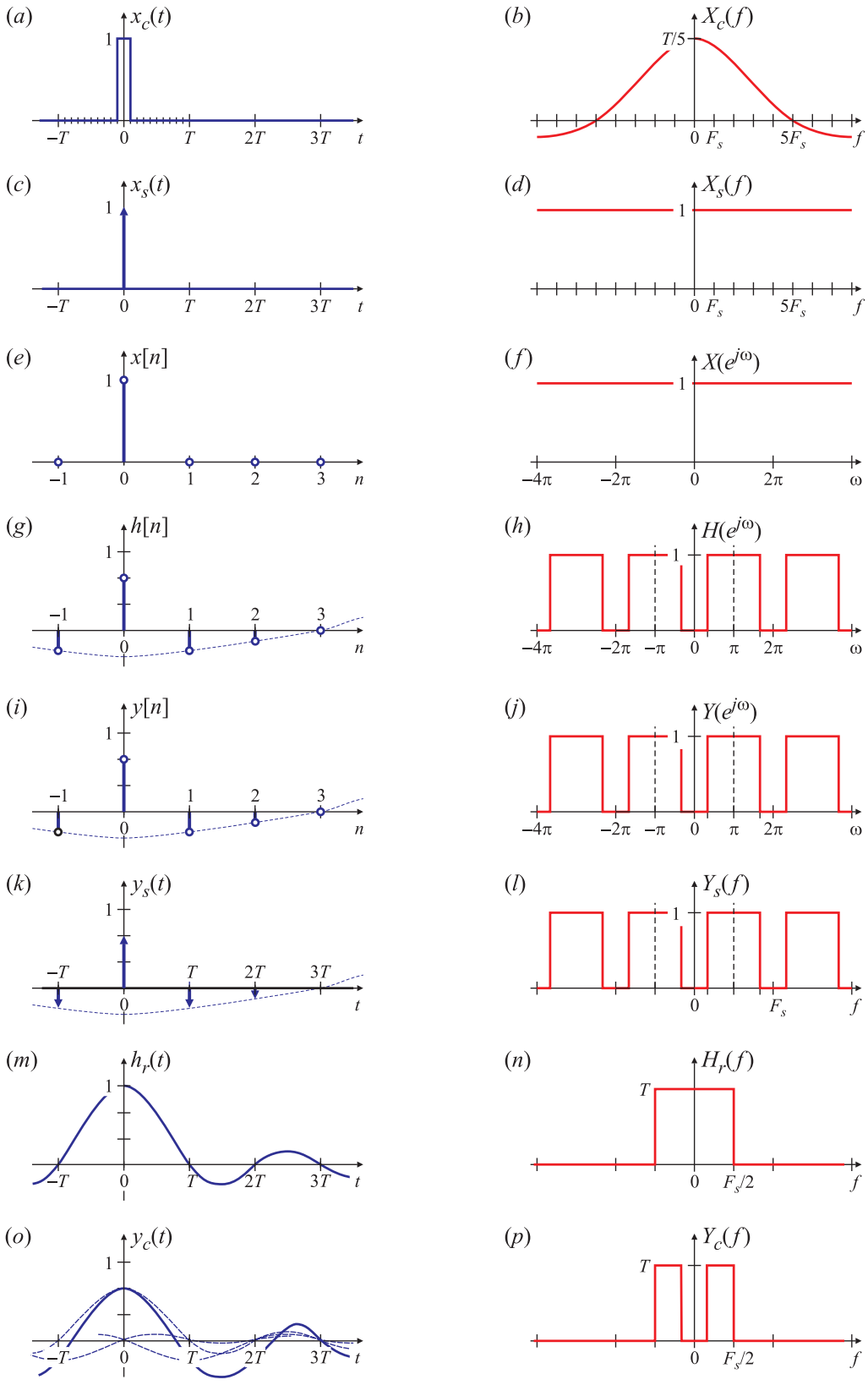


Fig. 5.44. Señales y espectros vinculados al Ejemplo 5.20.

y por lo tanto,

$$h[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sinc}(n/3) = \begin{cases} 2/3, & n = 0, \\ -(1/3)\,\mathrm{sinc}(n/3), & n \neq 0. \end{cases}$$

como se representa en la Fig. 5.44(g).

Evidentemente, $y[n] = h[n]$ pues $x[n] = \delta[n]$, y $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})$, como se representa en las Fig. 5.44(i)-(j).

Para calcular $y_s(t)$, $Y_s(f)$ se debe escalar $Y(e^{j\omega})$. Se tiene entonces,

$$\begin{aligned} Y_s(f) &= Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{f}{f_s}2\pi} = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/3, \\ 1, & \pi/3 < |\omega| < \pi, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & |\frac{f}{F_s}2\pi| < \pi/3, \\ 1, & \pi/3 < |\frac{f}{F_s}2\pi| < \pi, \end{cases} = \begin{cases} 0, & |f| < F_s/6, \\ 1, & F_s/6 < |f| < F_s/2, \end{cases} \end{aligned}$$

que se repite periódicamente cada F_s, como se muestra en la Fig. 5.44(l). Por otra parte, la señal temporal es

$$y_s(t) = \sum_n y[n]\delta(t - nT).$$

es decir, un tren de impulsos discretos modulados por la señal discreta $y[n]$, tal como se representa en la Fig. 5.44(k).

Finalmente, para obtener $y_c(t)$ se debe filtrar $y_s(t)$ con el filtro reconstructor ideal con respuesta en frecuencia

$$H_r(f) = \begin{cases} 1, & |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

graficada en la Fig. 5.44(n), y cuya respuesta impulsiva es $h_r(t) = \mathrm{sinc}(f_s t)$ [Fig. 5.44(m)]. Por lo tanto, el espectro $Y_c(f)$ de la señal continua $y_c(t)$ es la cascada de $Y_s(f)$ con $H_r(f)$,

$$Y_c(f) = Y_s(f)H_r(f) = \begin{cases} 1, & F_s/6 < |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se muestra en la Fig. 5.44(p), y la señal continua $y_c(t)$ es la convolución entre $y_s(t)$ y $h_r(t)$

$$\begin{aligned} y_c(t) &= y_s(t) * h_r(t) \\ &= h_r(t) * \sum_n y[n]\delta(t - nT) \\ &= \sum_n y[n]\{h_r(t) * \delta(t - nT)\} = \sum_n y[n]h_r(t - nT) \\ &= \sum_n \Big(\delta[n] - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sinc}(n/3)\Big)\, h_r(t - nT) \end{aligned}$$

como se representa en la Fig. 5.44(o). Una expresión cerrada para $y_c(t)$ se puede calcular fácilmente antitransformando $Y_c(f)$. Se muestran dos maneras de calcularlo.

- El espectro $Y_c(f)$ se puede escribir como la diferencia de dos pasabajos de ganancia T, uno con frecuencia de corte en $F_s/2$ y otro con frecuencia de corte en $F_s/6$:

  $$Y_c(f) = H_{PB(F_s/2)}(f) - H_{PB(F_s/6)}(f).$$

  Como $h_{PB(F_s/2)}(t) = T \times (2 \times F_s/2)\,\mathrm{sinc}(F_s t)$, y $h_{PB(F_s/6)}(t) = T \times (2 \times F_s/6)\,\mathrm{sinc}(tF_s/3)$, resulta

  $$y_c(t) = \mathrm{sinc}(F_s t) - (1/3)\,\mathrm{sinc}(F_s t/3), \tag{5.77}$$

  que se representa en la Fig. 5.45.

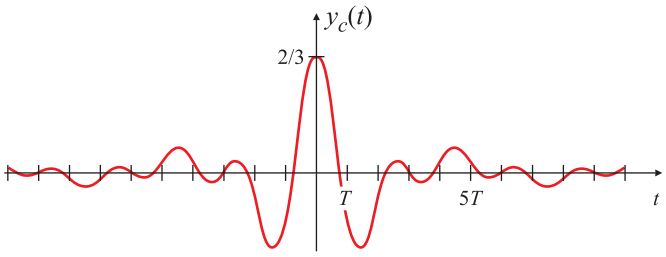


Fig. 5.45. Salida $y_c(t)$ del sistema del Ejemplo 5.20 ante una entrada $x_c(t) = u(t + T/10) - u(t - T/10)$.

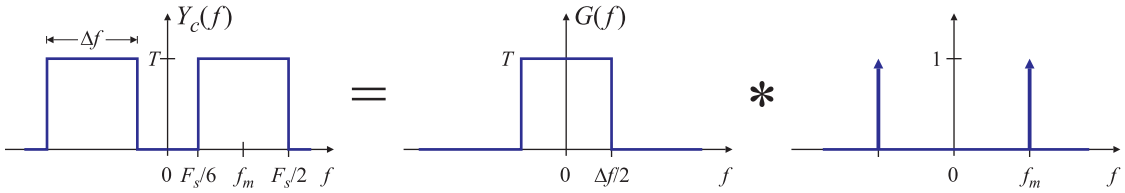


Fig. 5.46. Otra forma de calcular la antitransformada de $Y_c(f)$.

- El espectro $Y_c(f)$ se puede escribir como

$$Y_c(f) = G(f + f_m) + G(f - f_m) = G(f) * [\delta(f + f_m) + \delta(f - f_m)], \tag{5.78}$$

donde $G(f)$ está dado por

$$G(f) = \begin{cases} T, & |f| < \Delta f/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

con

$$f_m = \frac{1}{2}\left(\frac{F_s}{6} + \frac{F_s}{2}\right) = \frac{1}{3}F_s, \qquad \text{y} \qquad \Delta f = \left(\frac{F_s}{2} - \frac{F_s}{6}\right) = \frac{F_s}{3},$$

como se muestra en la Fig. 5.46. Entonces, de la ecuación (5.78), aplicando la propiedad de convolución en frecuencia, se tiene que

$$y_c(t) = g(t) \times 2\cos(2\pi f_m t)$$

donde $g(t)$ es la respuesta impulsiva del pasabajos definido por $G(f)$, es decir,

$$g(t) = T \times \Delta f \times \text{sinc}(\Delta f\, t) = T\tfrac{F_s}{3}\,\text{sinc}(\tfrac{F_s}{3}\,t) = (1/3)\,\text{sinc}(F_s t/3).$$

Entonces,

$$y_c(t) = (2/3)\,\text{sinc}(F_s t/3)\cos(2\pi F_s t/3). \tag{5.79}$$

La igualdad de (5.77) y (5.79) se puede comprobar aplicando identidades trigonométricas. □

5.9.2. Relación entre las respuestas impulsivas: invariación al impulso

En la sección anterior se mostró que el sistema cascada de la Fig. 5.31 puede comportarse de manera equivalente a un sistema continuo para entradas de banda limitada que cumplan con el teorema del muestreo. En esta sección se trata el problema de diseñar el

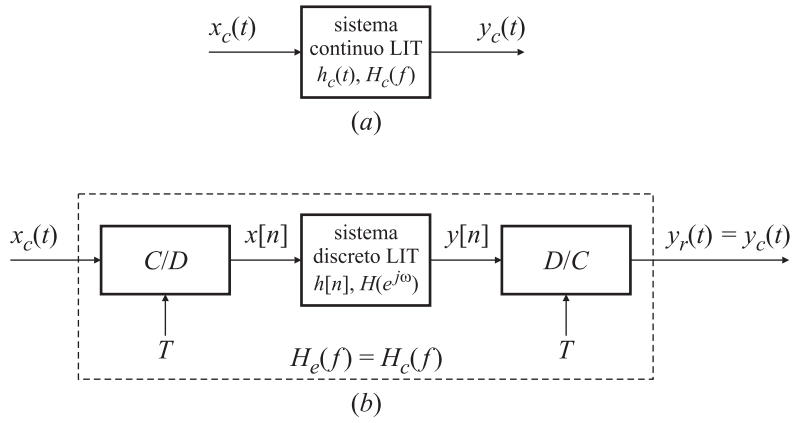


Fig. 5.47. Sistema continuo lineal e invariante en el tiempo (a). Sistema equivalente para entradas de banda limitada (b).

sistema discreto de manera que el esquema de la Fig. 5.31 se comporte como un sistema continuo dado.

En la Fig. 5.47(a) se muestra un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo, con respuesta en frecuencia $H_c(f)$ y respuesta impulsiva $h_c(t)$, que se desea implementar con un sistema discreto como el de la Fig. 5.47(b) . La ecuación (5.64) indica cómo elegir $H(e^{j\omega})$ de manera que $H_e(f) = H_c(f)$. Específicamente,

$$H(e^{j\omega}) = H_c(f)\big|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}, \quad |\omega| < \pi, \tag{5.80}$$

con el requisito adicional que la frecuencia de muestreo F_s debe elegirse de manera que

$$H_c(f) = 0 \qquad \text{para } |f| > F_s/2. \tag{5.81}$$

Si $H_c(f)$ no se anula para $|f| > F_s/2$ es imposible que los dos sistemas sean equivalentes, ya que el filtro reconstructor del conversor D/C de la Fig. 5.47(a) impone esta condición para el sistema de procesamiento discreto de señales continuas.

Bajo las restricciones impuestas por las ecuaciones (5.80) y (5.81), se puede derivar una relación entre la respuesta impulsiva $h_c(t)$ del sistema continuo, y la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema discreto. En particular, como se verá a continuación, la relación entre ambas está dada por

$$h[n] = T\, h_c(t)\big|_{t=nT} = Th_c(nT), \tag{5.82}$$

es decir, que la respuesta impulsiva del sistema discreto es una versión muestreada (cada T) y escalada (por T) de la respuesta impulsiva del sistema continuo. Cuando las respuestas impulsivas discretas $h[n]$ y continuas $h_c(t)$ están relacionadas por la ecuación (5.82) se dice que el sistema discreto es una versión *invariante al impulso* del sistema continuo.

La expresión (5.82) es consecuencia directa de la discusión de la Sección 5.3. Cuando $x[n]$ y $x_c(t)$ se reemplazan por $h[n]$ y $h_c(t)$ en (5.77), es decir

$$h[n] = h_c(t)\big|_{t=nT} = h_c(nT), \tag{5.83}$$

la ecuación (5.11) se puede escribir como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k H_c(f - kF_s)\big|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}},$$

y si se satisface (5.81)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\, H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}, \quad |\omega| < \pi. \tag{5.84}$$

Comparando la ecuación (5.80) y (5.84), la diferencia es un factor de escala $1/T$. Modificando las ecuaciones (5.83) y (5.84) para tener en cuenta este factor se tiene

$$\begin{aligned} h[n] &= |T\, h_c(t)|_{t=nT} = Th_c(nT), & (5.85)\\ H(e^{j\omega}) &= H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}, \quad |\omega| < \pi. & (5.86) \end{aligned}$$

Otra forma de obtener esta relación es a partir de la antitransformada de la TFTD, que establece que

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}\, e^{j\omega n}d\omega.$$

Cambiando las variables $\omega = 2\pi f/F_s$, resulta $d\omega = (2\pi/F_s)df$, y los extremos de integración cambian a $(-F_s/2)$ y $F_s/2$. Por lo tanto,

$$h[n] = \frac{2\pi}{F_s}\frac{1}{2\pi}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} H_c(f)e^{jf\frac{2\pi}{F_s}n}df = \frac{1}{F_s}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} H_c(f)\, df. \tag{5.87}$$

Teniendo en cuenta que $1/F_s = T$, y que $H_c(f) = 0$ si $|f| < F_s/2$, la ecuación (5.87) puede escribirse como

$$h[n] = T\int_{-\infty}^{\infty} H_c(f)e^{j2\pi f(nT)}\, df. \tag{5.88}$$

Finalmente, recordando que $h_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_c(f)e^{j2\pi ft}df$, resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_c(f)e^{j2\pi f(nT_s)}\, df = h_c(t)|_{t=nT},$$

de manera que (5.88) puede expresarse como

$$h[n] = T\, h_c(t)|_{t=nT} = Th(nT),$$

esto es, que la respuesta impulsiva del sistema muestreado son las muestras cada T segundos de la respuesta impulsiva del sistema continuo, escaladas por el factor T.

EJEMPLO **5.21. Respuesta impulsiva para un filtro pasabajos ideal**
Se desea que el sistema de la Fig. 5.47(b) se comporte como un filtro de tiempo continuo tipo pasabajos ideal con frecuencia de corte f_c cuya respuesta en frecuencia es

$$H_c(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_c. \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como se estudió en el Capítulo 2, la respuesta impulsiva de este sistema es

$$h_c(t) = 2f_c\,\mathrm{sinc}(2f_ct).$$

De acuerdo con el método de la invariación al impulso, la respuesta impulsiva del sistema discreto es

$$\begin{aligned} h[n] &= Th_c(nT) \\ &= 2Tf_c \operatorname{sinc}(2f_cTn) \\ &= \frac{2f_c}{F_s} \operatorname{sinc}\left(\frac{2f_c}{F_s}n\right) \end{aligned}$$

y definiendo $\omega_c = 2\pi f_c/F_s$, se tiene que

$$h[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right),$$

que es la expresión calculada en el Capítulo 3 de la respuesta impulsiva de un filtro discreto pasabajos ideal con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c. \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

Se verifica, además que

$$H(e^{j\omega}) = H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}$$

como postula la ecuación (5.86). □

El inconveniente con los filtros del ejemplo anterior es que no pueden implementarse porque:

- no son causales ya que las respuestas impulsivas no se anulan para $t < 0$ o para $n < 0$, y
- la respuesta impulsiva del filtro discreto no puede ser la respuesta impulsiva proveniente de una ecuación a diferencias, como se discutió en el Capítulo 3.

En el ejemplo siguiente se investiga la implementación de un filtro pasabajos no ideal de primer orden.

EJEMPLO **5.22. Invariación al impulso de un sistema de tiempo continuo con función de sistema racional**

Muchos sistemas de tiempo continuo tienen funciones transferencia de la forma

$$H_c(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_k}{s + s_n}$$

donde s_n, con $1 \leq n \leq N$ son los polos del sistema. Para simplificar la presentación se considera el caso en que el filtro está formado por un solo término, cuya función de sistema es

$$H_c(s) = A\frac{s_0}{s + s_0}, \tag{5.89}$$

donde sin pérdida de generalidad, se supone que $s_0 = 2\pi f_0 > 0$ es real (la condición $s_0 > 0$ asegura que el sistema es estable). Esta es la función transferencia de un filtro pasabajos analógico, con frecuencia de corte s_0 radianes/s o f_0 Hz, y ganancia A. (La expresión (5.89) permite que

la ganancia se mantenga constante aún cuando se varíe la posición del polo). La transformada de Fourier es

$$H_c(f) = H_c(s)|_{s=j2\pi f} = A\frac{2\pi f_0}{j2\pi f + s_0} = \frac{A}{jf/f_0 + 1}. \tag{5.90}$$

La respuesta impulsiva de (5.89) es

$$h_c(t) = As_0 e^{-s_0 t}u(t) = 2\pi f_0 A e^{-2\pi f_0 t}u(t).$$

Si se aplica el método de invariación al impulso a este sistema, se encuentra que

$$h[n] = Th_c(nT) = 2\pi f_0 T e^{-2\pi f_0 Tn}u[n],$$

cuya transformada de Fourier es

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi f_0 TA e^{-2\pi f_0 Tn}e^{-j\omega n} = 2\pi f_0 TA \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-2\pi f_0 T}e^{-j\omega}\right)^n.$$

Como por hipótesis $f_0 > 0$, entonces $|e^{-2\pi f_0 T}e^{-j\omega}| = |e^{-2\pi f_0 T}| < 1$, de modo que la sumatoria es convergente y se tiene que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2\pi f_0 TA}{1 - e^{-2\pi f_0 T}e^{-j\omega}} = A\frac{2\pi(f_0/F_s)}{1 - e^{-2\pi(f_0/F_s)}e^{-j\omega}}. \tag{5.91}$$

Comparando (5.89) con (5.91) se nota que no se verifica (5.80), porque

$$H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}} = \left.\frac{A}{jf/f_0 + 1}\right|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}} = \frac{A}{j\frac{F_s}{2\pi}\frac{1}{f_0}\omega + 1} \tag{5.92}$$

¿Porqué (5.91) es distinta de (5.92)? ¿Se ha cometido algún error? □

El problema con el Ejemplo 5.22 es que la respuesta en frecuencia del sistema (5.89) *no es de banda limitada*. Como se mencionó más arriba, en este caso $H_c(f)$ es un filtro pasabajos, y por lo tanto la respuesta en frecuencia (5.90) del sistema no se anula en ningún rango de frecuencias. A medida que f crece, el valor de $|H_c(f)|$ es cada vez más pequeño, pero nunca se anula. Entonces la respuesta impulsiva $h[n]$ no es una señal de banda limitada, y cuando se la muestrea (para obtener $h[n]$ y diseñar el sistema discreto) *siempre* ocurre distorsión por solapamiento.

Este será menor cuando la frecuencia esquina del filtro esté más alejada de la frecuecia de muestreo. En el filtro (5.90) la frecuencia esquina en Hertz es s_0. Por lo tanto, cuanto más pequeña sea la relación $f_0/F_s = f_0 T$ tanto menor deberá ser el efecto del *aliasing*. Si $f_0 \ll F_s$, entonces $f_0 T \ll 1$, y

$$\begin{aligned} e^{-2\pi f_0 T} &= 1 - 2\pi f_0 T + \frac{1}{2}(-2\pi f_0 T)^2 + \frac{1}{3!}(-2\pi f_0 T)^3 + \cdots \\ &\simeq 1 - 2\pi f_0 T \qquad \text{si } f_0 T \ll 1. \end{aligned} \tag{5.93}$$

Por otra parte, si el análisis se limita a la región de bajas frecuencias, es decir que $\omega \ll 1$, también puede aproximarse

$$e^{-j\omega} \simeq 1 - j\omega. \tag{5.94}$$

Reemplazando (5.93) y (5.94) en (5.91), se tiene que

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{2\pi f_0 TA}{1-e^{-2\pi f_0 T}e^{-j\omega}} \simeq \frac{2\pi f_0 TA}{1-(1-2\pi f_0 T)(1-j\omega)} \\ &\simeq \frac{2\pi f_0 TA}{1-1+2\pi f_0 T+j\omega} \qquad (5.95) \\ &= A\frac{1}{j\frac{1}{2\pi f_0 T}\omega+1} \qquad (5.96) \end{aligned}$$

Para pasar de (5.95) a (5.96) se despreció el producto de las dos cantidades pequeñas $\omega \times f_0 T$. Finalmente, se tiene que

$$H(e^{j\omega}) \simeq \frac{A}{j\frac{F_s}{f_0}\frac{\omega}{2\pi}+1}, \qquad \text{si } f_0/F_s \ll 1 \text{ y } \omega \ll 1. \qquad (5.97)$$

Bajo estas aproximaciones, la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema discreto dada por (5.97) coincide con (5.92), y por lo tanto satisface la relación (5.80). Es decir, que aunque el sistema no es de banda limitada, si la frecuencia de corte es mucho menor que la frecuencia de muestreo, y para bajas frecuencias (lejos de la frecuencia de muestreo) la expresión (5.80)

$$H(e^{j\omega}) = H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}.$$

es "aproximadamente" cierta.

La comparación entre $H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}$ y $H(e^{j\omega})$ dadas por las ecuaciones (5.91) y (5.92), respectivamente, se ilustra en la Fig. 5.48 para filtros con distintos anchos de banda. El eje de frecuencia se ha normalizado a F_s o a 2π para poder comparar las respuestas de los filtros continuo y discreto sobre un mismo gráfico. En las curvas de la columna izquierda el eje de frecuencias es lineal, mientras que en las de la derecha es logarítmico para poder apreciar mejor la variación del ancho de banda del filtro. En la Tabla 5.2 se indican los valores del módulo de la respuesta en frecuencia para ambos filtros en tres frecuencias destacadas: continua ($f = \omega = 0$), la frecuencia de corte ($f/F_s = \omega/(2\pi) = f_0/F_s$), y a la mitad de la frecuencia de muestreo ($f/F_s = \omega/(2\pi) = 1/2$).

En la Fig. 5.48(a) se muestran las respuestas en frecuencia cuando la frecuencia de corte f_0 del filtro analógico $H_c(f)$ es de un centésimo de la frecuencia de muestreo ($f_0 = 0{,}01F_s$). La respuesta de los filtros es prácticamente idéntica para todo el rango de frecuencias del filtro discreto (en los gráficos, hasta $\pm 0{,}5\ f/F_s$). La variación de la ganancia es mínima, aunque el filtro discreto tiene una ganancia 1,5 veces mayor a al mitad de la frecuencia de muestreo.

Si la frecuencia de corte del filtro f_0 es una vigésima parte de la frecuencia de muestreo ($f_0 = 0{,}05F_s$, Fig. 5.48(b)) las respuestas empiezan a diferenciarse. El filtro discreto tiene una ganancia de continua mayor, y una atenuación de aproximadamente la mitad en $f/F_s = \omega/(2\pi) = 0{,}5$, como se indica en la Tabla 5.2.

Para $f_0 = F_s/10$ (Fig. 5.48(c)) las respuestas son muy distintas. La ganancia en continua del filtro discreto es un 37 % mayor que la del filtro continuo, y la atenuación en $f/F_s = \omega/(2\pi) = 0{,}5$ es menos de la mitad.

Esta comparación indica que la relación $H(e^{j\omega}) = H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}$ que es válida cuando el sistema continuo es de banda limitada, deja de serlo para sistemas analógicos "comunes",

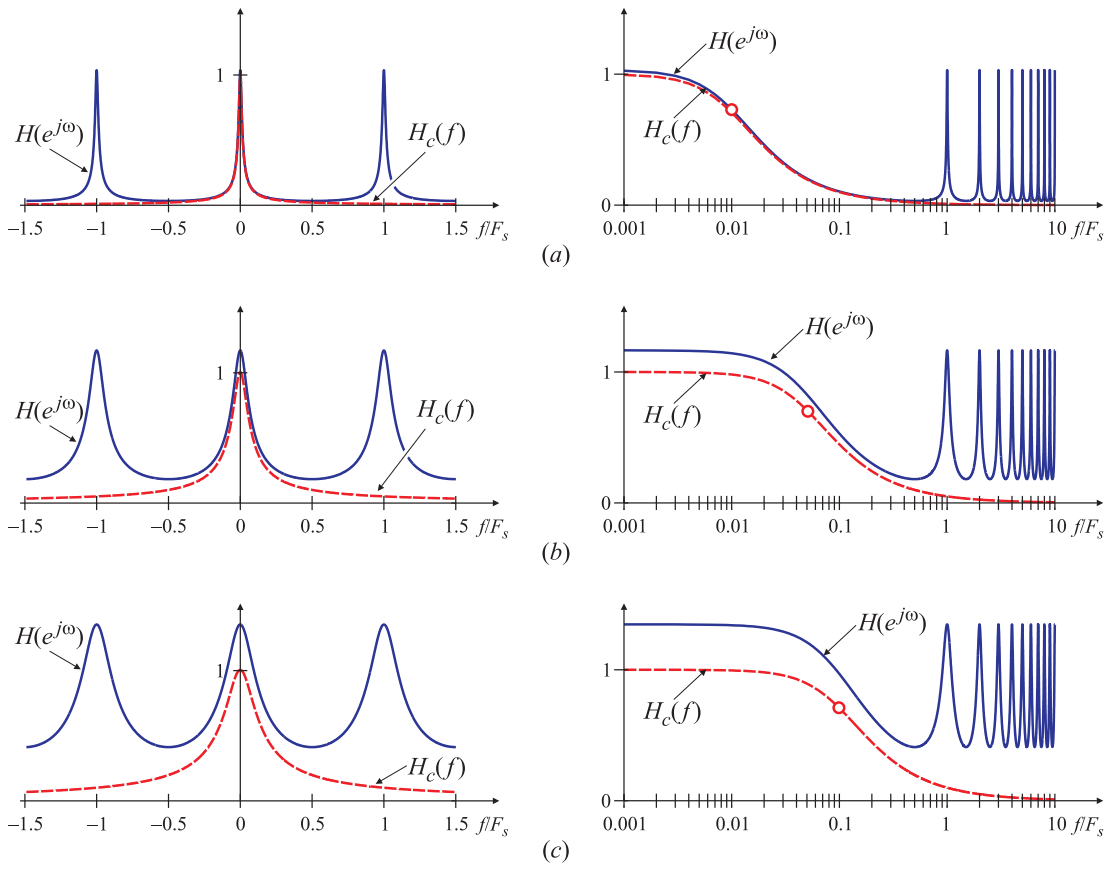


Fig. 5.48. Módulo de la respuesta en frecuencia del sistema continuo $H_c(f)$ y del sistema discreto $H(e^{j\omega})$ derivado por el método de invariación al impulso, graficados en función de la frecuencia normalizada, en escala lineal (izquierda) y logarítmica (derecha) para distintas frecuencias de corte del filtro pasabajos: $f_0 = 0{,}01F_s$ (a), $f_0 = 0{,}05F_s$ (b); $f_0 = 0{,}1F_s$ (c). El círculo indica la frecuencia de corte f_0, donde la amplitud cae al 70 % (−3 dB).

Tabla 5.2: Comparación de los módulos de las respuestas en frecuencia del filtro continuo $H_c(f)$ y discreto $H(e^{j\omega})$ para distintos anchos de banda.

	$f_0 = 0{,}01F_s$		$f_0 = 0{,}05F_s$		$f_0 = 0{,}1F_s$	
f/F_s	$\lvert H_c(f)\rvert$	$\lvert H(e^{j\omega})\rvert$	$\lvert H_c(f)\rvert$	$\lvert H(e^{j\omega})\rvert$	$\lvert H_c(f)\rvert$	$\lvert H(e^{j\omega})\rvert$
0	1,000	1,031	1,000	1,165	1,000	1,374
f_0/F_s	0,707	0,729	0,707	0,827	0,707	0,968
1/2	0,020	0,032	0,099	0,181	0,196	0,410

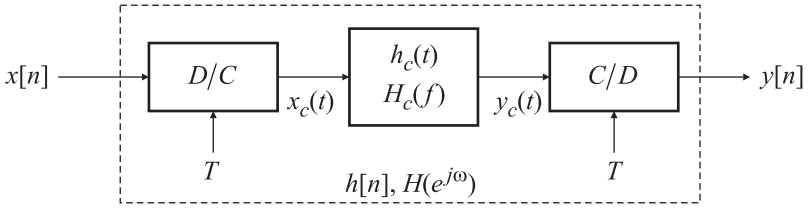


Fig. 5.49. Sistema de procesamiento en tiempo continuo de señales discretas.

es decir, expresados como funciones transferencia con polos y con ceros. La igualdad es aproximadamente cierta si las singularidades del sistema continuo (los polos) están ubicados en frecuencias mucho menores a la frecuencia de muestreo.

5.10. Procesamiento en tiempo continuo de señales discretas

En la Sección 5.9 se estudió el empleo de un sistema de tiempo discreto para procesar señales de tiempo continuo según el esquema que se muestra en la Fig. 5.31. En esta sección se considera una situación complementaria, representada en la Fig. 5.49, que ilustra un sistema para procesar señales discretas $x[n]$, $y[n]$ utilizando un sistema continuo con respuesta impulsiva $h_c(t)$ y respuesta en frecuencia $H_c(f)$.

Mientras el esquema de la Fig. 5.31 es ampliamente utilizado en una gran cantidad de aplicaciones (cualquier teléfono celular, reproductor de audio o video, etc., responde a ese esquema) el diagrama de la Fig. 5.49 sólo tiene interés teórico, y sirve para *interpretar* el funcionamiento de cierta clase de sistemas discretos.

De la definición del conversor D/C ideal, $X_c(f)$ es nula para $|f| > F_s/2$, y por lo tanto también se anulará $Y_c(f)$ en ese rango de frecuencias. Por lo tanto, el conversor C/D muestrea $y_c(t)$ sin aliasing. Las señales continuas $x_c(t)$, $y_c(t)$ se pueden expresar en función de las señales discretas $x[n]$, $y[n]$ como

$$x_c(t) = \sum_n x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \tag{5.98}$$

y

$$y_c(t) = \sum_n y[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \tag{5.99}$$

donde $x[n] = x_c(t)|_{t=nT}$, e $y[n] = y_c(t)|_{t=nT}$. Las relaciones en el dominio frecuencia para el esquema de la Fig. 5.49 son

$$X_c(f) = T\, X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}, \qquad |f| < F_s/2, \tag{5.100}$$

$$Y_c(f) = H_c(f)X_c(f), \qquad |f| < F_s/2, \tag{5.101}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\, Y_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}, \qquad |\omega| < \pi. \tag{5.102}$$

Sustituyendo la ecuación (5.100) en la (5.101) y el resultado en la (5.102) se encuentra que el sistema completo se comporta como un sistema discreto cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = H_c(f)|_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}}, \qquad |\omega| < \pi,$$

o, en otras palabras, la respuesta en frecuencia del sistema de la Fig. 5.49 será equivalente a una dada $H(e^{j\omega})$ si la respuesa en frecuencia del sistema continuo es

$$H_c(f) = H_c(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}, \qquad |f| < F_s/2. \tag{5.103}$$

Como $X_c(f) = 0$ para $|f| \geq F_s/2$, la respuesta en frecuencia del sistema $H_c(f)$ puede elegirse arbitrariamente por encima de $F_s/2$. Una elección conveniente, pero arbitraria, es $H_c(f) = 0$ para $|f| \geq F_s/2$.

Con esta representación de un sistema discreto se puede analizar el efecto que causa el sistema continuo equivalente en la señal de banda limitada $x_c(t)$, como se estudia en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO **5.23. Retardo fraccionario**
Sea el sistema discreto lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\Delta\omega}, \qquad |\omega| < \pi. \tag{5.104}$$

Cuando Δ es un entero, este sistema se puede interpretar como un retardo de Δ muestras, porque la antitransformada de Fourier de (5.104) es

$$h[n] = \delta[n - \Delta],$$

que corresponde a un SLIT con ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n - \Delta]. \tag{5.105}$$

Si Δ no es un entero, la ecuación (5.105) no tiene un significado formal, porque no se puede retrasar la sucesión $x[n]$ por una cantidad que no sea un número entero. Sin embargo, con la ayuda del sistema de la Fig. 5.49 se puede interpretar en tiempo continuo al sistema definido por la ecuación (5.104). Si el sistema $H_c(f)$ de la Fig. 5.49 se define como

$$H_c(f) = H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} = e^{j2\pi\Delta\frac{1}{F_s}f} = e^{j2\pi\Delta Tf}, \tag{5.106}$$

donde $T = 1/F_s$, de la ecuación (5.103) resulta que el sistema de tiempo discreto tendrá la respuesta en frecuencia especificada por (5.104), independientemente que Δ sea entero o no. Recordando las propiedades de la transformada de Fourier del Capítulo 2, se observa que (5.106) representa un retardo temporal (de tiempo continuo) de ΔT segundos. Por lo tanto,

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta T). \tag{5.107}$$

De acuerdo con el esquema de la Fig. 5.49, $x_c(t)$ es una interpolación de banda limitada de $x[n]$, e $y[n]$ se obtiene muestreando $y_c(t)$. Por ejemplo, si $\Delta = 1/2$, $y[n]$ estaría formada por las muestras de la interpolación $x_c(t)$ de $x[n]$ tomadas entre medio de las muestras originales, como se muestra en la Fig. 5.50.

También se puede obtener una interpretación temporal del sistema definido por la respuesta en frecuencia (5.104), es decir, encontrar su respuesta impulsiva. Esto se puede conseguir de dos maneras:

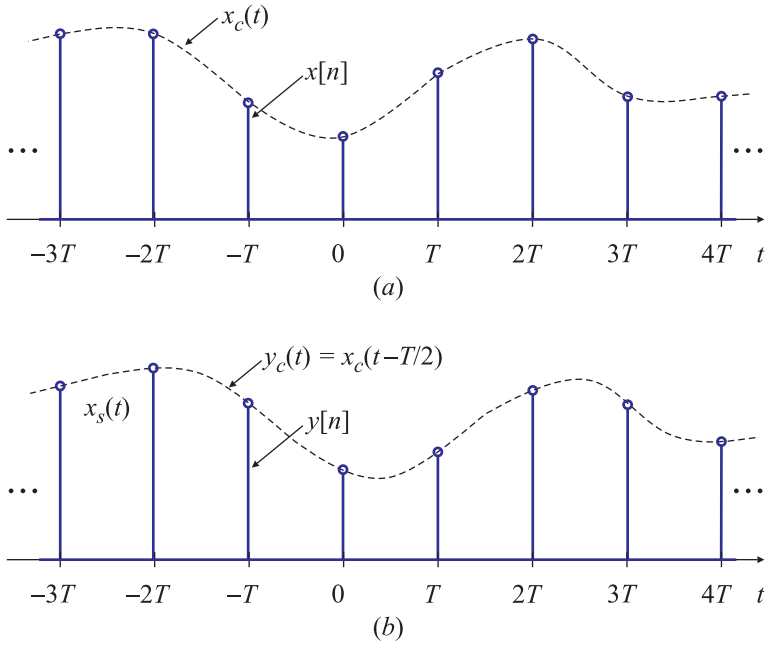


Fig. 5.50. El procesamiento en tiempo continuo de señales discretas para la señal (a) produce una salida retardada media muestra (b).

- A partir de la antitransformada de (5.104):

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\Delta\omega}e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-\Delta)\omega}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{j(n-\Delta)}e^{j(n-\Delta)\omega}\Big|_{\omega=-\pi}^{\omega=\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(n-\Delta)}\left[e^{j(n-\Delta)\pi} - e^{-j(n-\Delta)\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}[\pi(n-\Delta)]}{(n-\Delta)} \end{aligned}$$

  que puede escribirse como

$$h[n] = \operatorname{sinc}(n-\Delta).$$

- De las ecuaciones (5.107) y (5.98) se obtiene

$$\begin{aligned} y[n] &= y_c(t)|_{t=nT} = x_c(t-\Delta T)|_{t=nT} \\ &= \sum_{\ell} x[\ell]\operatorname{sinc}[(t-\Delta T-\ell T)/T]|_{t=nT} \\ &= \sum_{\ell} x[\ell]\operatorname{sinc}(n-\Delta-\ell) \end{aligned}$$

  que por definición, es la expresión de la convolución de $x[n]$ con

$$h[n] = \operatorname{sinc}(n-\Delta) \qquad -\infty < n < \infty. \qquad \square$$

Es interesante notar que si Δ es un entero, $\Delta = n_0 \in \mathbb{Z}$, se deduce fácilmente que $h[n] = \delta[n-n_0]$, que es la respuesta impulsiva del sistema discreto conocido como retar-

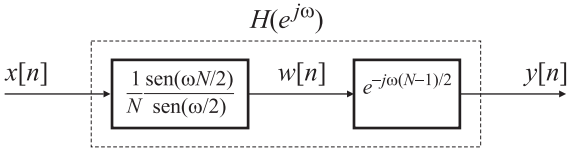


Fig. 5.51. El sistema promediador representado como la cascada de dos sistemas.

do ideal, y estudiado en el Capítulo 3. Sin embargo, si Δ no es un entero, $h[n]$ es un sistema tipo IIR: su respuesta impulsiva tiene longitud infinita. Además no es causal porque $h[n] \neq 0$ para $n < 0$, y tampoco se puede implementar como una ecuación a diferencias, tal como se mostró en el Capítulo 3 para los filtros ideales, porque la respuesta impulsiva no es de la forma $a^n u[n]$. Este resultado indica que si uno quisiera retardar una sucesión en fracciones de muestra, no podría conseguirlo con un sistema lineal e invariante en el tiempo. En muchísimas aplicaciones es deseable poder retardar una señal discreta un número fraccionario de muestras, por ejemplo, para separar espacialmente distintas fuentes de sonido, o sumar aditivamente distintas señales que provienen de una fuente lejana, como es el caso del sonar. En este caso se usan sistemas variantes en el tiempo conocidos como *interpoladores* que permiten retardar una señal la cantidad deseada (sea un número entero o fraccionario de muestras) sin necesidad de convertir la señal discreta a otra señal continua en et tiempo y viceversa. En definitiva, el esquema de la Fig. 5.49 nunca se usa en la práctica.

Los retardos fraccionarios, en particular fracciones de $1/2$ muestra, suelen aparecer frecuentemente en la representación frecuencial de sistemas discretos. Cuando este tipo de términos aparece en la respuesta en recuencia de un sistema, su efecto sobre la respuesta impulsiva $h[n]$ puede interpretarse bajo la luz del Ejemplo 5.23, como se muestra a continuación.

EJEMPLO **5.24. Promediador con retardo fraccionario**
El promediador causal de N muestras con respuesta impulsiva

$$h[n] = \begin{cases} 1/N, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

tiene respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\frac{\text{sen}(\omega N/2)}{\text{sen}(\omega/2)} e^{j\frac{N-1}{2}\omega}. \tag{5.108}$$

Esta representación de la respuesta en frecuencia sugiere que el promediador de N muestras se puede interpretar como la cascada de dos sistemas, tal como se muestra en la Fig. 5.51. El primer sistema modela la variación de la ganancia en función de la frecuencia, y el segundo sistema representa el término de fase lineal $e^{j\frac{N-1}{2}\omega}$ en la ecuación (5.108). Si N es un entero impar, el término de fase lineal corresponde a un retardo unitario:

$$y[n] = w\left[n - \tfrac{N-1}{2}\right].$$

En cambio, si N es par, el término de fase lineal corresponde a un retardo no entero, específicamente, un "número entero más media" muestra. Este retardo no entero puede interpretarse en función del Ejemplo 5.23, es decir, $y[n]$ es equivalente a la interpolación de banda limitada de $w[n]$, en cascada

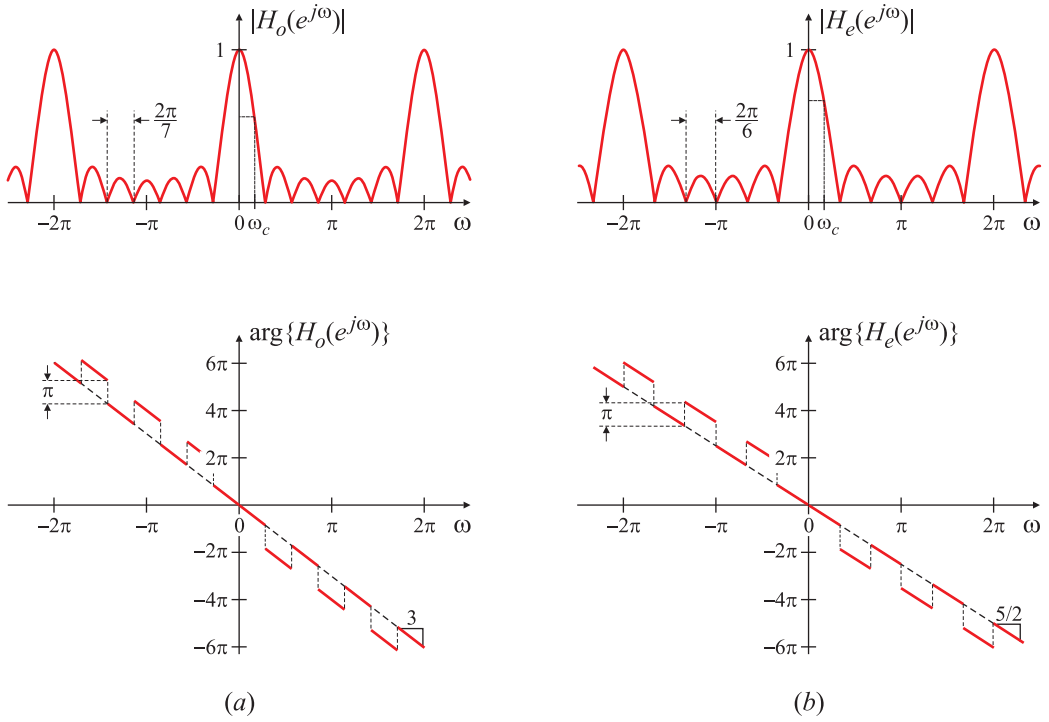


Fig. 5.52. Respuesta en frecuencia en módulo y fase del promediador de largo impar con $N_o = 7$ (a) y de largo par con $N_e = 6$ (b).

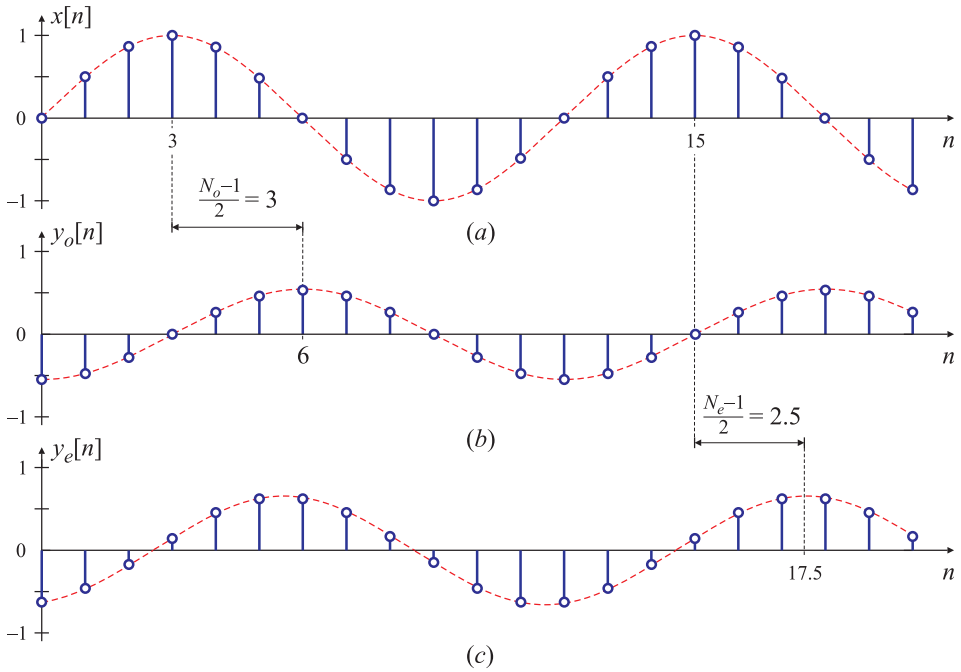


Fig. 5.53. Entrada $x[n]$ (a), salida $y_o[n]$ del promediador de largo impar con $N_o = 7$ (b) y salida $y_e[n]$ del promediador de largo par $N_e = 6$ (c).

con un retardo de tiempo continuo $\Delta = (N-1)T/2$ (donde T es el período de muestreo asociado con la interpolación de $w[n]$ por el conversor D/C), seguido por un conversor C/D con período de muestreo T.

En la Fig. 5.52(a) se muestra la respuesta en frecuencia del sistema (5.108) para el caso en que N es impar $(N = N_o = 7)$, y en la Fig. 5.52(b) para el caso en que N es par $(N = N_e = 6)$. Si ambos sistemas se excitan con una entrada $x[n] = \text{sen}(\omega_c n)$ con $\omega_c = \pi/6$, representada en la Fig. 5.53(a) , la salida de estado estacionario es

$$y[n] = |H(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\omega_c} \text{sen}(\omega_c + \phi),$$

donde $\phi = \arg\{ H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega_c}\}$, como se estudió en el Capítulo 3. Según sea N par o impar se tiene que:

- Si N es impar $(N = N_o = 7)$ se tiene que

$$\begin{aligned} |H_o(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\pi/6} &= \left| \frac{1}{N_o} \frac{\text{sen}(\omega N_o/2)}{\text{sen}(\omega/2)} e^{j\frac{N_o-1}{2}\omega} \right| = \frac{1}{7}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \approx 0{,}53, \\ \phi_o &= \arg\left\{ |H_o(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\pi/6} \right\} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

  de modo que

$$y_o[n] = \frac{1}{7}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \text{sen}\left(\tfrac{\pi}{6}n - \tfrac{\pi}{2}\right). \tag{5.109}$$

- Si N es par $(N = N_e = 6)$ el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia son

$$\begin{aligned} |H_e(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\pi/6} &= \left| \frac{1}{N_e} \frac{\text{sen}(\omega N_e/2)}{\text{sen}(\omega/2)} e^{j\frac{N_e-1}{2}\omega} \right| = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \approx 0{,}64 \\ \phi_e &= \arg\left\{ |H_e(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\pi/6} \right\} = -\frac{5\pi}{12}, \end{aligned}$$

  y entonces la salida de estado estacionario es

$$y_e[n] = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \text{sen}\left(\tfrac{\pi}{6}n - \tfrac{5}{12}\pi\right). \tag{5.110}$$

Las expresiones (5.109) y (5.110) muestran que tanto el promediador de largo $N = N_o = 7$ como $N = N_e = 6$ no sólo reducen la amplitud de la señal, sino que introducen un desfasaje $(\phi_o = -\pi/2$ o $\phi_e = 5\pi/12)$ que se puede expresar en muestras, reescribiendo estas ecuaciones como

$$\begin{aligned} y_o[n] &= \frac{1}{7}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \text{sen}\left[\tfrac{\pi}{6}(n-\Delta_o)\right], \\ y_e[n] &= \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \text{sen}\left[\tfrac{\pi}{6}(n-\Delta_e)\right], \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_o = -\frac{\phi_o}{\omega_c} = -\frac{-\pi/2}{\pi/6} = 3, \qquad \Delta_e = -\frac{\phi_e}{\omega_c} = -\frac{-5\pi/12}{\pi/6} = \frac{5}{2}.$$

Las formas de onda de las señales de entrada y de salida para cada caso se muestran en la Fig. 5.53 donde se ha graficado en línea de trazos la señal de tiempo continuo que hubiese sido interpolada por el conversor D/C ideal tanto para la señal de entrada en la Fig. 5.53(a) como para las señales de salida del sistema promediador de largo impar y par, en las Fig. 5.53(b) y (c) , respectivamente. Para el caso del promediador de largo impar $N = N_o = 7$, la salida del sistema queda retrasada 3 muestras respecto a la señal de entrada, como se observa al comparar el pico de la entrada en

$n = 3$ con el pico de la salida $y_o[n]$ en $n = 6$ en la Fig. 5.53(b) . Para el promediador de largo par con $N = N_e = 6$, la salida del sistema es una señal muestreada que queda desfasada 2,5 muestras respecto de la señal de entrada, como se muestra en la Fig. 5.53(c) . La diferencia entre el máximo de la interpolación de la señal de entrada, por ejemplo el ubicado en $n = 15$, y el máximo de la interpolación de la señal de salida que aparece en $n = 17{,}5$ es de $17{,}5 - 15 = 2{,}5$ muestras. □

5.11. Procesamiento digital de señales analógicas

Hasta ahora, en la discusión de la representación de señales de tiempo continuo por señales discretas se han utilizado modelos ideales para el muestreo periódico y la interpolación o reconstrucción. Estos procesos se han estudiado haciendo uso de un convertidor *continuo a discreto* (C/D) ideal, y de un interpolador de banda limitada, también ideal, que denominamos convertidor *discreto a continuo* (D/C). Estos convertidores idealizados permiten concentrarse en los detalles matemáticos escenciales de la relación entre una señal de tiempo continuo y de banda limitada y sus muestras. Por ejemplo, en la Sección 5.9 se utilizaron los conversores C/D y D/C ideales para demostrar que un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo puede utilizarse en la configuración que se muestra en la Fig. 5.54(a) para implementar un sistema lineal e invariante en el tiempo de tiempo continuo, siempre y cuando la entrada sea una señal de banda limitada, y que la componente frecuencial máxima de esta seña y la frecuencia de muestreo cumplan con los requisitos del teorema del muestreo.

En la práctica, la señales de tiempo continuo no son exactamente de banda limitada, los filtros ideales no pueden implementarse (como se mostró en los ejemplos del Capítulo 3) y en lugar de los conversores C/D y D/C ideales se utilizan dispositivos que se denominan conversores analógico-digitales (A/D) y digitales-analógicos (D/A), que tienen una funcionalidad similar, pero no idéntica. El diagrama bloque de la Fig. 5.54(b) muestra un modelo más realista de un sistema que permite procesar señales de tiempo continuo utilizando sistemas discretos, es decir, procesar señales analógicas por medios digitales. En esta sección se examinarán algunas de las diferencias entre los distintos componentes de los sistemas de la Fig. 5.54.

.

5.11.1. Prefiltrado para evitar la distorsión por solapamiento

Cuando se procesan señales analógicas utilizando sistemas de tiempo discreto, es deseable utilizar la menor frecuencia de muestreo posible, ya que el volumen de operaciones aritméticas necesarias para implementar el sistema discreto es proporcional al número de muestras a procesar. Si la señal de entrada no está limitada en banda, o si su máxima componente frecuencial es muy alta, puede ser necesario filtrar (analógicamente) la señal antes de muestrearla. Por ejemplo, en el procesamiento de señales vocales para uso telefónico es habitual limitar el ancho de banda entre 300 Hz hasta 3 kHz o 4 kHz, que es suficiente para asegurar la inteligibilidad, aún cuando este tipo de señales puede tener un contenido frecuencial importante en la banda comprendida entre 4 kHz a 20 kHz.

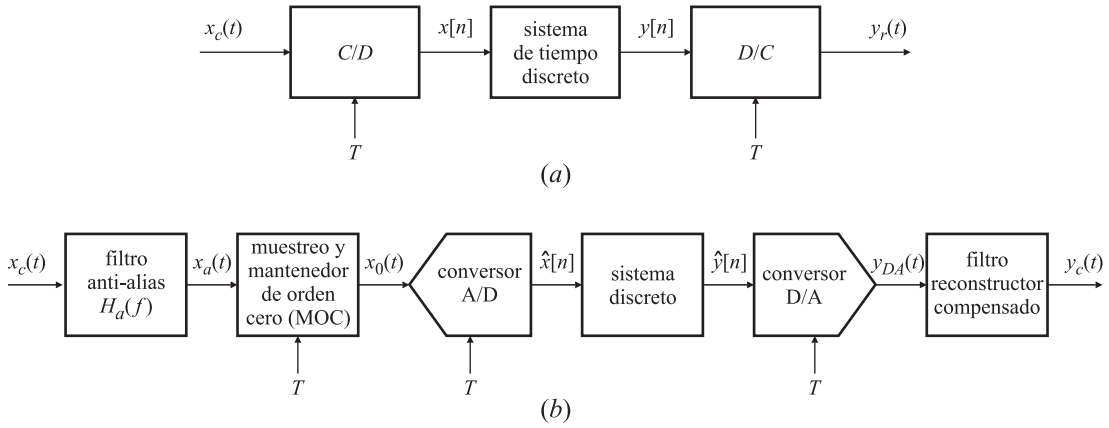


Fig. 5.54. Procesado discreto de señales de tiempo continuo (a) vs. procesado digital de señales analógicas (b).

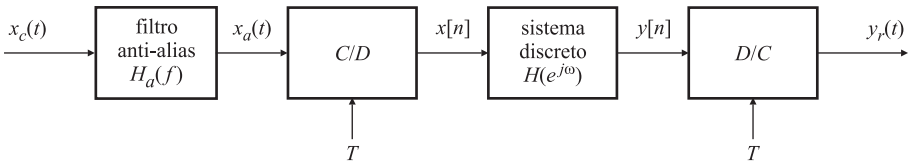


Fig. 5.55. Esquema de prefiltrado para evitar el aliasing.

Además, aún cuando la señal sea de banda limitada, el ruido aditivo de banda ancha puede tener componentes frecuenciales superiores a $F_s/2$, y por lo tanto al muestrear la señal, las componentes de alta frecuencia del ruido quedarán replicadas en baja frecuencia. Si se desea evitar la distorsión por solapamiento, se limita en banda la señal de entrada filtrándola con un filtro pasabajos previo a la conversión A/D, como se muestra en la Fig. 5.55. Este filtro analógico se conoce como *prefiltro* o *filtro antialiasing*, y su respuesta en frecuencia ideal está dada por

$$H_a(f) = \begin{cases} 1, & |f| < F_s/2, \\ 0, & |f| > F_s/2. \end{cases} \tag{5.111}$$

De la discusión de la Sección 5.9.1 se desprende que la respuesta en frecuencia del sistema completo, desde la salida del prefiltro $x_a(t)$ hasta la salida del filtro reconstructor compensado $y_c(t)$ se comportará siempre como un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo ya que la entrada $x_a(t)$ al conversor C/D no tiene componentes frecuenciales superiores a $F_s/2$ [éstas han sido removidas por el prefiltro $H_a(f)$]. Por lo tanto, la respuesta en frecuencia efectiva del sistema de la Fig. 5.55 entre la entrada $x_c(t)$ y la salida $y_c(t)$ seá el producto de $H_a(f)$ y la respuesta en frecuencia efectiva desde $x_a(t)$ a $y_c(t)$, que está dada por la ecuación (5.64); es decir

$$H_e(f) = \begin{cases} H(e^{j\omega})\big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}, & \text{para } |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{para } |f| > F_s/2. \end{cases} \tag{5.112}$$

Por lo tanto, si se utiliza un filtro antialiasing ideal, el sistema de la Fig. 5.55 se comporta como un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta en frecuencia $H_e(f)$ dada

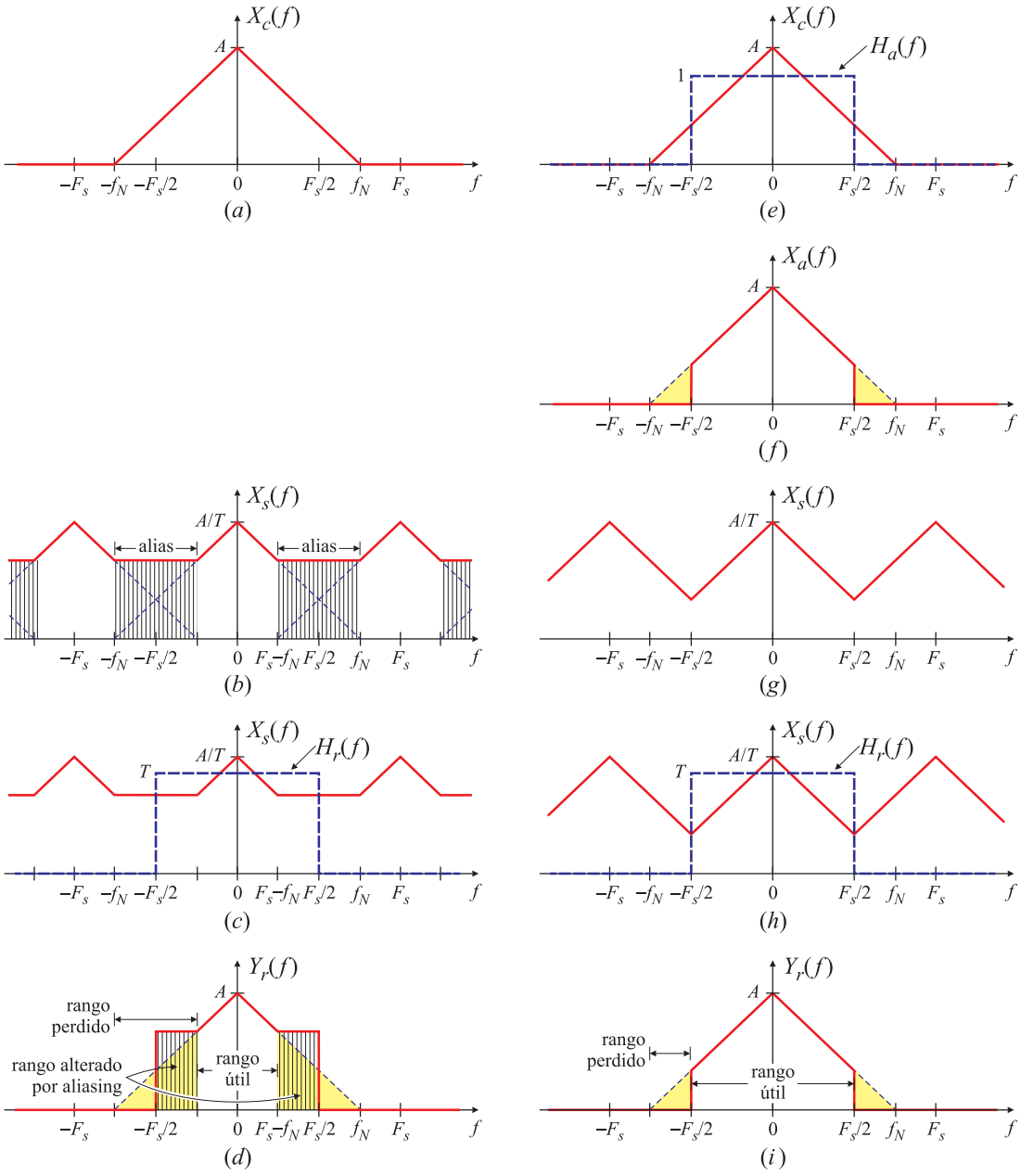


Fig. 5.56. El filtro antialiasing permite extender el rango de frecuencias donde el sistema de procesamiento discreto de señales continuas se comporta como un sistema lineal e invariante en el tiempo. Sistema sin (a)-(d) y con (e)-(i) filtro antialiasing.

por (5.112), aún cuando el espectro $X_c(f)$ de la señal de entrada $x_c(t)$ no esté limitado en banda.

El uso de un prefiltro permite extender el rango de frecuencias donde el sistema de procesamiento discreto de datos continuos se comporta como un sistema lineal e invariante en el tiempo, como se muestra en la Fig. 5.56. El espectro de una señal de banda limitada, pero cuya frecuencia máxima f_N es menor que la mitad de la frecuencia de muestreo $F_s/2$ se muestra en la Fig. 5.56(a). Al muestrear esta señal cada $T = 1/F_s$ se produce distorsión por solapamiento, afectando el espectro $X_s(f)$ como se representa en la Fig. 5.56(b):

el rango de frecuencias alterado queda comprendido entre $F_s - f_N$ y $F_s/2$. Si se procesa esta señal con un filtro reconstructor $H_r(f)$, como se muestra en la Fig. 5.56(c) , se obtiene la señal de salida cuyo espectro $Y_r(f)$ se grafica en la Fig. 5.56(d) . El espectro $Y_r(f)$ de la señal de salida es muy diferente del de la señal de entrada $X_c(f)$. El rango de frecuencias "útiles", es decir, que no quedan afectados por distorsión, es de $\pm(F_s - f_N)$, y el rango de frecuencias del espectro de la señal de entrada que se ve afectado es de $f_N - (F_s - f_N) = 2f_N - F_s$. En otras palabras, el rango de frecuencias en el cual el sistema de procesamiento discreto de datos continuos es de $\pm\,(F_s - f_N)$ en lugar de $\pm F_s/2$.

Estos efectos indeseados pueden atenuarse utilizando un prefiltro. En la Fig. 5.56(e) se muestra el espectro $X_c(f)$ de la señal de entrada, y la respuesta en frecuencia $H_a(f)$ del prefiltro. La señal de salida del prefiltro tiene el espectro $X_a(f)$ representado en la Fig. 5.56(f) . El rango de frecuencias entre $F_s/2$ y f_N del espectro de la señal de entrada se pierde. Sin embargo, al muestrear $x_a(t)$ cada $T = 1/F_s$ no se produce distorsión por solapamiento, como se observa en el espectro de $X_s(f)$ que se grafica en la Fig. 5.56(g). La comparación de este espectro con el del la Fig. 5.56(b) revela las ventajas de utilizar un prefiltro: el rango de frecuencias en que el espectro de la señal a la entrada del conversor es idéntico al espectro de la señal de entrada es mayor.

Al filtrar la señal muestreada con el filtro reconstructor ideal, que tiene la respuesta en frecuencia $H_r(f)$ que se muestra en la Fig. 5.56(i) , se obtiene el espectro $Y_r(f)$ de la señal de salida representado en la Fig. 5.56(i) . En este caso, el rango de frecuencias donde el espectro de la señal de salida coincide con el espectro de la señal de entrada se extiende sobre $\pm F_s/2$, y el rango de frecuencias del espectro de la señal de entrada que se pierde es de $f_N - F_s/2$, que es la mitad del rango $2f_N - F_s = 2\,(f_N - F_s/2)$ que se pierde cuando no se usa un prefiltro, como se observa al comparar los espectros de las Fig. 5.56(d) y Fig. 5.56(i) . En este caso, el rango de frecuencias que se "pierde" se debe a la respuesta en frecuencia del prefiltro. En comparación, cuando no se utiliza un prefiltro se pierde un rango adicional comprendido entre $f_N - F_s/2$ y $F_s/2$ debido a la distorsión por solapamiento, como se muestra en la Fig. 5.56(d) .

En la práctica, la respuesta en frecuencia del filtro antialiasing $H_a(f)$ no es exactamente de banda limitada, pero $|H_a(f)|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño para $f > F_s/2$, de manera de minimizar la distorsión por solapamiento. En este caso, la respuesta en frecuencia del sistema de la Fig. 5.55 será aproximadamente,

$$H_e(f) \approx H_a(f)\; H(e^{j\omega})\Big|_{\omega = f\frac{2\pi}{F_s}} . \tag{5.113}$$

Para que el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro sea arbitrariamente pequeño por encima de $F_s/2$, la frecuencia de corte del filtro debe estar un poco por debajo de $F_s/2$; esto significa que la banda de transición del filtro queda dentro de la banda de Nyquist. La ecuación (5.113) sugiere que la atenuación producida en la banda de transición (y otras distorsiones producidas por sistemas lineales e invariantes en el tiempo) puede compensarse parcialmente con la respuesta $H(e^{j\omega})$ del filtro discreto. Esta aproximación se explora en el Problema 28.

Algunos ejemplos

En los siguientes ejemplos se estudia el efecto de un prefiltrado analógico en el desempeño de un sistema de procesamiento de señales. En los siguientes ejemplos se estudia

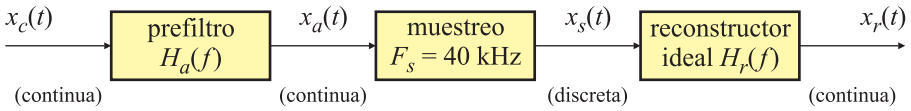


Fig. 5.57. Esquema del sistema de procesamiento discreto de señales continuas con prefiltrado analógico para los Ejemplos 5.25 a 5.28.

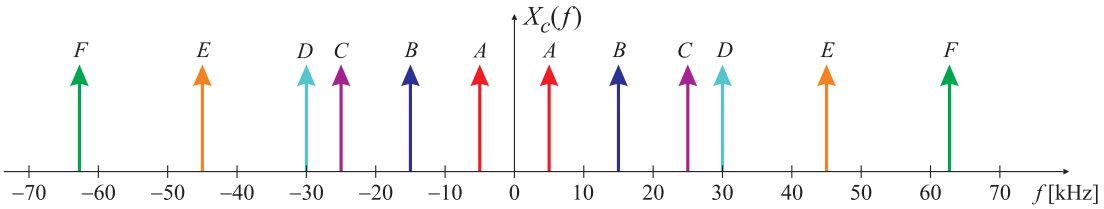


Fig. 5.58. Espectro $X_c(f)$de la señal $x_c(t)$ de los Ejemplos 5.25 a 5.28.

el efecto que tiene sobre la salida del sistema de procesamiento discreto de señales continuas representado en la Fig. 5.57 el filtrar una señal $x_c(t)$ con un prefiltro analógico con respuesta en frecuencia $H_a(f)$. La salida $x_a(t)$ del filtro se muestrea a $F_s = 40$ kHz, e inmediatamente se recupera con un filtro reconstructor ideal $H_r(f)$, cuya salida es la señal $x_r(t)$, como se muestra en la Fig. 5.57.

La señal $x_c(t)$ a muestrear está compuesta por seis tonos,

$$\begin{aligned} x_c(t) \;=\; & 2A\cos(2\pi f_A t) + 2B\cos(2\pi f_B t) \\ & +2C\cos(2\pi f_C t) + 2D\cos(2\pi f_D t) \\ & +2E\cos(2\pi f_E t) + 2F\cos(2\pi f_F t), \end{aligned}$$

donde $f_A = 5$ kHz, $f_B = 15$ kHz, $f_C = 25$ kHz, $f_D = 30$ kHz, $f_E = 45$ kHz, y $f_F = 62{,}5$ kHz. Se supone que todos tienen la misma amplitud, $A = B = C = D = E = F = 1$. Los únicos tonos que están en la banda de audio son los de frecuencia f_A y f_B, y si la señal $x_c(t)$ se reprodujese por un parlante, el oído sólo escucharía la señal

$$x_1(t) = 2A\cos(2\pi f_A t) + 2B\cos(2\pi f_B t).$$

El espectro $X_c(f)$ de la señal $x_c(t)$ se observa en la Fig. 5.58. El proceso de muestreo creará réplicas de este espectro, centrados en múltiplos de $F_s = 40$ kHz. Las cuatro componentes C, D, E, y F están fuera del rango de Nyquist, y por lo tanto aparecerán componentes frecuenciales imágenes dentro del intervalo $\pm F_s/2$ en las siguientes frecuencias:

$$\begin{array}{lcl} f_C = 25 \text{ kHz} & \Rightarrow & f_{C,a} = ((f_C))_{F_s} = f_C - F_s = 25 - 40 = -15 \text{ kHz} = -f_B \\ f_D = 30 \text{ kHz} & \Rightarrow & f_{D,a} = ((f_D))_{F_s} = f_D - F_s = 30 - 40 = -10 \text{ kHz} \\ f_E = 45 \text{ kHz} & \Rightarrow & f_{E,a} = ((f_E))_{F_s} = f_E - F_s = 45 - 40 = 5 \text{ kHz} = f_A \\ f_F = 62{,}5 \text{ kHz} & \Rightarrow & f_{F,a} = ((f_F))_{F_s} = f_F - 2F_s = 62{,}5 - 2\times 40 = -17{,}5 \text{ kHz} \end{array} \tag{5.114}$$

El primer ejemplo muestra cómo es el espectro $X_r(f)$ de la señal de salida $x_r(t)$ cuando no se utiliza prefiltro, es decir, $H_a(f) = 1$ para todo f.

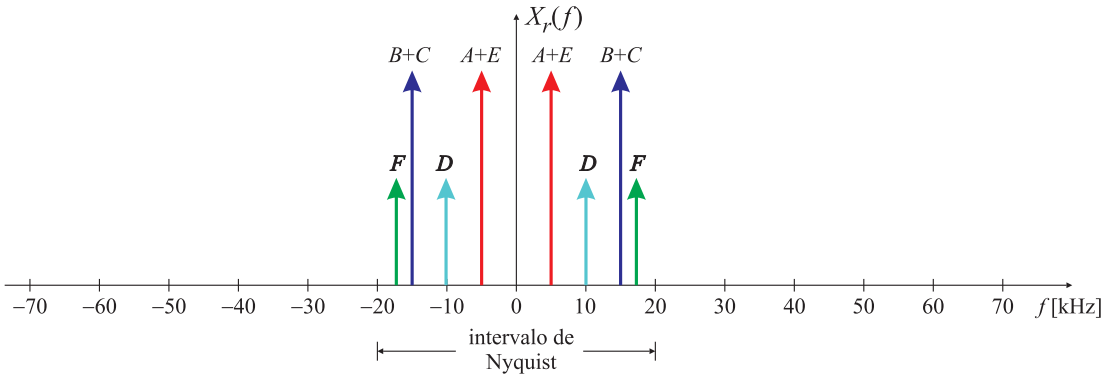


Fig. 5.59. Espectro $X_r(f)$ de la señal $x_r(t)$ a la salida del reconstructor ideal cuando no se usa prefiltro en el esquema de la Fig. 5.57.

EJEMPLO **5.25. Espectro de salida cuando no se usa prefiltrado analógico**
En el caso en que no se coloca un prefiltro analógico, $x_a(t) = x_c(t)$, y por lo tanto la señal reconstruida es

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 2A\cos(2\pi f_A t) + 2B\cos(2\pi f_B t) \\ &\quad +2C\cos(2\pi f_{C,a} t) + 2D\cos(2\pi f_{D,a} t) \\ &\quad +2E\cos(2\pi f_{E,a} t) + 2F\cos(2\pi f_{F,a} t). \end{aligned}$$

Aplicando las relaciones (5.114) se encuentra que

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 2(A+E)\cos(2\pi f_A t) + 2(B+C)\cos(2\pi f_B t) \\ &\quad +2D\cos(2\pi f_{D,a} t) + 2F\cos(2\pi f_{F,a} t) \end{aligned} \tag{5.115}$$

donde cada componente fuera de la banda de Nyquist se ha reemplazado por su imagen; por ejemplo,

$$2C\cos(2\pi f_C t) \rightarrow 2C\cos(2\pi f_{C,a} t).$$

La ecuación (5.115) revela que el proceso de muestreo y reconstrucción cambió la amplitud de las componentes audibles de 5 kHz y 15 kHz, y además ha introducido dos *nuevas* componentes en $f_{D,a} = 10$ kHz y $f_{F,a} = 17{,}5$ kHz, como se observa en la Fig. 5.59: la señal $x_r(t)$ sonará muy diferente de la señal audible $x_1(t)$, y también de la señal original $x_c(t)$. □

En el siguiente ejemplo se analiza el efecto de utilizar un prefiltro ideal, es decir, que anula las componentes frecuenciales de la entrada que están fuera del intervalo $\pm F_s/2$.

EJEMPLO **5.26. Espectro de salida cuando se usa un prefiltro ideal**
Cuando se utiliza un prefiltro analógico ideal con frecuencia de corte $F_s/2 = 20$ kHz, la salida coincide con la parte audible de $x_c(t)$, es decir, $x_a(t) = x_1(t)$. El efecto del prefiltro sobre el espectro de la señal de entrada es eliminar todas las componentes frecuenciales que yacen fuera del intervalo de Nyquist, como se observa en la Fig. 5.60. Como la salida del prefiltro no contiene componentes de frecuencia superior a $F_s/2$, no hay distorsión por solapamiento, y luego de la reconstrucción la señal recuperada se oirá igual que la parte audible de la señal de entrada, $x_r(t) = x_a(t) = x_1(t)$.□

En la práctica no se pueden utilizar prefiltros ideales. Cualquier filtro analógico "real" tiene diferencias tando en la banda de paso como en la banda de rechazo. Si bien puede

conseguirse que la ganancia del filtro real sea aproximadamente igual a la unidad en la banda de paso, en la banda de rechazo la atenuación mínima depende de la característica (Butterworth, Chebyshev o elíptica) del tipo de filtro que se utilice. en el ejemplo que sigue el prefiltro $H_a(f)$ tiene la respuesta en frecuencia asintótica que se muestra en la Fig. 5.61: una banda de paso plana en el rango de audio (entre 0 y 20 kHz), y un decaimiento monótono a razón de 60 dB/octava a partir de los 20 kHz (en 40 kHz la atenuación del filtro será de 60 dB, o mil veces). Para los propósitos del ejemplo, no interesa la respuesta en fase, y se considera que es nula.

EJEMPLO **5.27. Espectro de salida cuando se usa un prefiltro real**
Cuando la entrada continua se procesa con el prefiltro analógico cuya respuesta en frecuencia se muestra en la Fig. 5.61, la salida $x_a(t)$ estará dada por

$$\begin{aligned} x_a(t) \;=\; & 2A\,|H(f_A)|\cos(2\pi f_A t) + 2B\,|H(f_B)|\cos(2\pi f_B t) \\ & +2C\,|H(f_C)|\cos(2\pi f_C t) + 2D\,|H(f_D)|\cos(2\pi f_D t) \\ & +2E\,|H(f_E)|\cos(2\pi f_E t) + 2F\,|H(f_F)|\cos(2\pi f_F t), \end{aligned} \tag{5.116}$$

que resulta de aplicar el principio de superposición a la respuesta de estado estacionario de un sistema lineal e invariante en el tiempo excitado por una señal sinusoidal. Por ejemplo, el efecto del filtro $H(f)$ sobre la componente de frecuencia f_A es

$$x_c^{ee}(t) = 2A\cos(2\pi f_A t) \xrightarrow{H} x_a^{ee}(t) = 2A\,|H(f_A)|\cos[2\pi f_A t + \theta(f_A)].$$

donde $\theta(f) = \arg[H(f)]$. En este ejemplo se supone que el prefiltro tiene desfasaje nulo, de manera de $\theta(f) = 0$; las conclusiones básicas no se ven afectadas por esta simplificación.

La ecuación (5.116) también es válida para el caso en que no se emplea prefiltro, en cuyo caso basta suponer que

$$|H(f_A)| = |H(f_B)| = |H(f_C)| = |H(f_D)| = |H(f_E)| = |H(f_F)| = 1,$$

y también cuando se utiliza un prefiltro ideal, para el cual

$$|H(f_A)| = |H(f_B)| = 1, \quad |H(f_C)| = |H(f_D)| = |H(f_E)| = |H(f_F)| = 0.$$

En el caso del filtro de la Fig. 5.61, como las frecuencias f_A y f_B están en la banda de paso, también se verifica que

$$|H(f_A)| = |H(f_B)| = 1.$$

En cambio, las componentes de frecuencia f_C, f_D, f_E y f_F se ven atenuadas. Para determinar la magnitud de la atenuación se debe encontrar cuántas octavas están apartadas respecto a la frecuencia esquina del filtro $f_c = F_s/2$. El número de octavas es el número de potencias de 2 entre

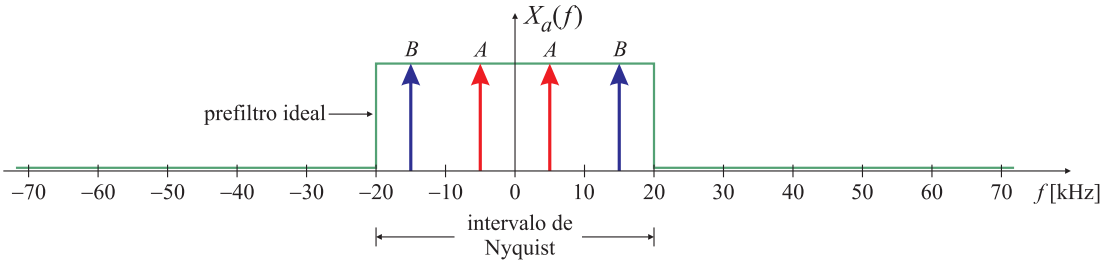


Fig. 5.60. Espectro $X_a(f)$ de la señal $x_a(t)$ a la salida del prefiltro ideal.

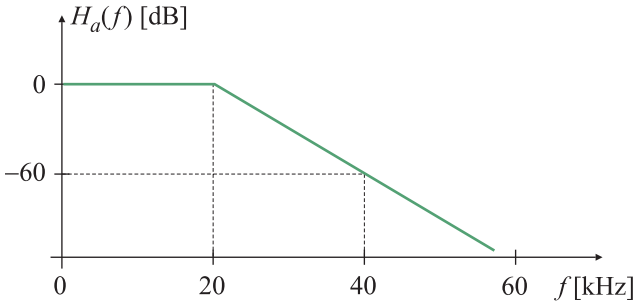


Fig. 5.61. Respuesta en frecuencia $H_a(f)$ del prefiltro analógico.

dos frecuencias, esto es, si $f_y = 2^\alpha f_x$, f_y está apartada $\alpha = \log_2(f_y/f_x)$ de f_x (Si la especificación se da en dB/décadas, el número de décadas entre dos frecuencias es $\alpha = \log_{10}(f_y/f_x)$; en este caso, la relación entre f_x y f_y está dada por $f_y = 10^\alpha f_x$). Se encuentra así que

$$\begin{aligned}
\alpha_C &= \log_2\left(\frac{f_C}{F_s/2}\right) = \log_2\left(\frac{25}{20}\right) = 0{,}322,\\
\alpha_D &= \log_2\left(\frac{f_D}{F_s/2}\right) = \log_2\left(\frac{30}{20}\right) = 0{,}585,\\
\alpha_E &= \log_2\left(\frac{f_E}{F_s/2}\right) = \log_2\left(\frac{55}{20}\right) = 1{,}170,\\
\alpha_F &= \log_2\left(\frac{f_F}{F_s/2}\right) = \log_2\left(\frac{62{,}5}{20}\right) = 1{,}644,
\end{aligned}$$

y por lo tanto, las atenuaciones en cada frecuencia serán

$$\begin{aligned}
At_{f_C} &= 60\frac{\text{dB}}{\text{octava}} \times 0{,}322 \text{ octavas} = 19{,}3 \text{ dB},\\
At_{f_D} &= 60\frac{\text{dB}}{\text{octava}} \times 0{,}585 \text{ octavas} = 35{,}1 \text{ dB},\\
At_{f_E} &= 60\frac{\text{dB}}{\text{octava}} \times 1{,}170 \text{ octavas} = 70{,}1 \text{ dB},\\
At_{f_F} &= 60\frac{\text{dB}}{\text{octava}} \times 1{,}664 \text{ octavas} = 98{,}6 \text{ dB}.
\end{aligned}$$

Por definición, una atenuación de At dB corresponde a reducir $|H(f)|$ por un factor $10^{-At/20}$. Por ejemplo, la caída relativa de $|H(f)|$ con respecto a la frecuencia esquina $f_c = F_s/2$ de la banda de paso es de At dB si

$$\frac{|H(f)|}{|H(f_s/2)|} = 10^{-At/20}.$$

Suponiendo que la banda de paso está normalizada a 0 dB, i.e. que la ganancia en la banda de paso es unitaria, $|H(F_s/2)| = 1$, y en consecuencia

$$\begin{aligned}
|H(f_C)| &= 10^{-19{,}3/20} = \frac{1}{9},\\
|H(f_D)| &= 10^{-35{,}1/20} = \frac{1}{57},\\
|H(f_E)| &= 10^{-70{,}1/20} = \frac{1}{3234},\\
|H(f_F)| &= 10^{-98{,}6/20} = \frac{1}{85114}.
\end{aligned}$$

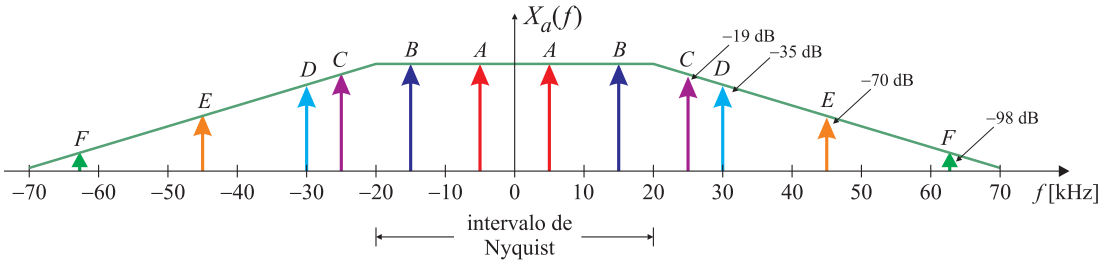


Fig. 5.62. Espectro de salida $X_a(f)$ del prefiltro analógico cuya respuesta en frecuencia se muestra en la Fig. 5.61, cuando se lo excita con la señal $x_c(t)$.

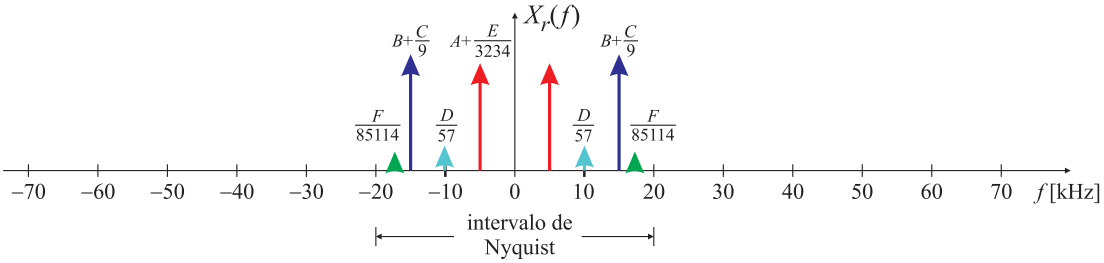


Fig. 5.63. Espectro $X_r(f)$ de la salida $x_r(t)$ del filtro reconstructor cuando la entrada $x_c(t)$ se filtra con un prefiltro analógico $H_a(f)$ con una pendiente de 60 dB/oct en la banda de transición.

Por lo tanto, según (5.116), la salida $x_a(t)$ del prefiltro analógico será

$$\begin{aligned} x_a(t) &= 2A\cos(2\pi f_A t) + 2B\cos(2\pi f_B t) \\ &\quad +2\frac{C}{9}\cos(2\pi f_C t) + 2\frac{D}{57}\cos(2\pi f_D t) \\ &\quad +2\frac{E}{3234}\cos(2\pi f_E t) + 2\frac{F}{85114}\cos(2\pi f_F t). \end{aligned}$$

El espectro de esta señal se muestra en la Fig. 5.62.

En la figura se observa que las componentes frecuenciales que están fuera de la banda de audio han sido atenuadas por el prefiltro, de manera que cuando se repliquen dentro de la banda a consecuencia del proceso de muestreo la distorsión será *mucho* menor. Las réplicas de las frecuencias que están fuera del intervalo de Nyquist aparecen en las mismas frecuencias calculadas en (5.114), cuando no había un prefiltro analógico. Por lo tanto, luego del muestreo y la reconstrucción se tiene

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 2(A+\frac{E}{3234})\cos(2\pi f_A t) + 2(B+\frac{C}{9})\cos(2\pi f_B t) \\ &\quad + 2\frac{D}{57}\cos(2\pi f_{D,a} t) + 2\frac{F}{85114}\cos(2\pi f_{F,a} t). \end{aligned}$$

El espectro de esta señal se muestra en la Fig. 5.63. Se observa que las réplicas tienen mucho menor magnitud que en el caso en que no se utiliza prefiltro. La componente frecuencial más próxima a la frecuencia de Nyquist, f_C, es la que causa mayor distorsión porque no ha sido muy atenuada por el filtro. □

La pendiente de atenuación de un filtro de orden N es de $6N$ dB/octava (o de $20N$ dB/década) de modo que el prefiltro utilizado en este ejemplo, con una pendiente de 60 dB/octava, es de orden $N = 10$. Este filtro analógico es muy difícil de implementar, y

por lo tanto muy costoso. En el siguiente ejemplo se estudia cómo desmejora el desempeño del sistema de procesamiento discreto de señales continuas de la Fig. 5.57 cuando se utiliza un filtro de orden 5.

EJEMPLO **5.28. Espectro de salida cuando se usa un prefiltro real de menor orden**
Si el orden del prefiltro es $N = 5$, la pendiente de atenuación será de 30 dB/octava, y las atenuaciones de las componentes que están fuera de la banda de paso se reducen a la mitad,

$$\begin{aligned} At_{f_C} &= 30\frac{\text{dB}}{\text{octava}} \times 0{,}322 \text{ octavas} = 9{,}7 \text{ dB}, \\ At_{f_D} &= 30\frac{\text{dB}}{\text{octava}} \times 0{,}585 \text{ octavas} = 17{,}6 \text{ dB}, \\ At_{f_E} &= 30\frac{\text{dB}}{\text{octava}} \times 1{,}170 \text{ octavas} = 35{,}1 \text{ dB}, \\ At_{f_F} &= 30\frac{\text{dB}}{\text{octava}} \times 1{,}664 \text{ octavas} = 49{,}3 \text{ dB}, \end{aligned}$$

y en unidades absolutas,

$$\begin{aligned} |H(f_C)| &= 10^{-9{,}7/20} = \frac{1}{3}, \\ |H(f_D)| &= 10^{-17{,}6/20} = \frac{1}{7{,}5}, \\ |H(f_E)| &= 10^{-35{,}1/20} = \frac{1}{57}, \\ |H(f_F)| &= 10^{-49{,}3/20} = \frac{1}{292}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la señal recuperada a la salida del filtro reconstructor será

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 2(A + \frac{E}{57})\cos(2\pi f_A t) + 2(B + \frac{C}{3})\cos(2\pi f_B t) \\ &\quad + 2\frac{D}{7{,}5}\cos(2\pi f_{D,a} t) + 2\frac{F}{292}\cos(2\pi f_{F,a} t). \end{aligned} \tag{5.117}$$

En este caso las componentes de frecuencia f_C y f_D no son tan pequeñas, y la distorsión por solapamiento será más importante que en el ejemplo anterior. □

5.11.2. Conversión analógica-digital (A/D)

Un conversor C/D ideal convierte una señal de tiempo continuo en una señal discreta, donde cada muestra se conoce con precisión *infinita*. En la Fig. 5.64 se muestra una representación de un conversor analógico/digital real, donde la señal analógica (de tiempo continuo) se transforma en una señal digital, es decir, una sucesión de muestras de precisión *finita* o *cuantizadas*. Los dos sistemas de la Fig. 5.64 son modelos de dispositivos físicos. El conversor C/D que se ha estudiado hasta ahora es un dispositivo ideal, mientras que el conversor A/D es un modelo de un dispositivo real. Mientras que el primero es útil para derivar las relaciones temporales y frecuenciales entre las señales continuas y discretas, el segundo permite tener en cuenta otros efectos no estudiados hasta ahora, y representa con más fidelidad el comportamiento de un conversor real.

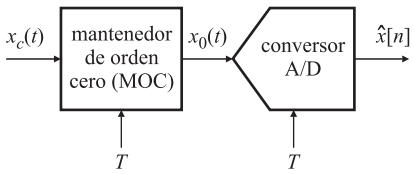


Fig. 5.64. Configuración física de un conversor analógico-digital.

El conversor A/D es un circuito que produce una salida $\hat{x}_B[n]$ en código binario que representa aproximadamente el valor de la amplitud de la señal de tensión o corriente presente en la entrada. El término "aproximadamente" tiene que ver con que la salida del conversor tiene precisión finita: en un conversor de B bits, la salida codificada sólo puede tomar uno de los 2^B valores posibles. Usualmente se utiliza una señal de reloj externa para hacer que el conversor A/D produzca una muestra de salida cada T segundos. La conversión del valor de tensión o corriente a un código binario demanda cierta cantidad de tiempo que depende del tipo de conversor; por este motivo, en los sistemas de conversión A/D de altas prestaciones se incluye un *mantenedor* ("sample and hold", en inglés) que se encarga de aislar las variaciones de la señal de la entrada del conversor durante todo el tiempo que demande la conversión. La salida del mantenedor en función de la señal de entrada es

$$x_0(t) = \sum_n x_a(nT) h_0(t - nT) = \sum_n x[n] h_0(t - nT), \tag{5.118}$$

donde $x[n] = x_a(nT)$ son las muestras (ideales) de la señal de entrada $x_a(t)$ y $h_0(t)$ es la respuesta impulsiva del mantenedor. El caso habitual es utilizar un mantenedor de orden cero, caracterizado por la respuesta impulsiva

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{5.119}$$

El mantenedor de orden cero se encarga de mantener constante la señal de entrada al conversor duratne todo un período de muestreo T. También existen mantenedores de primer orden, que generan una rampa de tensión cuya pendiende depende del valor de tensión o corriente muestreado.

La ecuación (5.118) también puede escribirse como

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_n x_a(nT)\delta(t - nT),$$

lo que indica que el mantenedor ideal es equivalente a la modulación de un tren de impulsos $p_T(t)$ por la señal continua $x_a(t)$ seguida por un filtrado lineal por el sistema mantenedor, como se muestra en la Fig. 5.65(a) . La salida del mantenedor se mantiene constante en el intervalo de tiempo transcurrido entre instantes de muestreo, permitiendo que el conversor A/D utilice ese tiempo para obtener una representación numérica de ese valor analógico con el mínimo error posible.

Porqué usar un mantenedor

En un sistema de procesamiento de datos, donde el conversor analógico digital (A/D) esté precedido de un mantenedor de orden cero la mayor frecuencia de muestreo utilizable

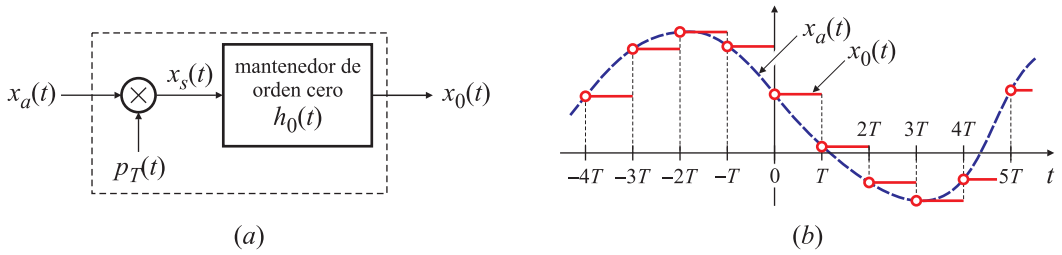


Fig. 5.65. Representación de un muestreador/mantenedor de orden cero ideal (a); señales de entrada y salida típicas de un muestreador/mantenedor (b).

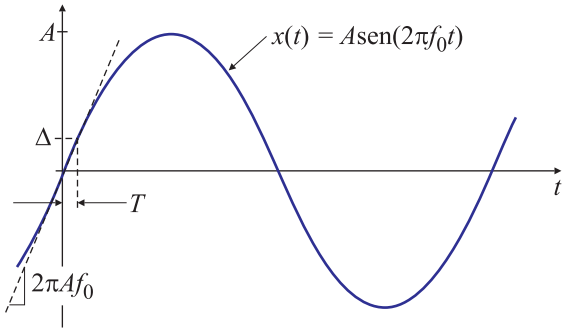


Fig. 5.66. Señal de entrada a un sistema de procesamiento de datos sin mantenedor de orden cero.

depende, en general, del tiempo de conversión. Por ejemplo, la (antigua) serie de conversores de 8 bits ADC0803/4/9 de National Instruments tiene un tiempo de conversión ligeramente inferior a los 100 μs, de manera que pueden convertir una señal analógica a una sucesión de números a razón de 10000 muestras por segundo.

El empleo de un mantenedor de orden cero de calidad comparable permite procesar señales cuya máxima componente frecuencial sea ligeramente menor que 5 kHz. Si *no* se coloca un mantenedor de orden cero, el límite a la máxima frecuencia de la señal a convertir está determinado por el máximo error de conversión tolerable. Una hipótesis razonable es que la variación de la amplitud de la señal en un período de muestreo sea menor que la resolución Δ (el paso de cuantización) del conversor.

Para determinar la máxima frecuencia admisible de la señal de entrada, se supondrá que la señal a muestrear es una sinusoide de amplitud $\pm A$, esto es $x(t) = A\,\text{sen}(2\pi f_0 t)$. La amplitud A se elige de manera de explotar al máximo el rango dinámico del conversor: para un conversor de B bits, la amplitud A debe satisfacer

$$2A = 2^B.$$

La frecuencia f_0 se calcula de manera que la máxima variación $\delta x_{\text{máx}}$ de la señal de entrada durante un período de muestreo no exceda el valor Δ de resolución del conversor. La máxima variación temporal de la señal senoidal ocurre en instante del cruce por cero, y en esos momentos la pendiente es $\pm 2\pi A f_0$, como se muestra en la Fig. 5.66, y en el intervalo de un período de muestreo T la variación total de la señal es $\delta x_{\text{máx}} = 2\pi A f_0 T$.

Tabla 5.3: Máxima frecuencia de una señal sinusoidal que puede aplicarse a un conversor ADC0800 para mantener la precisión de 8 bits con/sin mantenedor.

Frecuencia máxima de la señal de entrada	
con mantenedor	5000.0 Hz
sin mantenedor	12.4 Hz

De acuerdo con la hipótesis, debe verificarse entonces que

$$2\pi A f_0 T < \Delta = \frac{2A}{2^B}$$

de donde

$$f_0 < \frac{1}{\pi 2^B} F_s,$$

que muestra que la máxima frecuencia admisible de la señal de entrada es $\pi 2^B$ veces menor que la frecuencia de muestreo. Para el caso de la familia de conversores de 8 bits ADC0800 citada más arriba, $1/(\pi 2^B) \approx 0{,}00125$, y por lo tanto la máxima frecuencia de la señal es de aproximadamente 12.4 Hz. En la Tabla 5.3 se sintetizan las máximas frecuencias admisibles de la señal de entrada con/sin el mantenedor, de manera de preservar la resolución del conversor.

La relación entre las transformadas de Fourier de $x_0(t)$ y $x_a(t)$ pueden calcularse siguiendo el estilo de análisis de la Sección 5.3, y por el momento se pospondrá hasta el tratamiendo del conversor D/A. Sin embargo, el análisis es innecesario en este punto porque todo lo que es necesario conocer acerca del comportamiento del sistema puede derivarse a partir de las expresiones temporales. Específicamente, la salida del mantenedor de orden ero es una forma de ona tipo "escalera", en los cuales los valores de las muestras se mantienen constantes durante el período de muestreo T, como se muestra en la Fig. 5.65(b) . Los muestreadores/mantenedores reales están diseñados para que la variación de la tensión en el tiempo, que se debe a corrientes de fuga, sea lo más pequeña posible; para el AD783 de Analog Devices es de apenas 0.02 μV/μs (Fig. 5.67). También es necesario que el mantenedor "copie" el valor de $x_a(t)$ en el instante $t = nT$ tan rápido como sea posible; este parámetro se conoce como *tiempo de adquisisición*, y es de 250 nS para el AD783. El propósito del mantenedor es evitar variaciones de tensión o corriente en la entrada del conversor A/D, y preservar su resolución.

La gran variedad de tipos de muestreadores y conversores A/D, y las distintas variantes de implementación escapan a los contenidos de este curso. Posiblemente, estos dispositivos sean los de diseño más complejo, no sólo porque "mezclan" electrónica analógica con electrónica digital, sino porque la parte analógica debe ser muy veloz y de gran precisión. Hay muchos detalles de diseño que deben tenerse en cuenta para conseguir un muestrador que adquiera una muestra de la señal tan rápido como sea posible, y que mantenga el valor adquirido constante, sin decaer en el tiempo y sin que se contamine con pulsos ("glitches") causados por la lógica digital. Lo mismo ocurre con el diseño de los conversores A/D: existe una amplia variedad de configuraciones que permiten lograr diferentes requerimientos de velocidad y precisión.

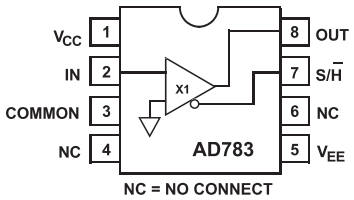
ANALOG DEVICES

Complete Very High Speed Sample-and-Hold Amplifier

AD783

FEATURES
Acquisition Time to 0.01%: 250 ns Typical
Low Power Dissipation: 95 mW
Low Droop Rate: 0.02 μV/μs
Fully Specified and Tested Hold Mode Distortion
Total Harmonic Distortion: –85 dB
Aperture Jitter: 50 ps Maximum
Internal Hold Capacitor
Self-Correcting Architecture
8-Pin Mini Cerdip and SOIC Packages

FUNCTIONAL BLOCK DIAGRAM



NC = NO CONNECT

PRODUCT DESCRIPTION

The AD783 is a high speed, monolithic sample-and-hold amplifier (SHA). The AD783 offers a typical acquisition time of 250 ns to 0.01%. The AD783 is specified and tested for hold mode total harmonic distortion with input frequencies up to 100 kHz. The AD783 is configured as a unity gain amplifier and uses a patented self-correcting architecture that minimizes hold mode errors and ensures accuracy over temperature. The AD783 is self-contained and requires no external components or adjustments.

The AD783 retains the held value with a droop rate of 0.02 μV/μs. Excellent linearity and hold mode dc and dynamic performance make the AD783 ideal for high speed 12- and 14-bit analog-to-digital converters.

The AD783 is manufactured on Analog Devices' ABCMOS process which merges high performance, low noise bipolar circuitry with low power CMOS to provide an accurate, high speed, low power SHA.

PRODUCT HIGHLIGHTS

1. Fast acquisition time (250 ns), low aperture jitter (20 ps) and fully specified hold mode distortion make the AD783 an ideal SHA for sampling systems.
2. Low droop (0.02 μV/μs) and internally compensated hold mode error result in superior system accuracy.
3. Low power (95 mW typical), complete functionality and small size make the AD783 an ideal choice for a variety of high performance applications.
4. The AD783 requires no external components or adjustments.
5. The AD783 is an excellent choice as a front-end SHA for high speed analog-to-digital converters such as the AD671, AD7586, AD674B, AD774B, AD7572 and AD7672.
6. Fully specified and tested hold mode distortion guarantees the performance of the SHA in sampled data systems.

Fig. 5.67. Portada de la hoja de datos de muestreador/mantenedor AD783 de Analog Devices. Se destacan su reducido tiempo de adquisición ("acquisition time") y la baja caída ("droop").

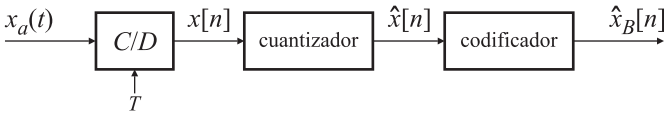
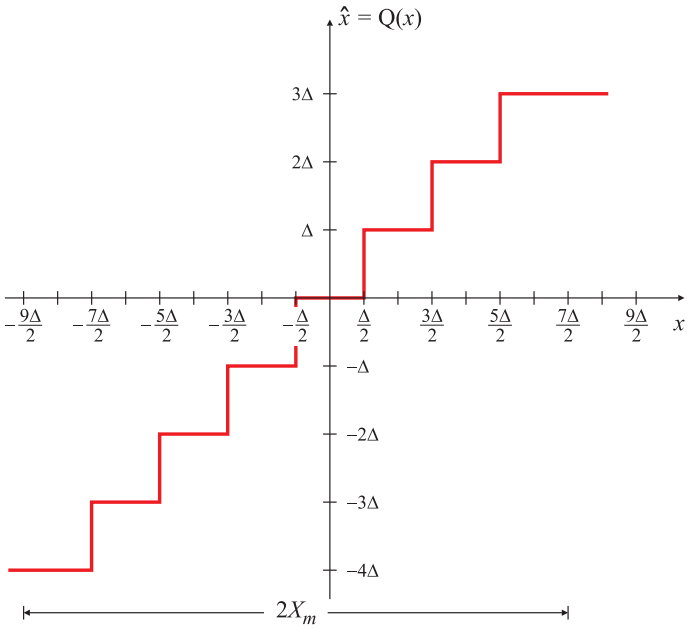


Fig. 5.68. Representación matemática del sistema de la Fig. 5.65.

Una de las características típicas de un conversor A/D es su resolución, que es el menor cambio de tensión que causa el cambio deun código de salida al código siguiente.

Cuantización de la señal

El mantenedor de la Fig. 5.64 representa el proceso de muestrear la señal de entrada, y mantener el valor muestreado para que sea cuantizado por el conversor A/D. Un modelo de este sistema se muestra en la Fig. 5.68, donde el conversor C/D ideal representa el muestreo efectuado por el muestreador/mantenedor y el cuantizador/codificador modela la operación del conversor A/D.



comple-mento a 2	offset binario
011	111
010	110
001	101
000	100
111	011
110	010
101	001
100	000

Fig. 5.69. Cuantizador de 3 bits.

El cuantizador es un sistema no lineal cuyo propósito es transformar la muestra de entrada $x[n]$ en uno de un conjunto finito de valores especificados. Se puede representar esta operación como

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \tag{5.120}$$

donde $\hat{x}[n]$ representa el valor cuantizado de la muestra. La distribución de los niveles de cuantización puede ser uniforme o no. En aplicaciones donde sea necesario operar matemáticamente con los valores de las muestras, los pasos de cuantización suelen ser uniformes. En la Fig. 5.69 se muestra la características entrada-salida de un cuantizador uniforme (también llamado lineal, por la progresión lineal de los pasos de cuantización), en el cual los valores de las muestras de entrada se *redondean* al nivel de cuantización más próximo.

La Fig. 5.69 revela algunas características interesantes. Este cuantizador sería apropiado para una señal analógica cuyas muestras fuesen positivas y negativas (es decir, para una señal de entrada *bipolar*). Si las muestras de entrada fuesen sólo positivas (o negativas), la señal de salida quedaría codificada con 2 bits. Para aprovechar totalmente el rango del conversor, los pasos de cuantización deben distribuirse de manera compatible con la señal de entrada, o adecuar la señal de entrada al rango admisible del conversor.

El cuantizador de la Fig. 5.69 tiene un número par de niveles de cuantización, lo que impide asignar un nivel de cuantización al cero, y tener la misma cantidad de niveles positivos y negativos. En general, el número de niveles de cuantización es potencia de 2, pero mucho mayor que 8, de manera que esta diferencia habitualmente es despreciable.

En la Fig. 5.69 también se muestra la codificación de los niveles de cuantización. Como hay 8 niveles de cuantización, se pueden utilizar 3 bits para identificarlos. En un codificador lineal, se pueden identificar 2^{B+1} niveles con B bits. En principio, los símbolos asignados a cada nivel son arbitrarios, pero de acuerdo a la aplicación algunos son más convenientes que otros. Por ejemplo, la columna de la derecha de la Fig. 5.69 muestra el

esquema de codificación conocido como *offset binario*, en el cual los símbolos binarios se asignan en orden numérico, comenzando con el nivel de cuantización más negativo.

En procesamiento de señales se prefiere un código que permita realizar operaciones aritméticas sobre las palabras de código interpretándolas como una versión escalada de las muestras cuantizadas. La columna de la izquierda muestra una asignación conocida como *complemento a 2*, que es el sistema utilizado para representar valores signados en la mayoría de los microprocesadores. La representación offset binario puede convertirse a la representación complemento a 2 complementando el bit más significativo.

En el sistema complemento a 2 el bit más significativo se considera el bit de signo y el resto se interpreta como un entero o como fracciones. Esta última forma es conveniente para trabajar con variables normalizadas. Implícitamente, se asume que hay un punto decimal entre los dos bits más significativos. Por ejemplo, para una palabra de 3 bits ($B = 2$), los símbolos binarios tienen el siguiente significado en complemento a 2:

símbolo binario	valor numérico $\hat{x}_B$
$0_\diamond 11$	$3/4$
$0_\diamond 10$	$1/2$
$0_\diamond 01$	$1/4$
$0_\diamond 00$	0
$1_\diamond 11$	$-1/4$
$1_\diamond 10$	$-1/2$
$1_\diamond 01$	$-3/4$
$1_\diamond 00$	-1

Para un codificador lineal, el valor de una representación binaria de $B+1$ bits de la forma

$$a_{0\diamond} a_1 a_2 \ldots a_B$$

es

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_B 2^{-B}.$$

El símbolo "$_\diamond$" separa la parte entera de la parte fraccionaria del número. La relación entre la palabra de código y los niveles de la señal cuantizada dependen del parámetro X_m en la Fig. 5.69, que se conoce como nivel de entrada de escala completa del conversor A/D. Los valores típicos pueden ser 10 V, 5 V o 1 V, y actualmente 3 V o 3.3 V. De la Fig. 5.69 se observa que el paso de cuantización será

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B} \tag{5.121}$$

Los niveles de cuantización más pequeños ($\pm\Delta$) corresponden al bit menos significativo de la palabra binaria. La relación numérica entre el código y el valor de la muestra cuantizada es

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n], \tag{5.122}$$

ya que se ha supuesto que $\hat{x}_B[n]$ es un número binario comprendido entre ± 1 en el formato complemento a 2. En este esquema, las muestras codificadas $\hat{x}_B[n]$ son directamente proporcionales al valor de las muestras cuantizadas, y por lo tanto se pueden utilizar como una representación numérica de la amplitud de las muestras. Frecuentemente es

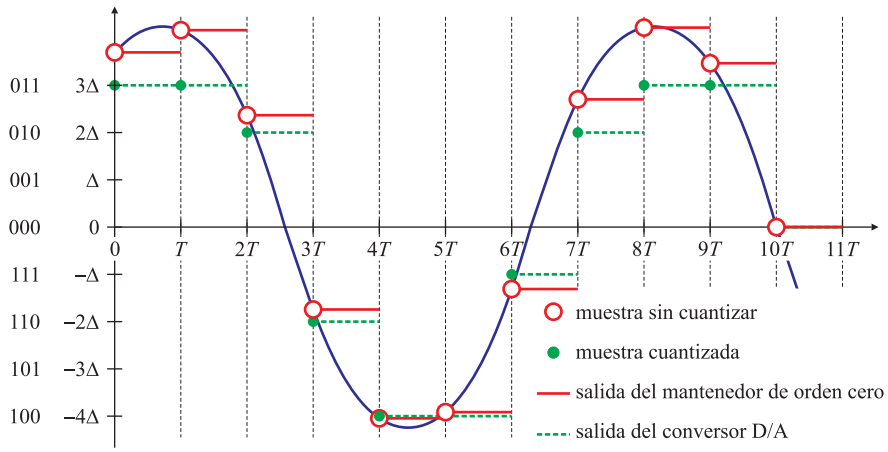


Fig. 5.70. Muestreo, cuantización, codificación y conversión D/A de un cuantizador de 3 bits.

conveniente suponer que la señal de entrada está normalizada, de modo que los valores numériocos de $\hat{x}[n]$ y $\hat{x}_B[n]$ son idénticos, y entonces no hay necesidad de distinguir entre las muestras cuantizadas $\hat{x}[n]$ y las muestras codificadas $\hat{x}_B[n]$.

En la Fig. 5.70 se muestra un ejemplo de cuantización y codificación de una señal sinusoidal utilizando un cuantizador de 3 bits. Las muestras $x[n]$ sin cuantizar se indican con un círculo vacío, y las muestras cuantizadas $\hat{x}[n]$ con un círculo lleno. También se muestra la salida de un manetendor de orden cero ideal (con línea llena). Las líneas punteadas indican la salida del conversor D/A, que se discutirá más adelante. En la figura se listan también las palabras de 3 bits utilizadas para representar cada muestra. Como la señal analógica $x_a(t)$ excede el rango de escala completa del conversor, algunas de las muestras positivas resultan recortadas (por ejemplo, en $t = 0$, $t = T$, $t = 8T$, $t = 9T$, etc.)

Aunque la discusión precedente enfatiza la codificación tipo complemento a dos de los niveles de cuantización, los principios básicos de cuantización y codificación en la conversión A/D son los mismos sin importar qué tipo de código binario se utilice para representar las muestras. Una discusión más detallada de los sistemas de aritmética binaria utilizados en sistemas de cómputos digitales se puede encontrar en textos clásicos como *The art of computer programming* de Knuth (1997).

Codificadores con distribución no uniforme

En aplicaciones de telefonía es habitual utilizar una distribución no uniforme de los pasos de cuantización. Una de ellas, utilizada en Japón y Estados Unidos, conocida como *ley* μ, convierte un código lineal de 14 bits (13 bits de magnitud, mas un bit de signo) en un código comprimido de 8 bits (7 bits de magnitud, mas un bit de signo) a la salida. La ley de compresión continua es

$$f(x) = \text{sgn}(x)\frac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)},$$

donde la entrada x y la salida $f(x)$ están normalizadas entre ± 1, y μ es el parámetro de compresión ($\mu = 255$ para Estados Unidos y Japón). En la Tabla 5.4 se muestra la traducción de una variable entera de 13 bits codificada linealmente en una variable entera

de 8 bits comprimida según la ley μ. El bit de polaridad (1 para valores positivos, en el bit 13 para la entrada, y en el bit 8 para la salida) no se muestran en la tabla. En la Fig. 5.71 se muestra la característica de compresión para una entrada x normalizada, y la salida expresada como un valor entero.

En Europa se utiliza una ley de compresión denominada *Ley A* que convierte 12 bis de magnitud en 7 bits comprimidos, de acuerdo a la ley continua

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)\dfrac{A|x|}{1+\ln A}, & 0 \le |x| \le \frac{1}{A}, \\ \operatorname{sgn}(x)\dfrac{1+\ln(A|x|)}{1+\ln A}, & \frac{1}{A} \le |x| \le 1, \end{cases}$$

donde A es el parámetro de compresión ($A = 87{,}6$ en Europa), y x es el valor normalizado del entero a comprimir. La forma de la caracterísitica entrada/salida es muy similar a la de la ley μ (Fig. 5.71). A fines de implementación en sistemas digitales, la ley se aproxima por una función lineal a tramos. Las diferencias entre la ley μ y la ley A son menores. Por utilizar menor cantidad de bits, la ley A genera señales de menor amplitud y menor calidad que la ley μ. Sin embargo, el rango dinámico de la ley A es mayor que el de la ley μ (48.7 dB versus 48.4 dB).

5.11.3. Análisis de los errores de cuantización

Las Fig. 5.69 y 5.70 muestran que los valores cuantizadados $\hat{x}[n]$ serán diferentes de los de las muestras $x[n]$. La diferencia entre ellas es el *error de cuantización*, definido como

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n].$$

Por ejemplo, para el cuantizador de 3 bits de la Fig. 5.69, si $\Delta/2 < x[n] < 3\Delta/2$, entonces $\hat{x}[n] = \Delta$, y resulta que

$$-\Delta/2 < e[n] < \Delta/2. \tag{5.123}$$

En el caso de la Fig. 5.69, esta ecuación se satisface para cualquier muestra $x[n]$ cuyo valor esté comprendido dentro del rango

$$-9\Delta/2 < x[n] \le 7\Delta/2.$$

En general, en el caso de un cuantizador de $(B+1)$ bits, donde Δ esté dado por la ecuación (5.121), el error de cuantización queda comprendido entre $\pm\Delta/2$ [ecuación (5.123)] siempre que el valor de la muestra $x[n]$ quede dentro del intervalo

$$-X_m - \Delta/2 < x[n] \le X_m - \Delta/2.$$

Si $x[n]$ está fuera de este rango, como para en $t = 0$ en la Fig. 5.70, entonces el error de cuantización es de mayor magnitud que $\Delta/2$, y se suele decir que estas muestras están *recortadas* ("clipped").

Un modelo simplificado pero útil del cuantizador se muestra en la Fig. 5.72, en el cual las muestras del error de cuantización se piensan como una señal de ruido aditivo. El modelo es exactamente equivalente al cuantizador si se conoce $e[n]$; sin embargo, en la mayoría de los casos $e[n]$ no se conoce y resulta más útil utilizar un modelo estadístico basado en la estructura de la Fig. 5.72 para representar los efectos de la cuantización en los algoritimos de procesamiento de señales. La representación estadística del error de cuantización está basada en las siguientes hipótesis:

Tabla 5.4: Conversión de código lineal a código comprimido según ley μ.

bits de entrada													bits de salida						
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	a	b	c	d	x	0	0	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0	1	a	b	c	d	x	x	0	0	1	a	b	c	d
0	0	0	0	0	1	a	b	c	d	x	x	x	0	1	0	a	b	c	d
0	0	0	0	1	a	x	x	x	x	x	x	x	0	1	1	a	b	c	d
0	0	0	1	a	b	x	x	x	x	x	x	x	1	0	0	a	b	c	d
0	0	1	a	b	c	x	x	x	x	x	x	x	1	0	1	a	b	c	d
0	1	a	b	c	d	x	x	x	x	x	x	x	1	1	0	a	b	c	d
1	a	b	c	d	x	x	x	x	x	x	x	x	1	1	1	a	b	c	d

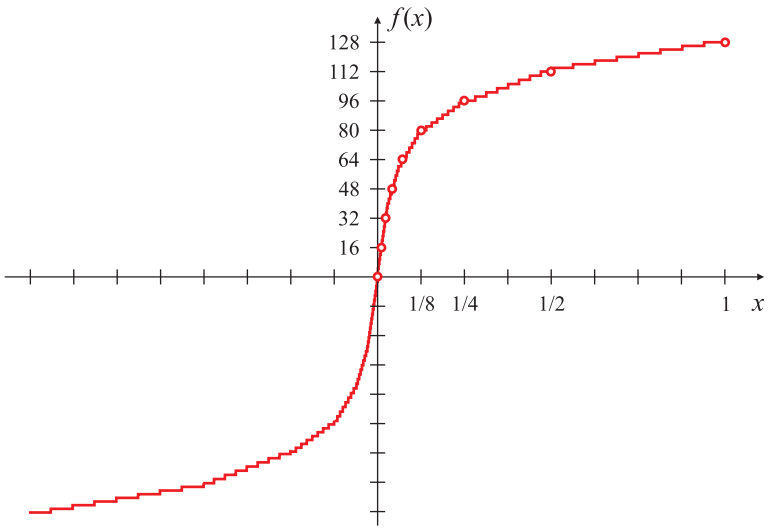


Fig. 5.71. Curva de compresión de la ley μ.

Tabla 5.5: Conversión de código lineal a código comprimido según ley A.

bits de entrada												bits de salida						
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	a	b	c	d	x	0	0	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0	1	a	b	c	d	x	0	0	1	a	b	c	d
0	0	0	0	0	1	a	b	c	d	x	x	0	1	0	a	b	c	d
0	0	0	0	1	a	b	c	d	x	x	x	0	1	1	a	b	c	d
0	0	0	1	a	b	c	d	x	x	x	x	1	0	0	a	b	c	d
0	0	1	a	b	c	d	x	x	x	x	x	1	0	1	a	b	c	d
0	1	a	b	c	d	x	x	x	x	x	x	1	1	0	a	b	c	d
1	a	b	c	d	x	x	x	x	x	x	x	1	1	1	a	b	c	d

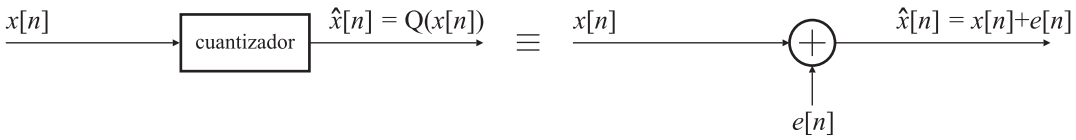


Fig. 5.72. Modelo de ruido aditivo del cuantizador.

1. La sucesión $e[n]$ es un proceso aleatorio estacionario.
2. La sucesión error $e[n]$ no está correlacionada con la señal $x[n]$.
3. Las muestras de la señal error $e[n]$ no están correlacionadas entre sí; es decir, $e[n]$ es un proceso tipo ruido blanco.
4. La distribución de probabilidad del proceso $e[n]$ es uniforme sobre el rango del error de cuantización.

Como se verá más adelante, estas hipótesis permiten analizar de manera muy simple los efectos de la cuantización. Es sencillo encontrar situaciones donde alguna de las hipótesis precedentes no se cumple: por ejemplo, si $x_a(t)$ es un escalón, las hipótesis no son justificables. Sin embargo, para el caso de señales complicadas, como la voz o la música, donde la señal fluctúa rápidamente de una manera casi impredecible, estas hipótesis son más realistas. Se han realizado experiencias que muestran que a medida que las señales se "complican", la correlación entre la señal $x[n]$ y el error de cuantización $e[n]$ disminuye, y el error también se vuelve no correlado (Bennet, 1948; Widrow, 1956, 1961.) En un sentido heurístico, las hipótesis sobre el modelo estadístico parecen ser válidas si la señal es lo suficientemente complicada, y si el paso de cuantización Δ es bastante pequeño, de manera que la amplitud de la señal pase por varios pasos de cuantización de una muestra a otra.

EJEMPLO **5.29. Error de cuantización para una señal sinusoidal**
Las muestras (sin cuantizar) de la señal $x[n] = 0{,}99\cos(n/10)$ se grafican en la Fig. 5.73(a) . Esta señal se procesa con un cuantizador de 3 bits $(B+1=3)$, resultando en la señal $\hat{x}[n] = Q\{x[n]\}$, que se representa en la Fig. 5.73(b) asumiendo que $X_m = 1$. Las líneas de trazos indican los niveles de cuantización. El error de cuantización $e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$ se muestra en la Fig. 5.73(c) , donde las líneas de trazos limitan el intervalo $\pm\Delta/2$. En este caso, el error $e[n]$ está altamente correlacionado con la señal $x[n]$ sin cuantizar. Por ejemplo, en un entorno de los picos positivos y negativos del coseno la señal cuantizada $\hat{x}[n]$ permanece constante durante varias muestras consecutivas, y por lo tanto el error tiene la forma de la señal de entrada en esos intervalos. Además, en los intervalos correspondientes a los picos positivos, el error es de magnitud mayor que $\Delta/2$ porque la señal de entrada es muy grande de acuerdo a los parámetros de este cuantizador.

En la Fig. 5.73(d) se muestra el error cuando se utiliza un cuantizador de $B+1=8$ bits. Nuevamente las líneas de trazos indican el intervalo $\pm\Delta/2$. En este caso, no se advierte ningún patron o periodicidad. Si la señal $x[n]$ hubiese sido un coseno periódico, es decir, un coseno cuya frecuencia fuera una fracción racional de 2π, el error también hubiese sido periódico; para evitar este caso en el ejemplo se utilizó la frecuencia $\omega_0 = 1/10$. La observación de la Fig. 5.73 tiende a confirmar la afirmación precedente sobre las propiedades del ruido de cuantización de una señal cuantizada con un paso Δ suficientemente fino: las muestras de la señal error parecen variar aleatoriamente sin correlación con la señal original sin cuantizar, y quedan comprendidas en el rango $\pm\Delta/2$. □

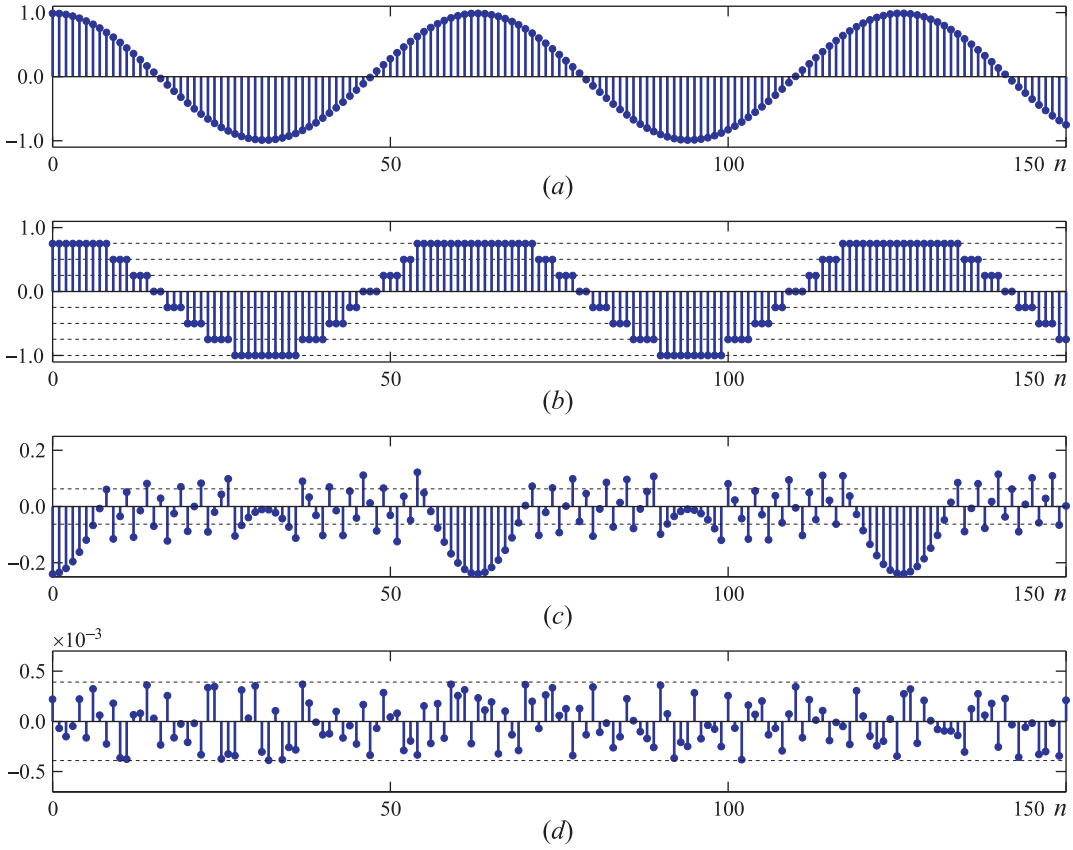


Fig. 5.73. Ejemplo del ruido de cuantización. Muestras de la señal $x[n] = 0{,}99\cos(n/10)$ (a); muestras cuantizadas a 3 bits de la señal $x[n]$ (b); error de cuantización de la señal $x[n]$ cuantizada a 3 bits (c); error de cuantización de la señal $x[n]$ cuantizada a 8 bits (d).

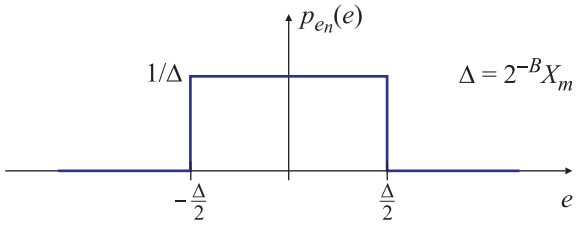


Fig. 5.74. Función densidad de probabilidad del error de cuantización para un cuantizador por rendondeo como el de la Fig. 5.69.

Para cuantizadores que redondean el valor de la muestra al nivel de cuantización más próximo, como el que se muestra en la Fig. 5.69, la amplitud del ruido de cuantización queda comprendida en el rango

$$-\Delta/2 < e[n] < \Delta/2.$$

Para Δ pequeños, es razonable asumir que $e[n]$ es una variable aleatoria con distribución uniforme entre $-\Delta/2$ y $\Delta/2$, con la función de densidad de probabilidad $p_{e_n}(e)$ que se muestra en la Fig. 5.74. Si en lugar de redondeo se hubiese aproximado por truncación,

entonces el error siempre hubiese sido negativo, y se hubiese tenido una función de densidad de probabilidad definida sobre el intervalo desde $-\Delta$ a 0. Para completar el modelo estadístico del ruido de cuantización, se supone que las muestras de ruido no están correlacionadas entre sí, y también que $e[n]$ no está correlacionado con $x[n]$. Por lo tanto, se asume que el ruido de cuantización $e[n]$ es una sucesión de ruido blanco con distribución uniforme. El valor medio de $e[n]$ es nulo, y su varianza es

$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 p_{e_n}(e) de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Para un cuantizador de $(B+1)$ bits, con un rango a fonde de escala de $\pm X_m$, el paso de cuantización es $\Delta = 2^{-B} X_m$, de modo que la varianza del ruido (su potencia) es

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}.$$

Una medida común de la degradación de una señal contaminada por ruido aditivo es la relación señal a ruido (SNR), definida como el cociente entre las varianzas (potencias) de la señal y del ruido. La SNR de un cuantizador de $(B+1)$ bits, expresada en decibeles (dB) es

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log_{10} \left(12 \frac{2^{2B}}{X_m^2} \sigma_x^2 \right) \\ &= 10 \log_{10} 12 + 10 \log_{10} (2^{2B}) + 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{X_m^2} \right) \\ &= 10{,}8 + 6{,}02B + 20 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x}{X_m} \right) \end{aligned} \tag{5.124}$$

La expresión (5.124) muestra que la relación señal a ruido se incrementa aproximadamente 6 dB por cada bit B que se agrega a la longitud de palabra de la muestra cuantizada, es decir, por cada duplicación del número de niveles de cuantización. Sin embargo, debe prestarse especial atención al término

$$20 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x}{X_m} \right). \tag{5.125}$$

El parámetro X_m es propio del cuantizador, y en cualquier sistema real está fijo: es el rango de tensiones máximas y mínimas aceptado por el conversor A/D. La cantidad σ_x es el valor medio cuadrático (RMS) de la amplitud de la señal, y necesariamente es menor que el valor pico de la señal. Por ejemplo si $x[n]$ es una sinusoidal con amplitud pico X_p, entonces $\sigma_x = X_p/\sqrt{2}$. Si σ_x es muy grande, la amplitud de pico de la señal excederá el rango de escala completa X_m del conversor A/D. En este caso, se produce una fuerte distorsión, y la ecuación (5.124) deja de ser válida. Si, por otra parte, σ_x es muy pequeño, el término indicado por (5.125) será grande y negativo, disminuyendo la relación señal a ruido dada por (5.124): cuando σ_x se reduce a la mitad, la SNR se reduce en 6 dB. Estas consideraciones indican que es muy importante ajustar el nivel de la señal de entrada al conversor A/D de manera de evitar que sature, pero asegurándose de que la señal quede representada por un número adecuado de bits.

Para señales analógicas tales como la voz o la música, la distribución de las amplitudes tiende a estar concentrada alrededor de cero, y decrece rápidamente con amplitudes crecientes. En tal caso, la probabilidad que el valor de una muestra exceda 3 o 4 veces el

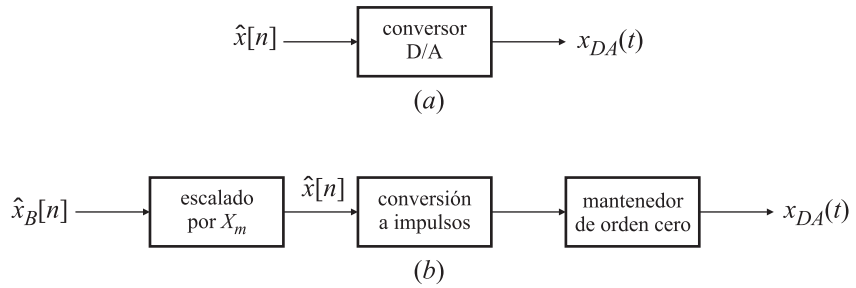


Fig. 5.75. Diagrama bloque de un conversor D/A (a); representación usando un mantenedor de orden cero (b).

valor RMS es extremadamente baja. Por ejemplo, si la amplitud de la señal tiene una distribución Gaussiana, sólo el 0.064 % de las muestras tendrá una amplitud superior a $4\sigma_x$. Entonces, para evitar recortar los picos de la señal se debe ajustar la ganancia de los filtros y amplificadores que preceden al conversor A/D de manera que $\sigma_x = X_m/4$. Reemplazando este valor de σ_x en (5.124) se encuentra que

$$SNR \approx 6B - 1{,}25 \text{ dB}.$$

Por ejemplo, para obtener una relación señal a ruido de alrededor de 90 a 96 dB como se necesita para grabación y reproducción musical de alta fidelidad se requieren 16 bits de cuantización; sin embargo, tal desempeño sólo se puede alcanzar si la amplitud de la señal de entrada se ajusta apropiadamente al rango del conversor A/D.

5.11.4. Conversión Digital-Analógica (D/A)

En la Sección 5.7 se discutió el proceso de reconstrucción de una señal limitada en banda a partir de una sucesión de muestras utilizando un filtro pasabajos ideal. En términos de la transformada de Fourier, el proceso de reconstrucción se representa como

$$X_r(f) = X(e^{j\omega})|_{\omega = f\frac{2\pi}{F_s}} H_r(f),$$

donde $X(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD) de la sucesión de muestras $x[n]$, y $X_r(f)$ es la trasnformada de Fourier de la señal de tiempo continuo reconstruida. El filtro reconstructor ideal tiene respuesta en frecuencia

$$H_r(f) = \begin{cases} T, & |f| < F_s/2, \\ 0, & |f| > F_s/2. \end{cases} \tag{5.126}$$

Para esta elección de $H_r(f)$, la relación entre $x_r(t)$ y $x[n]$ es

$$x_r(t) = \sum_n x[n] h_r(t - nT) = \sum_n x[n] \,\text{sinc}[(t - nT)/T]$$

donde $h_r(t) = \text{sinc}(t/T)$. El sistema que tiene como entrada la sucesión de muestras $x[n]$ y como salida la señal de tiempo continuo reconstruida se denomina *conversor D/C ideal*. Sin embargo, este no es un dispositivo físico (circuito integrado); la contraparte real de este modelo idealizado es el *conversor digital analógico* (D/A), seguido por un filtro

pasabajos apropiado. Como se muestra en la Fig. 5.75(a), el conversor D/A toma una sucesión de números binarios como entrada, y produce una salida de tiempo continuo de la forma

$$\begin{aligned} x_{DA}(t) &= \sum_n X_m \hat{x}_B[n] h_0(t-nT) \\ &= \sum_n \hat{x}[n] h_0(t-nT) \end{aligned} \tag{5.127}$$

donde $h_0(t)$ es la respuesta impulsiva del mantenedor de orden cero dada por la ecuación (5.119). Las líneas de trazos en la Fig. 5.70 (en la página 99) muestran la salida del conversor D/A para las muestras cuantizadas de la señal sinusoidal. El conversor D/A mantiene el valor de la muestra cuantizada durante un período de muestreo, de la misma manera que el mantenedor de orden cero mantiene el valor (no cuantizado) de la muestra de entrada. En general este no es un dispositivo adicional, sino que está formado por el "latch" interno del conversor D/A.

Utilizando el modelo de ruido aditivo para representar los efectos de la cuantización, la salida $x_{DA}(t)$ del conversor D/A dada por la ecuación (5.127) es

$$x_{DA}(t) = \sum_n x[n] h_0(t-nT) + \sum_n e[n] h_0(t-nT). \tag{5.128}$$

Para simplificar la notación, se definen

$$x_0(t) = \sum_n x[n] h_0(t-nT), \tag{5.129}$$

$$e_0(t) = \sum_n e[n] h_0(t-nT), \tag{5.130}$$

de manera que (5.128) se puede escribir como

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t).$$

La componente de señal $x_0(t)$ está relacionada con la señal de entrada $x_a(t)$, ya que $x[n] = x_a(t)|_{t=nT}$. La componente de ruido $e_0(t)$ depende de las muestras del ruido de cuantización $e[n]$ de la misma manera que $x_0(t)$ depende de las muestras sin cuantizar $x[n]$. Las trasformada de Fourier $X_0(f)$ de $x_0(t)$ dada por (5.129) es

$$\begin{aligned} X_0(f) &= \sum_n x[n] H_0(f) e^{-j2\pi fnT} = \left(\sum_n x[n] e^{-j2\pi fnT} \right) H_0(f) \\ &= X(e^{j\omega})|_{\omega = f\frac{2\pi}{F_s}} H_0(f). \end{aligned}$$

Como

$$X(e^{j\omega})|_{\omega = f\frac{2\pi}{F_s}} = \frac{1}{T} \sum_k X_a(f - kF_s),$$

se encuentra que

$$X_0(f) = \left[\frac{1}{T} \sum_k X_a(f - kF_s) \right] H_0(f). \tag{5.131}$$

Si $X_a(f)$ está limitada en banda a frecuencias menores que $F_s/2$, las réplicas de $X_a(f)$ no se solapan en la ecuación (5.131). Si se define un filtro de reconstrucción compensado

$$\tilde{H}_r(f) = \frac{H_r(f)}{H_0(f)},$$

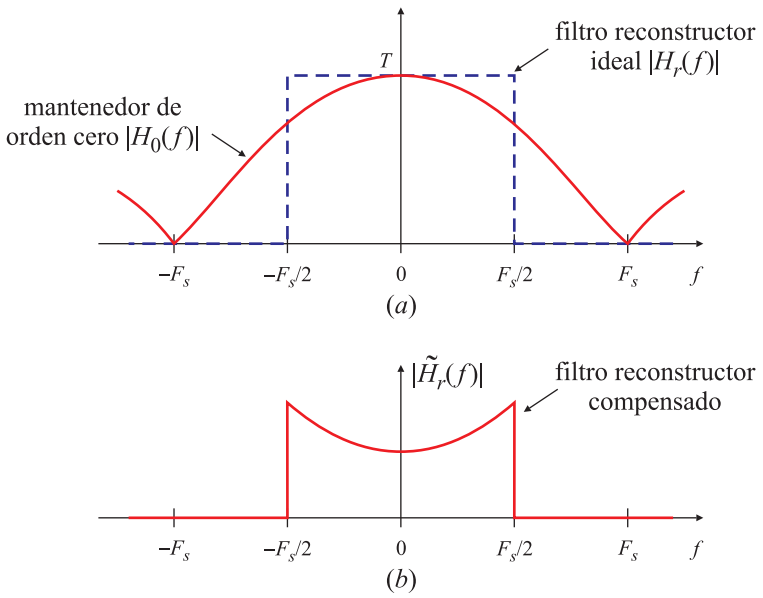


Fig. 5.76. Respuesta en frecuencia de un mantenedor de orden cero, comparada con la del filtro reconstructor ideal (a); filtro reconstructor compensado para usar con un conversor D/A con mantenedor de orden cero ("latch") (b).

la salida del fitro será $x_a(t)$ cuando la entrada es $x_0(t)$. Como la respuesta impulsiva del mantenedor de orden cero es un pulso de altura unitaria y ancho T,

$$h_0(t) = u(t) - u(t-T),$$

su transformada de Laplace es

$$H_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s},$$

y por lo tanto su transformada de Fourier está dada por

$$\begin{aligned} H_0(f) &= \frac{1-e^{-j2\pi Tf}}{j2\pi f} = \frac{e^{-j\pi Tf}}{j2\pi f}(e^{j\pi Tf} - e^{-j\pi Tf}) = e^{-j\pi Tf}\frac{\text{sen}(\pi Tf)}{\pi f} \\ &= e^{-j\pi Tf} T\,\text{sinc}(Tf). \end{aligned} \tag{5.132}$$

Por lo tanto, la función transferencia del filtro reconstructor compensado es

$$\tilde{H}_r(f) = \begin{cases} \dfrac{e^{j\pi Tf}}{\text{sinc}(Tf)}, & |f| < F_s/2, \\ 0, & |f| > F_s/2. \end{cases} \tag{5.133}$$

En la Fig. 5.76(a) se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia de $H_0(f)$ dado por (5.132), comparado con la respuesta del filtro reconstructor ideal $H_r(f)$ [ecuación (5.126)]. Ambos filtros tienen una ganacia T en $f = 0$, pero el mantenedor de orden cero, aunque también es de naturaleza pasabajo, no presenta un corte abrupto en $f_c = F_s/2$. La Fig. 5.76(b) representa el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor compensado $\tilde{H}_r(f)$ que debe colocarse a la salida de un conversor D/A. La respuesta de fase sería idealmente un adelanto de fase de medio período de muestreo $(T/2)$, para compensar el retardo causado por el mantenedor de orden cero (5.132). Como este avance de

fase no puede implementarse de manera práctica en un sistema real, normalmente sólo se compensa el módulo de la respuesta en frecuencia del mantenedor de orden cero. En muchas aplicaciones también esta compensación suele omitirse, porque la ganancia del mantenedor de orden cero es $2/\pi$ (aproximadamente -4 dB) en $f = F_s/2$.

La Fig. 5.77 muestra un conversor D/A seguido de un filtro reconstructor compensado. De la discusión precedente, la señal de salida reconstruida será

$$\begin{aligned} \hat{x}_r(t) &= \sum_n \hat{x}[n]\,\mathrm{sinc}[(t-nT)/T] \\ &= \sum_n x[n]\,\mathrm{sinc}[(t-nT)/T] + \sum_n e[n]\,\mathrm{sinc}[(t-nT)/T] \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t),$$

donde $e_a(t)$ es una señal de ruido blanco limitada en banda al rango $\pm F_s/2$.

Con todos estos elementos es posible completar el análisis del sistema discreto para procesamiento de señales continuas representado en la Fig. 5.54(b) , repetida en la Fig. 5.78. Si se supone que tanto el prefiltro $H_a(f)$ como el filtro reconstructor compensado $\tilde{H}_r(f)$ tienen respuesta en frecuencia nula fuera del rango $-F_s/2 < f < F_s/2$, y que el sistema discreto es lineal e invariante en el tiempo, la salida del sistema completo será

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t), \tag{5.134}$$

con

$$Y_a(f) = \tilde{H}_r(f)H_0(f)H(e^{j\omega})|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} H_a(f)X_c(f), \tag{5.135}$$

donde $H_a(f)$, $H_0(f)$ y $\tilde{H}_r(f)$ son las respuestas en frecuencia del filtro antialiasing, del mantenedor de orden cero del conversor D/A y del filtro reconstructor compensado, respectivamente. El término $H(e^{j\omega})|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}$ es la respuesta en frecuencia del sistema discreto expresada en las unidades de frecuencia del sistema continuo.

Suponiendo que el ruido de cuantización introducido por el conversor A/D es ruido blanco con varianza $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$, se puede demostrar que el espectro de potencia del ruido de salida es

$$P_{e_n}(f) = \left|\tilde{H}_r(f)H_0(f)H(e^{j\omega})|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}\right|^2 \sigma_e^2. \tag{5.136}$$

En otras palabras, el ruido de cuantización agregado por el conversor A/D queda afectado por las distintas etapas de filtrado en tiempo continuo y discreto. La ecuación (5.135) muestra que, bajo la hipótesis de que la distorsión por solapamiento es despreciable, la respuesta en frecuencia global desde $x_c(t)$ hasta $y_r(t)$ es

$$H_e(f) = \tilde{H}_r(f)H_0(f)H(e^{j\omega})|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}} H_a(f). \tag{5.137}$$

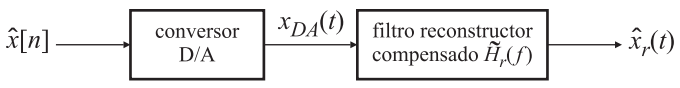


Fig. 5.77. Configuración física para la conversión digital-analógica.

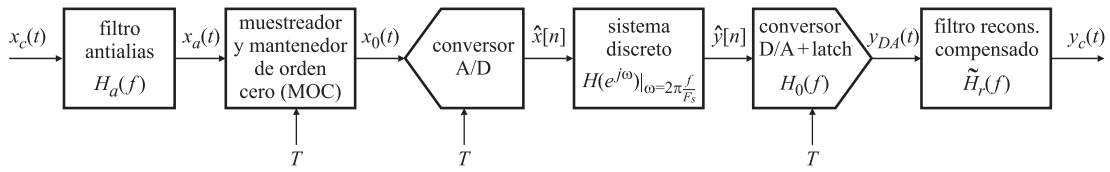


Fig. 5.78. Esquema de un sistema de procesamiento digital de señales analógicas..

Si el filtro antialiasing es ideal, como el indicado en la ecuación (5.111), y si la compensación del filtro reconstructor también es ideal [ecuación (5.133)], entonces la respuesta en frecuencia efectiva del sistema global tiene la forma dada por la ecuación (5.112):

$$H_e(f) = \begin{cases} H(e^{j\omega})\big|_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}}, & \text{para } |f| < F_s/2, \\ 0, & \text{para } |f| > F_s/2. \end{cases}$$

En caso contrario, la ecuación (5.137) es un mejor modelo. Esta expresión muestra que la compensación por imperfecciones en cualquiera de los cuatro términos puede ser incluido en alguno de los restantes. Por ejemplo, la compensación de la respuesta en frecuencia del prefiltro o del efecto del mantenedor de orden cero del conversor D/A, o ambas, pueden incluirse en la implementación del sistema discreto lineal e invariante en el tiempo.

Además del efecto de filtrado indicado por (5.137), la ecuación (5.134) muestra que la salida del sistema de procesamiento discreto de datos continuos representado en la Fig. 5.78 también queda contaminada por el ruido de cuantización filtrado, según se indica en (5.136). Más adelante se estudiará que también se puede generar ruido en la implementación del sistema discreto, causado por la cuantización de los coeficientes y la precisión finita que resulta de efectuar las operaciones matemáticas con aritmética de punto fijo. En general, este ruido interno quedará filtrado por el mismo sistema discreto, por el mantenedor de orden cero asociado al conversor D/A, y por el filtro reconstructor.

5.12. El cubo de Fourier-Poisson

Las aplicaciones clásicas del análisis de Fourier se basan en el uso de la integral (TF)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{5.138}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \qquad -\infty < f < \infty, \tag{5.139}$$

o la serie de Fourier para señales de tiempo continuo (SF)

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \qquad 0 \le t < T, \tag{5.140}$$

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt, \qquad -\infty < k < \infty, \tag{5.141}$$

(donde, para uniformizar la notación, se ha indicado $c_k = X[k]$) o bien la transformada de Fourier para señales de tiempo discreto (TFTD)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega, \quad -\infty < n < \infty, \tag{5.142}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}, \quad 0 \le \omega < 2\pi. \tag{5.143}$$

Las computadoras digitales pueden ser programadas para evaluar las sumas finitas (SDF, TDF)

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \le n \le N-1, \tag{5.144}$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \le k \le N-1, \tag{5.145}$$

con gran eficiencia. En las expresiones (5.144)-(5.145) las señales se notan como periódicas para facilitar la comparación con el resto de las transformadas, aunque el cálculo se indica únicamente para las N muestras significativas. En esta sección se derivan algunas identidades que conectan estas formas aparentemente no relacionadas del análisis de Fourier.

Las ecuaciones de síntesis y análisis (5.138)-(5.139), (5.140)-(5.141), (5.142)-(5.143) y (5.144)-(5.145) establecen mapas bidireccionales $x(t) \leftrightarrow X(f)$, $\tilde{x}(t) \leftrightarrow X[k]$, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $\tilde{x}[n] \leftrightarrow \tilde{X}[k]$ que vinculan funciones razonablemente regulares en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_T$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_N$ con sus transformadas. En esta sección $\mathbb{R}_T$ ($\mathbb{Z}_N$) indica que el argumento de la función en cuestión puede restringirse al rango $[0, T)$ ($[0, N-1]$) porque la función es periódica de período T (N). El propósito de esta sección, inspirada en Kammler (2000), es establecer ciertas conexiones entre estos cuatro tipos de análisis de Fourier de señales de una variable. Se establecen ocho vínculos o mapas unidireccionales $x(t) \to \tilde{x}(t)$, $x(t) \to x[n]$, $\tilde{x}(t) \to \tilde{x}[n]$, $x[n] \to \tilde{x}[n]$, $X(f) \to X[k]$, $X(f) \to X(e^{j\omega})$, $X[k] \to \tilde{X}[k]$, $X(e^{j\omega}) \to \tilde{X}[k]$ que sirven para vincular las esquinas adyacentes del cubo incompleto que se muestra en la Fig. 5.79. De esta forma se unifican las diferentes representaciones de la transformada de Fourier, y se derivan algunas herramientas computacionales muy valiosas.

5.12.1. Discretización por muestreo

Dada una función $x(\,\cdot\,)$ definida sobre $\mathbb{R}$ y una "unidad de muestra" T_s, se genera una función discreta $x[\,\cdot\,]$ sobre $\mathbb{Z}$ definiendo

$$x[n] = x(nT_s), \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Se dice que $x[\,\cdot\,]$ se construye *muestreando* $x(\,\cdot\,)$ cada T_s. La misma idea puede aplicarse para construir una función discreta N-periódica $\tilde{x}[\,\cdot\,]$ definida sobre $\mathbb{Z}_N$ a partir de una función periódica continua T-periódica $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ sobre $\mathbb{R}_T$. En este caso, T_s no se elige arbitrariamente, sino que se debe tomar $T_s = T/N$, de modo que N pasos de T_s igualen el período T de la señal. Con esta idea se define

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}\left(\frac{T}{N}n\right).$$

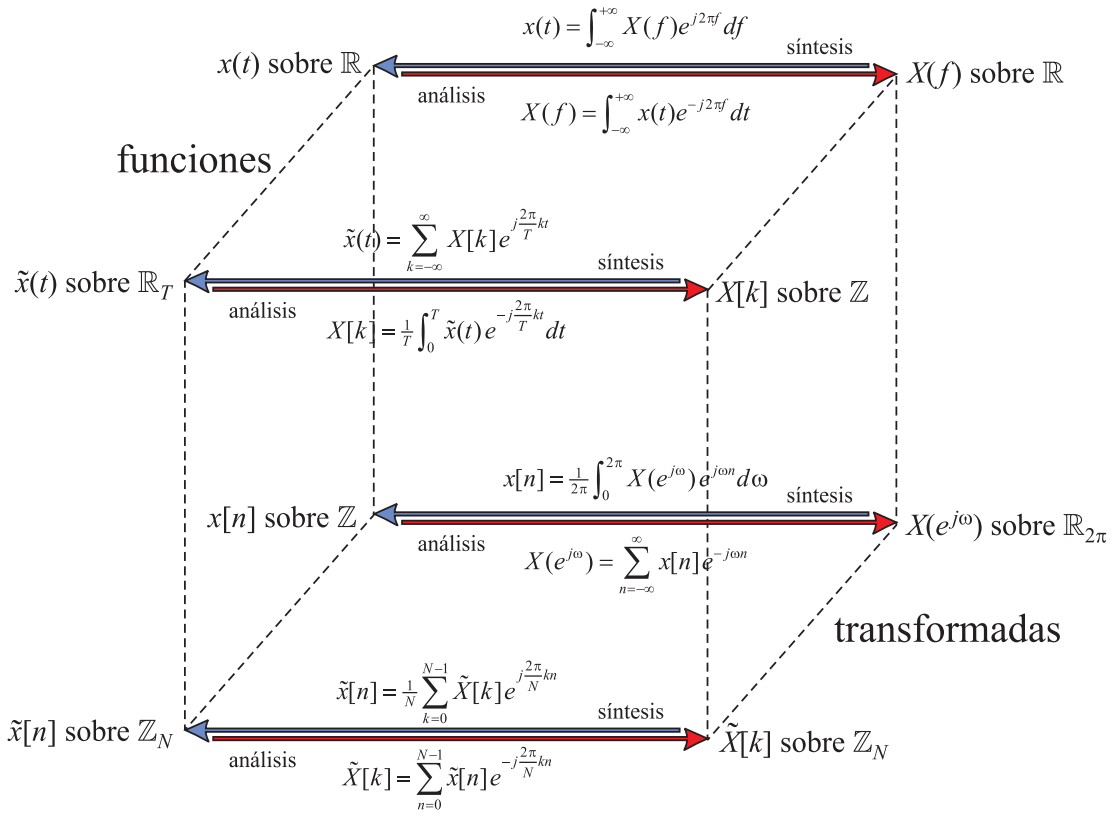


Fig. 5.79. Funciones de los cuatro pares transformados de Fourier (5.138)-(5.139), (5.140)-(5.141), (5.142)-(5.142) y (5.144)-(5.145) dispuestos como vértices de un cubo.

Estas discretizaciones (mapeos $x(t) \to x[n]$, $\tilde{x}(t) \to \tilde{x}[n]$) se muestran en la Fig. 5.80. Las funciones discretas $x[\,\cdot\,]$, $\tilde{x}[\,\cdot\,]$ son buenas representaciones de las funciones continuas $x(\,\cdot\,)$, $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ siempre que las funciones $x(\,\cdot\,)$, $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ no varíen apreciablemente sobre cualquier intervalo de longitud T_s.

5.12.2. Periodización por replicación

Sea $x(\,\cdot\,)$ una función continua definida sobre $\mathbb{R}$ tal que $x(t)$ tiende rápidamente a 0 cuando $t \to \pm\infty$. Si la función se traslada un número entero arbitrario de veces T unidades de tiempo,

$$\ldots, x(t+2T), x(t+T), x(t), x(t-T), x(t-2T), \ldots$$

se puede obtener una función $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ T-periódica sumando las réplicas,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-mT), \quad -\infty < t < \infty,$$

donde $T > 0$. Se dice que la función $\tilde{x}(t)$, definida sobre $\mathbb{R}_T$ se obtiene por *replicación* cada T de la función $x(t)$. Otra manera de describir una función periódica $\tilde{x}(t)$ es mediante la convolución de la señal aperiódica $x(t)$ con un tren de impulsos $p_T(t) = \sum_m \delta(t-mT)$:

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p_T(t) = x(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT) = \tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-mT), \quad -\infty < t < \infty.$$

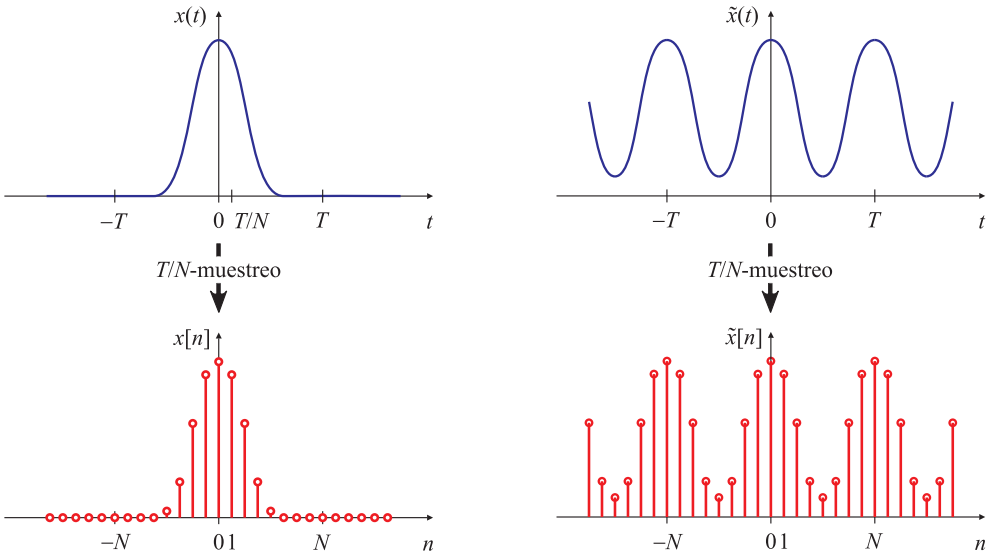


Fig. 5.80. Construcción de $x[n]$ sobre $\mathbb{Z}$ y de $\tilde{x}[n]$ sobre $\mathbb{Z}_N$ por T/N-muestreo de $x(t)$ sobre $\mathbb{R}$ y de $\tilde{x}(t)$ sobre $\mathbb{R}_T$, respectivamente.

De manera similar, cuando $x[\,\cdot\,]$ es una función discreta definida sobre $\mathbb{Z}$, y tal que $x[n]$ tiende rápidamente a 0 cuando $n \to \pm\infty$, se puede construir una función $\tilde{x}[\,\cdot\,]$ discreta y N-periódica sobre $\mathbb{Z}_N$ definiendo

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.146}$$

En este caso también puede construirse $\tilde{x}[\,\cdot\,]$ como la convolución entre $x[n]$ y un tren de impulsos N periódico $p_N[n] = \sum_m \delta[n - mN]$:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * p_N[n] = x[n] * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Estas "periodizaciones" (mapeos $x(t) \to \tilde{x}(t)$, $x[n] \to \tilde{x}[n]$) se ilustran en la Fig. 5.81. Las funciones periódicas $\tilde{x}(\,\cdot\,)$, $\tilde{x}[\,\cdot\,]$ son buenas representaciones de las funciones aperiódicas $x(\,\cdot\,)$, $x[\,\cdot\,]$ cuando estas funciones están concentradas en intervalos de longitud T o N, respectivamente.

5.12.3. Las relaciones de Poisson

Sea $x[\,\cdot\,]$ una función discreta definida sobre $\mathbb{Z}$. Si $x[\,\cdot\,]$ es absolutamente sumable,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

de modo que la suma (5.146) que define a $\tilde{x}[\,\cdot\,]$ sea convergente, se puede utilizar la ecuación de análisis (5.145) para obtener la transformada discreta de Fourier $\tilde{X}[k]$ de $\tilde{x}[\,\cdot\,]$ obtenida a partir de $x[\,\cdot\,]$ por N-replicación

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

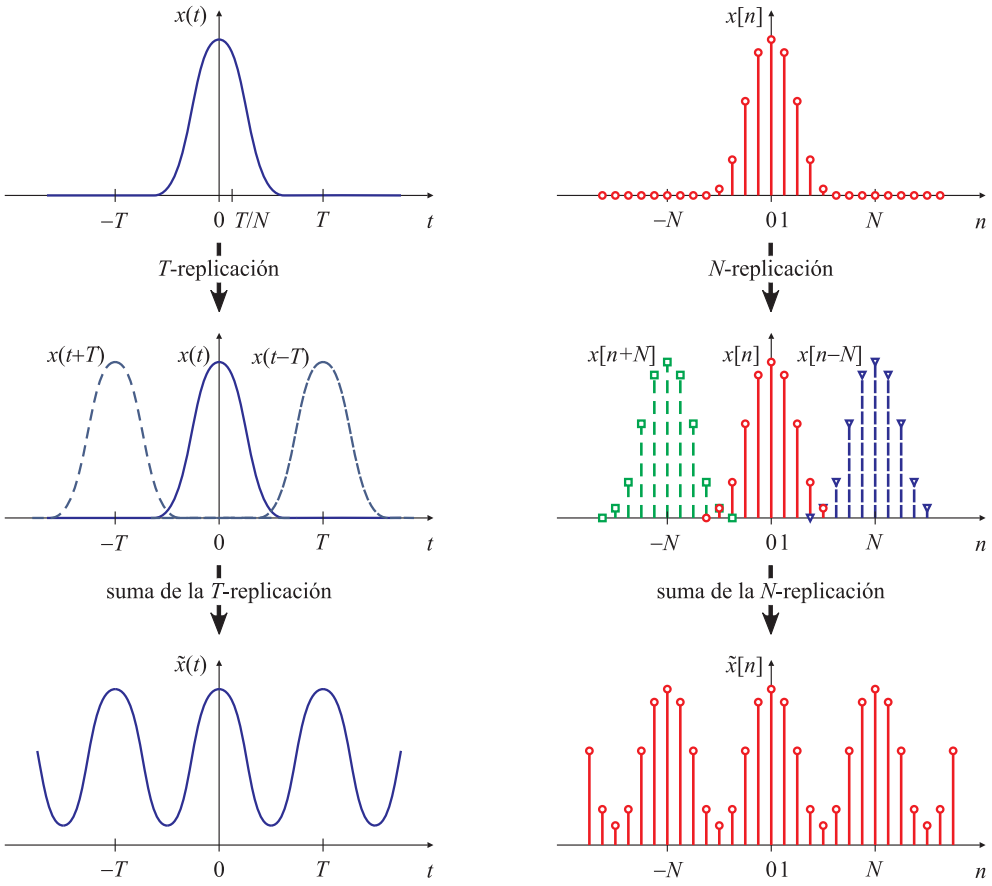


Fig. 5.81. Construcción de $\tilde{x}(t)$ sobre $\mathbb{R}_T$ por T-replicación de $x(t)$ sobre $\mathbb{R}$ y de $\tilde{x}[n]$ sobre $\mathbb{Z}_N$ por N-replicación de $x[n]$ sobre $\mathbb{Z}$.

Como $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ es N-periódica en n, y como cada entero ℓ tiene una representación única

$$\ell = n - mN, \quad \text{con} \begin{cases} n &= 0, 1, \ldots, N-1, \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

se puede escribir

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-mN)} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell}.$$

Si se observa la ecuación de análisis (5.143), se nota que

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En otras palabras, si $\tilde{x}[\,\cdot\,]$ se obtiene a partir de $x[\,\cdot\,]$ por N-replicación, entonces $\tilde{X}[k]$ se obtiene de $X(e^{j\omega})$ muestreándola con $1/N$. En este caso, es conveniente pensar que $X(e^{j\omega})$ está definida sobre $\mathbb{R}_{2\pi}$. De manera similar cuando $x(\,\cdot\,)$ es una función razonablemente regular sobre $\mathbb{R}$, se pueden hallar los coeficientes de la función T-periódica

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - nT)$$

escribiendo

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{x}(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-nT)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^T x(t-nT)e^{-j\frac{2\pi}{T}k(t-nT)}dt = \frac{1}{T}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} x(\xi)e^{-j\frac{2\pi}{T}k\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{T}\,X(f)\big|_{f=\frac{k}{T}}. \end{aligned}$$

Por supuesto, deben imponerse algunas condiciones de regularidad sobres $x(\,\cdot\,)$ para asegurar que las funciones $\tilde{x}(\,\cdot\,)$, $X[k]$ queden bien definidas, y también que sea posible intercambiar el orden de la integración y la sumatoria en el tercer paso. En este caso, si $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ se genera por T-replicación de $x(\,\cdot\,)$, entonces $X[\,\cdot\,]$ se obtiene escalando $X(\,\cdot\,)$ por $1/T$ y muestreando $X(\,\cdot\,)$ cada $1/T$.

De esta forma, las ecuaciones de análisis (5.139) y (5.141), (5.143) y (5.145) han permitido obtener los pares transformados de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-mT), \qquad X[k] = \frac{1}{T}\,X(f)\big|_{f=\frac{k}{T}}, \tag{5.147}$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN], \qquad \tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \tag{5.148}$$

donde $x(\,\cdot\,)$, $x[\,\cdot\,]$ son funciones razonablemente regulares sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, con transformadas de Fourier $X(f)$, $X(e^{j\omega})$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Se pueden utilizar argumentos similares, a partir de las ecuaciones de síntesis (5.138) y (5.142), (5.140) y (5.144) para obtener los pares transformados de Fourier

$$x[n] = x\left(\frac{T}{N}n\right), \qquad X(e^{j\omega}) = \frac{N}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(f - r\frac{N}{T}\right)\Big|_{f=\omega\frac{N}{2\pi T}}, \tag{5.149}$$

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}\left(\frac{T}{N}n\right), \qquad \tilde{X}[k] = N\sum_{r=-\infty}^{\infty} X[k-rN], \tag{5.150}$$

donde $x(\,\cdot\,)$, $\tilde{x}(\,\cdot\,)$ son funciones razonablemente regulares sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_T$ con transformadas de Fourier $X(\,\cdot\,)$, $X[\,\cdot\,]$ definidas sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, respectivamente. En la ecuación (5.149) se ha tomado $T_s = T/N$ para resaltar las similitudes con (5.150). Las relaciones (5.147)-(5.150) se denominan *relaciones de Poisson*, y revelan la relación dual entre el muestreo y la replicación en los dominios tiempo y frecuencia, respectivamente.

Por ejemplo, partiendo del T/N muestreo de $x(t)$, se tiene que

$$x[n] = x\left(\frac{T}{N}n\right),$$

y por lo tanto,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{T}{N}n\right)e^{-j\omega n}.$$

Tomando en cuenta la ecuación de síntesis (5.138),

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\Big|_{t=\frac{T}{N}n} e^{-j\omega n} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f\frac{T}{N}n}e^{-j\omega n}df. \tag{5.151}$$

Sabiendo que $\sum_n e^{\omega n} = 2\pi \sum_r \delta(\omega - 2\pi r)$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f \frac{T}{N} n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\left(2\pi f \frac{T}{N} - \omega\right) n} = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(2\pi f \frac{T}{N} - \omega + 2\pi r\right)$$
$$= \frac{N}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(f + \frac{2\pi r - \omega}{2\pi} \frac{N}{T}\right),$$

y reemplazando en (5.151) se obtiene

$$X(e^{j\omega}) = \frac{N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(f + \frac{2\pi r - \omega}{2\pi} \frac{N}{T}\right) df = \frac{N}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\omega}{2\pi} \frac{N}{T} - r \frac{N}{T}\right),$$

que justifica el par transformado (5.149), asumiendo, como en los casos anteriores, que las funciones involucradas son lo suficientemente regulares como para permitir el intercambio de orden de integración y suma.

Finalmente, el par transformado (5.150) se obtiene de manera similar, notando que

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}\left(\frac{T}{N} n\right),$$

y de acuerdo a la ecuación de análisis (5.145),

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}\left(\frac{T}{N} n\right) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}.$$

Aplicando la ecuación de síntesis (5.140),

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} X[q] e^{j\frac{2\pi}{T} qt} \Big|_{t=\frac{T}{N} n} e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} X[q] \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{T} q \frac{T}{N} n} e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$$
$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} X[q] \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(q-k)n},$$

y sabiendo que

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(q-k)n} = N \sum_r \delta[q - k + rN],$$

se tiene que

$$\tilde{X}[k] = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} X[k - rN],$$

como especifica (5.150).

La relación dual entre la replicación en un dominio y el muestreo en el otro también puede interpretarse con la convolución en un dominio o multiplicación en el otro, respectivamente, de la señal (o su transformada) con un tren de impulsos. Las relaciones entre los trenes de impulsos y sus transformadas son

$$p_T(t) = \sum_m \delta(t - mT) \quad \Longleftrightarrow \quad P_T(f) = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

para el caso continuo, y

$$p_N[n] = \sum_m \delta[n - mM] \quad \Longleftrightarrow \quad P_T(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

para el caso discreto. La aplicación de estas relaciones, junto con el teorema de convolución en tiempo o en frecuencia, permiten obtener los pares transformados (5.147)-(5.150) de manera casi trivial.

5.12.4. El cubo de Poisson

Las relaciones de Poisson, junto con las ecuaciones de análisis y síntesis, se pueden combinar para producir el *cubo de Fourier-Poisson*, que se muestra en la Fig. 5.82. Las funciones $x(\cdot)$, $\tilde{x}(\cdot)$, $x[\cdot]$, $\tilde{x}[\cdot]$, definidas sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_T$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_N$ respectivamente, y que cumplen con algunas condiciones de regularidad, se ubican sobre las esquinas del lateral izquierdo del cubo, y las trasformadas de Fourier correspondientes $X(\cdot)$, $X[\cdot]$, $X(e^{j\cdot})$, $\tilde{X}[\cdot]$, definidas sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_{2\pi}$, $\mathbb{Z}_N$, yacen sobre los vértices del lateral derecho. En este diagrama coexisten tres tipos de periodicidad:

- funciones T-periódicas, como $\tilde{x}(\cdot)$, definida sobre $\mathbb{R}_T$;
- funciones N-periódicas, como $\tilde{x}[\cdot]$, $\tilde{X}[\cdot]$, definidas ambas sobre $\mathbb{Z}_N$;
- funciones 2π-periódicas, como $X(e^{j\cdot})$, definida sobre $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Las ecuaciones de síntesis-análisis (5.138)-(5.145) permiten la conversión función $\leftrightarrow$ transformada. El proceso de T_s-muestreo y T-replicación son mapas unívocos (de un solo sentido) que permiten conectar esquinas adyacentes en el lateral izquierdo del cubo (cara de las funciones), y las fórmulas de Poisson (5.147)-(5.150) inducen mapeos unívocos correspondientes en el lateral derecho del cubo (cara de las transformadas).

Es posible desplazarse de una esquina a otra del cubo siguiendo diferentes caminos. Por ejemplo, se puede ir desde la esquina de $x(\cdot)$ a la de $\tilde{x}[\cdot]$ por el camino $x(\cdot) \rightarrow \tilde{x}(\cdot) \rightarrow \tilde{x}[\cdot]$ o bien por el camino $x(\cdot) \rightarrow x[\cdot] \rightarrow \tilde{x}[\cdot]$. Las relaciones de Poisson permiten verificar que cualquiera de estos dos caminos conducen a la misma función $\tilde{x}[\cdot]$:

$$\tilde{x}[n] \overset{(5.150)}{=} \tilde{x}\left(\frac{T}{N}n\right) \overset{(5.148)}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{T}{N}n - mT\right),$$

$$\tilde{x}[n] \overset{(5.148)}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] \overset{(5.149)}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{T}{N}[n - mN]\right).$$

Se pueden utilizar argumentos similares para verificar que dos caminos cualesquiera que unan sendas esquinas del cubo, de manera consistente con las flechas, corresponden al mismo mapa compuesto. Se dice que el cubo de Fourier-Poisson es un *diagrama conmutativo*.

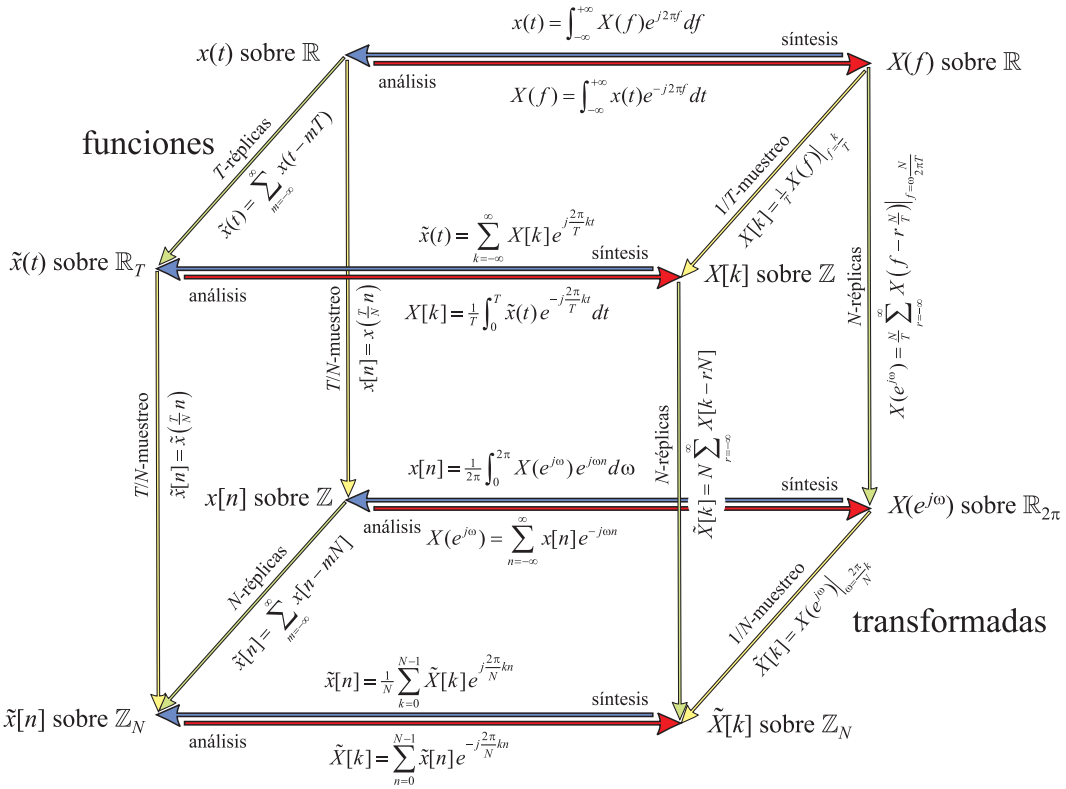


Fig. 5.82. El cubo de Fourier-Poisson es un diagrama conmutativo formado por las 8 ecuaciones de síntesis-análisis (5.138)-(5.145) y las 8 relaciones de Poisson (5.147)-(5.150).

5.13. El cubo discreto de Fourier-Poisson

Para las señales periódicas discretas $\tilde{x}[n]$ con transformada discreta de Fourier $\tilde{X}[k]$, relacionadas entre sí por las ecuaciones de síntesis y análisis

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{5.152}$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad 0 \le k \le N-1, \tag{5.153}$$

respectivamente, los procesos de replicación y de compresión permiten construir un diagrama conmutativo similar al cubo de Fourier-Poisson presentado en la sección anterior, donde todas las funciones intervinientes son *discretas* y *periódicas*.

5.13.1. N-Replicación o M-Suma

Si $\tilde{x}[n]$, $\tilde{X}[k]$ son funciones definidas sobre $\mathbb{Z}_{NM}$, el proceso de N-replicación

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=0}^{M-1} \tilde{x}[n - rN]$$

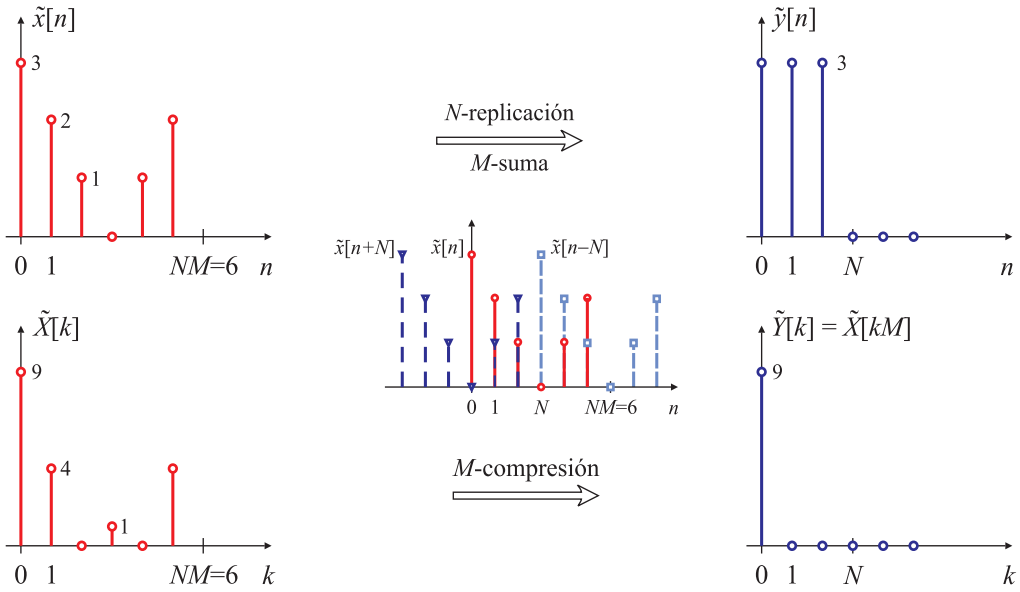


Fig. 5.83. Proceso de N-replicación o M-suma.

permite definir una función $\tilde{y}[n]$ sobre $\mathbb{Z}_N$, que está formada por M sumas desplazadas $\tilde{x}[n]$. Por ello este proceso también suele denominarse de M-suma.

La TDF $\tilde{Y}[k]$ también queda definida sobre $\mathbb{Z}_N$, y está dada por

$$\tilde{Y}[k] = \tilde{X}[kM].$$

La demostración es sencilla. Partiendo de la definición,

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{M-1} \tilde{x}[n-rN] \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

y teniendo en cuenta la N-periodicidad de $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$, y asumiendo implícitamente la N-periodicidad de $\tilde{x}[n]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{Y}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{M-1} \tilde{x}[n-rN] \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-rN)} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{M-1} \tilde{x}[n-rN] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-rN)} \\ &= \sum_{m=0}^{NM-1} \tilde{x}[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}, \end{aligned}$$

que también puede escribirse como

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{NM-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn\frac{M}{M}} = \sum_{n=0}^{NM-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{NM}(Mk)n} = \tilde{X}[kM].$$

EJEMPLO **5.30. Replicación de una sucesión temporal**

Sea $\tilde{x}[n]$ una sucesión definida sobre $\mathbb{Z}_6$ (es decir que $NM = 6$), $\tilde{x}[n] = \{3, 2, 1, 0, 1, 2\}$. Su TDF $\tilde{X}[k]$, también definida sobre $\mathbb{Z}_6$, es

$$\tilde{X}[k] = \{9, 4, 0, 1, 0, 4\}. \tag{5.154}$$

La M-replicación de $\tilde{x}[n]$, con $M = 2$ ($N = 3$) es

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=0}^{M-1} \tilde{x}[n - rN] = \tilde{x}[n] + \tilde{x}[n-3] = \{3,\, 2,\, 1\} + \{0,\, 1,\, 2\} = \{3,\, 3,\, 3\}.$$

Es sencillo verificar que la TDF de $\tilde{y}[n]$ es

$$\tilde{Y}[k] = \{9, 0, 0\}. \tag{5.155}$$

Comparando (5.154) con (5.154) se observa que $\tilde{Y}[k] = \tilde{X}[kM]$, como se ilustra en la Fig. 5.83. □

5.13.2. Compresión

Si $\tilde{x}[n]$, $\tilde{X}[k]$ son funciones definidas sobre $\mathbb{Z}_{NM}$, el proceso de M-compresión $\tilde{y}[n] = \tilde{x}[nM]$ permite definir una función $\tilde{y}[n]$ sobre $\mathbb{Z}_N$, cuya TDF $\tilde{Y}[k]$ también queda definida sobre $\mathbb{Z}_N$, y está dada por

$$\tilde{Y}[k] = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} \tilde{X}[k - \ell N]$$

como se comprueba a partir de la ecuación de síntesis (5.152)

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} \tilde{X}[k - \ell N] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Teniendo en cuenta la N-periodicidad $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$\begin{aligned} \tilde{y}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} \tilde{X}[k - \ell N] e^{j\frac{2\pi}{N}(k-\ell N)n} = \frac{1}{NM} \sum_{r=0}^{NM-1} \tilde{X}[r] e^{j\frac{2\pi}{N}rn} \\ &= \frac{1}{NM} \sum_{r=0}^{NM-1} \tilde{X}[r] e^{j\frac{2\pi}{NM}r(nM)} = \tilde{x}[nM]. \end{aligned}$$

5.13.3. Cubo discreto de Poisson

La N-replicación o M-suma y la M-compresión permiten establecer los pares transformados de Fourier

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=0}^{M-1} \tilde{x}[n - rM] \quad \leftrightarrow \quad \tilde{Y}[k] = \tilde{X}[kM], \tag{5.156}$$

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}[nM] \quad \leftrightarrow \quad \tilde{Y}[k] = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} \tilde{X}[k - \ell M], \tag{5.157}$$

donde $\tilde{x}[n]$, $\tilde{X}[k]$ están definidas sobre $\mathbb{Z}_{NM}$, e $\tilde{y}[n]$, $\tilde{Y}[k]$ sobre $\mathbb{Z}_N$. Estos pares, junto con las ecuaciones de síntesis (5.152) y de análisis (5.153) para los distintos dominios permiten recrear el cubo discreto de Fourier-Poisson que se muestra en la Fig. 5.84.

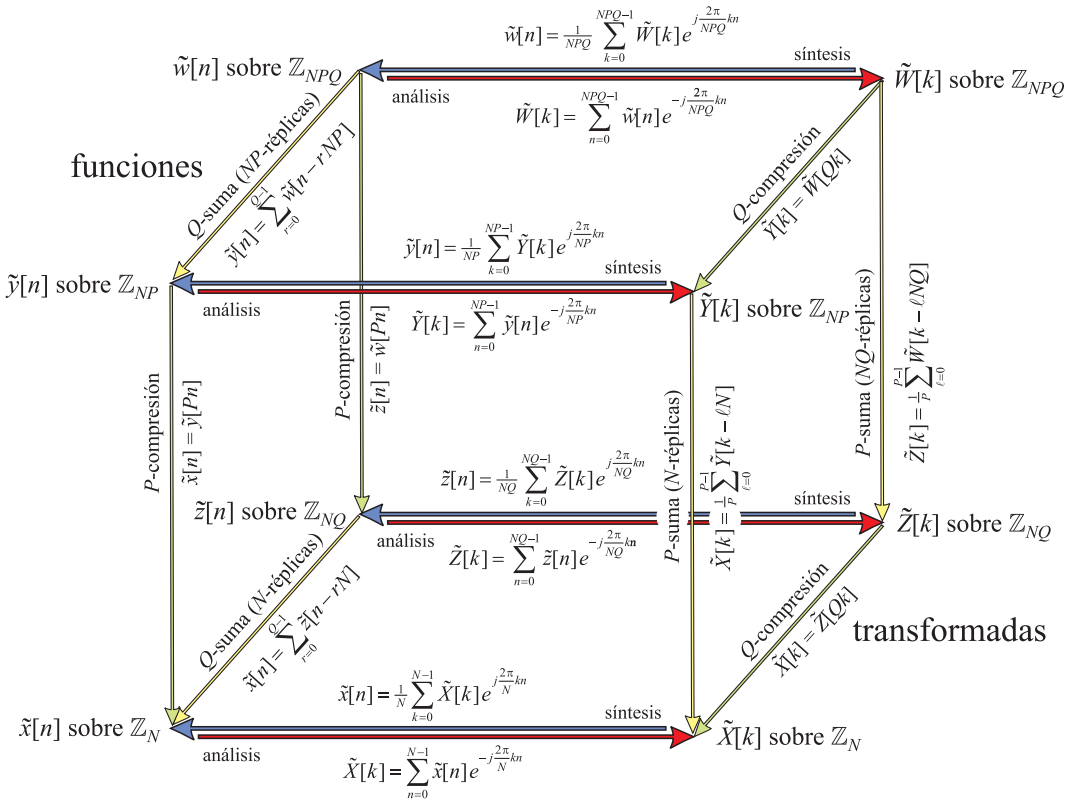


Fig. 5.84. Cubo discreto de Fourier-Poisson.

5.14. Experiencias de laboratorio

Se comentan en esta sección tres experiencias de laboratorio. En ambas se muestrean señales continuas con un muestreador muy simple formado por un par de llaves analógicas CMOS tipo CD4066, y algunos operacionales que actúan como amplificadores/aisladores, como se representa en la Fig. 5.85. El muestreador no es de buena calidad, pero sirve para mostrar los efectos más destacados del muestreo de señales.

En primer lugar se muestrea una onda sinusoidal cuya frecuencia se varía desde poco menos de un décimo de la frecuencia de muestreo F_s hasta casi la mitad de F_s, de modo que no se produce *aliasing*. En la segunda experiencia se trata con una señal que no es de ancho de banda limitada: una onda cuadrada. Este caso es interesante porque algunas componentes del espectro de la señal continua se replican dentro de la banda de Nyquist, entre $-F_s/2$ y $F_s/2$. Finalmente se estudia el espectro de una señal cuadrada de frecuencia fija y ciclo de trabajo variando entre el 20 % y el 50 %.

En todos los casos se muestran las formas de onda temporales continuas y discretas, a la entrada y salida del muestreador, respectivamente, en la columan de la izquierda, y los espectros de la señal discreta medidos con el analizador Lab-Volt 9405 reseñado en el Capítulo 2, en la columna de la derecha de las figuras. La frecuencia de muestreo es $F_s = 5$ kHz, y el eje de frecuencias abarca desde $-F_s$ hasta F_s. El pico centrado en $f = 0$ indica el origen del eje de frecuencias, y no representa ninguna componente armónica de la señal. La banda de Nyquist, comprendida entre $-F_s/2$ y $F_s/2 = f_N$, se indica con línea

de trazos.

5.14.1. Muestreo de una onda senoidal

La Fig. 5.86 muestra los resultados de muestrear una señal sinosoidal cuya frecuencia se varía entre 300 Hz y 2300 Hz, y por lo tanto no hay posibilidades de *aliasing*, es decir que aparezcan réplicas de las componentes frecuenciales de la señal dentro de la banda de Nyquist. En los espectros se destacan las componentes ubicadas en $\pm f_0$, y las réplicas en $\pm(F_s - f_0)$. Se observa también que a medida que aumenta la frecuencia de la señal estas componentes se aproximan, y eventualmente se superponen cuando la frecuencia f_0 de la señal se aproxima a la frecuencia de Nyquist, i.e., cuando $f_0 \rightarrow F_s/2$.

5.14.2. Muestreo de una onda cuadrada

En la Fig. 5.87 se grafican los resultados de muestrear ondas cuadradas de distintas frecuencias. Este caso es interesante pues al no ser una señal de ancho de banda limitada, aparecen réplicas de las componentes frecuenciales dentro de la banda de Nyquist. En estas condiciones no se puede asegurar una reconstrucción perfecta de la señal continua a partir de sus muestras. En algunas de las figuras, por ejemplo la que corresponde a una frecuencia $f_0 = 1500$ Hz, estas componentes espurias son fácilmente detectables, como los dos picos de pequeña amplitud ubicados cerca de ± 750 Hz. Además aparecen componentes en frecuencias que no son múltiplos de la componente fundamental. La amplitud y distribución de estas componentes dependen de la relación entre la frecuencia fundamental de la señal y la frecuencia de muestreo.

En la Fig. 5.88 se estudia una onda cuadrada cuya frecuencia fundamental es $f_0 = 500$ Hz, y con ciclos de trabajo que varían entre un 25 % y un 50 %. El espectro de la señal continua de estas características mostraría la variación de amplitud de algunas componentes frecuenciales, como se estudió en el Capítulo 2. Sin embargo, para una señal discreta no sólo varía la amplitud sino la frecuencia de las componentes espectrales, como se aprecia en la columna derecha de la Fig. 5.88.

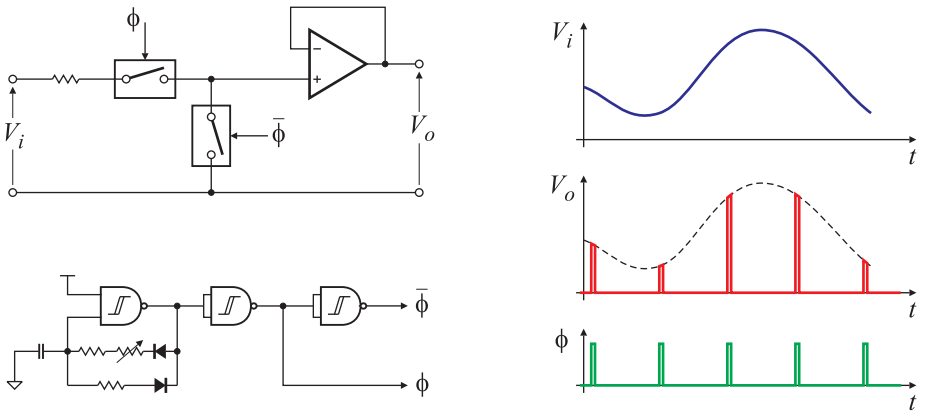
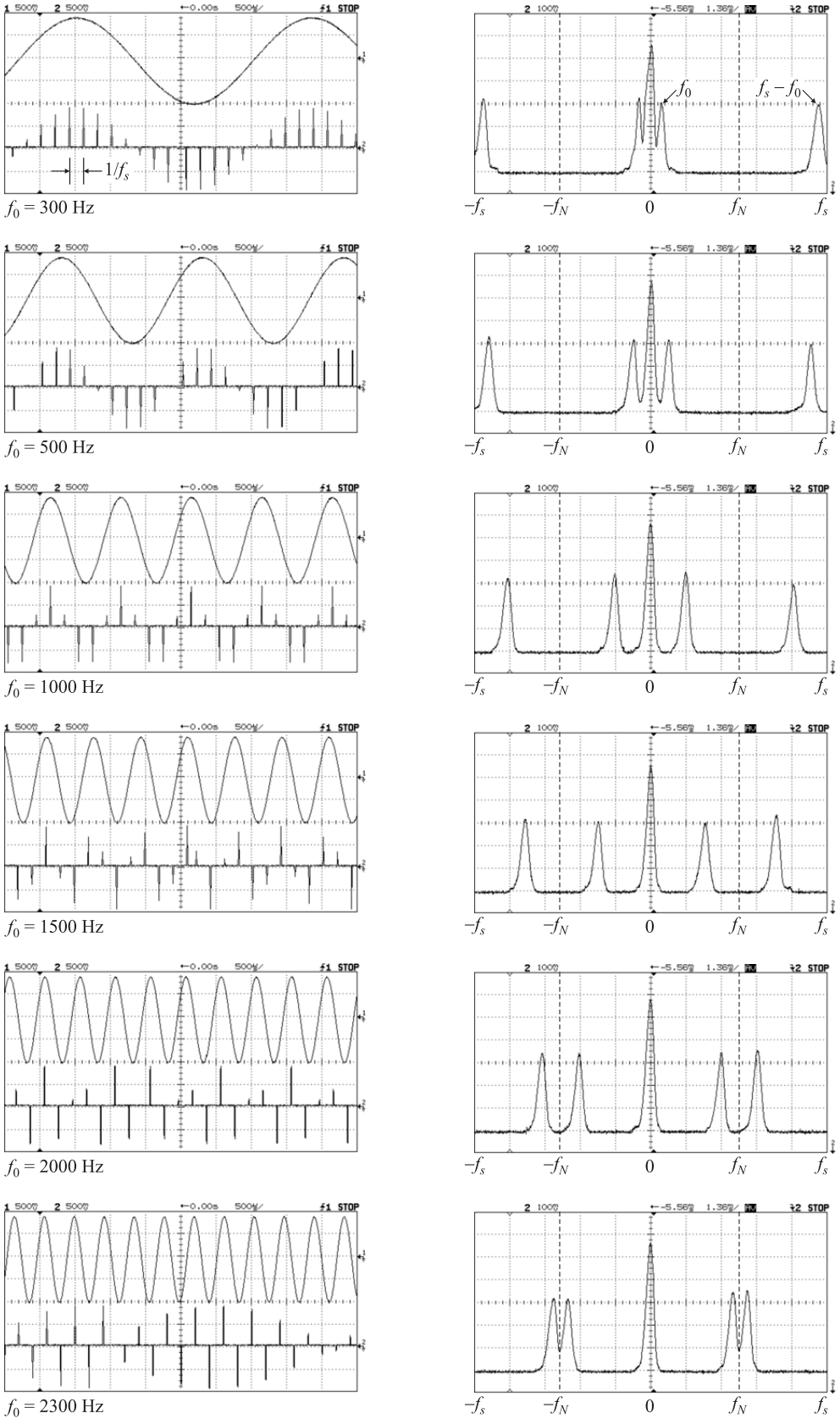


Fig. 5.85. Esquema circuital de un muestreador sencillo, y las principales formas de onda.



$f_0 = 300$ Hz

$f_0 = 500$ Hz

$f_0 = 1000$ Hz

$f_0 = 1500$ Hz

$f_0 = 2000$ Hz

$f_0 = 2300$ Hz

Fig. 5.86. Muestreo de ondas sinusoidales de distintas frecuencias.

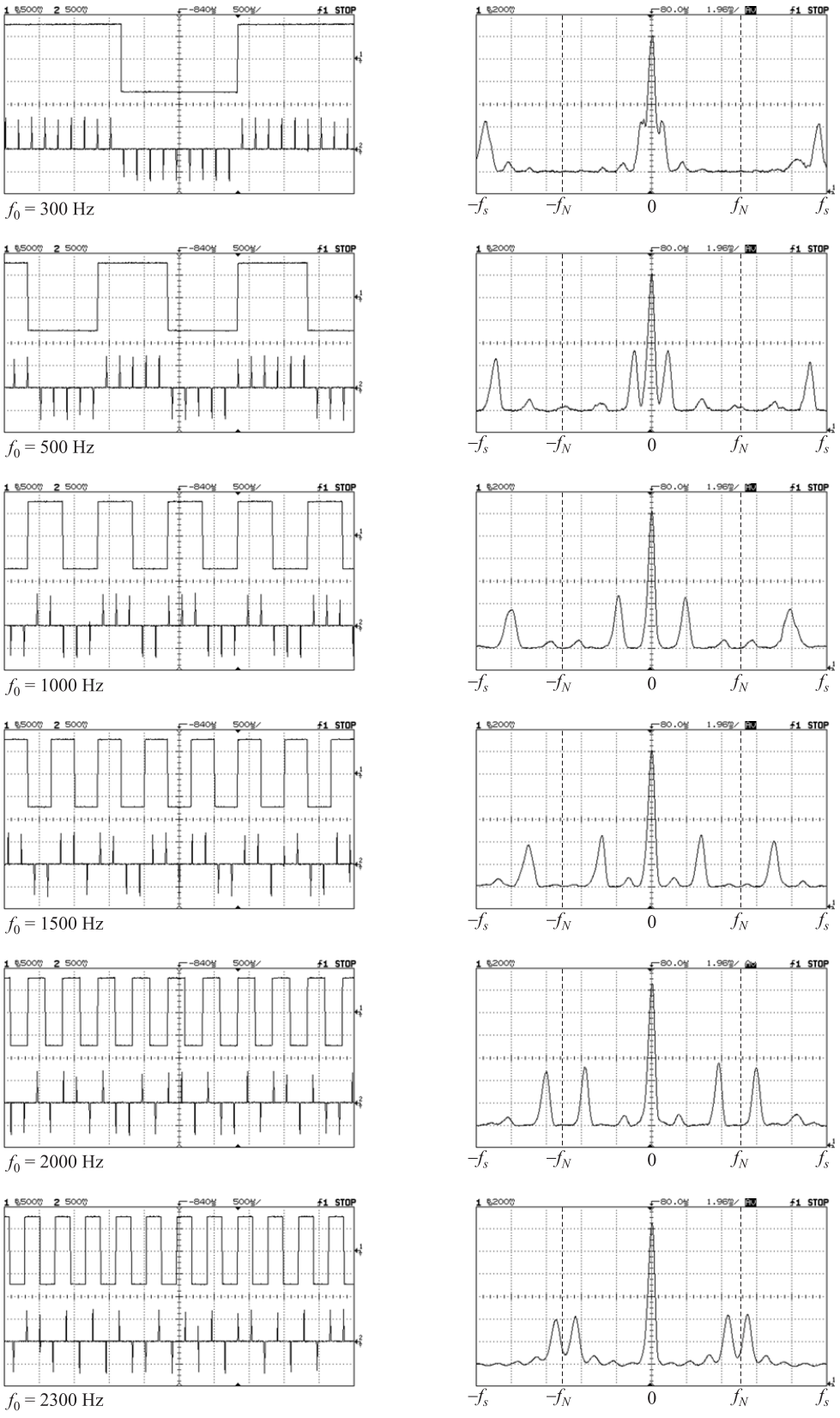


Fig. 5.87. Muestreo de ondas cuadradas de distintas frecuencias.

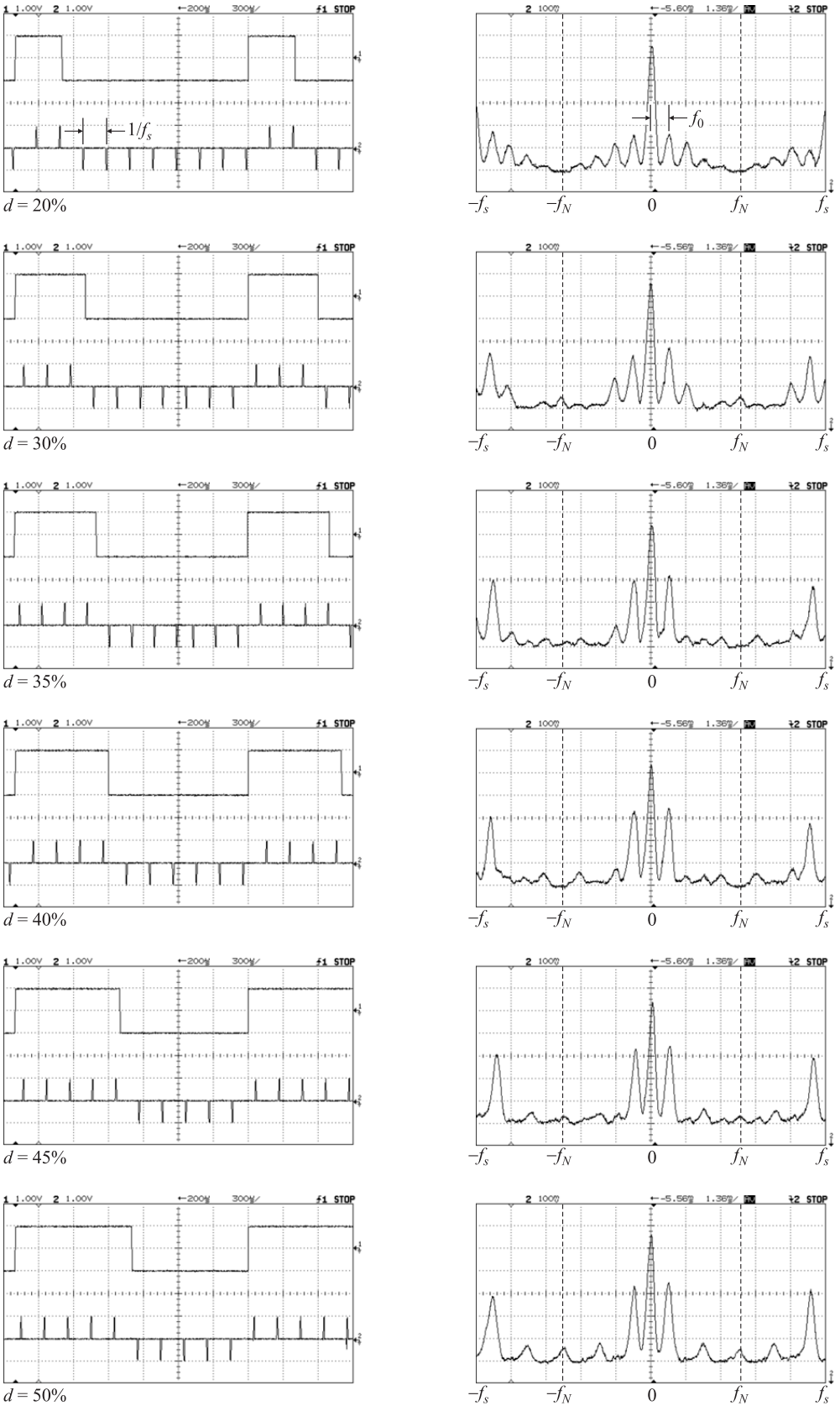


Fig. 5.88. Muestreo de ondas cuadradas con distintos ciclos de trabajo.

5.15. Los osciloscopios digitales como sistemas discretos de procesamiento de señales continuas

El primer osciloscopio digital fue ideado en 1971 por Hiro Moriyasu, un ingeniero japonés que en ese entonces trabajaba en Tektronix, y patentado recién en 1980 (Fig.5.89). Desde entonces el diseño pretende emular el de los osciloscopios analógicos. En un osciloscopio digital no solo se simplifica la implementación de algunas funcionalidades como el barrido único o el barrido demorado, sino que se pueden agregar otras características no disponibles en los equipos analógicos (al menos, en los de costo similar), como la visualización de la señal previa al disparo, mediciones de distintos parámetros de la señal, almacenamiento de formas de onda y datos para análisis posterior, reducción de ruido, promediación, magnificación, operaciones matemáticas sobre la señal, etc.

5.15.1. Principio de funcionamiento

En la Fig. 5.90 se representa el diagrama en bloques simplificado de un osciloscopio digital. El amplificador, junto con los atenuadores, escalan las señales de entrada de modo de ajustarlas al rango de tensiones admisibles del convertidor analógico/digital. El muestreador toma muestras de la señal de entrada a la frecuencia determinada por la base de tiempos. El conversor A/D transforma el nivel de tensión de cada muestra en un número binario, que se almacenan en la memoria. Esta es barrida por otro reloj a una velocidad adecuada para la representación en la pantalla.

En estos osciloscopios es habitual especificar el ancho de banda *analógico*, que depende de los atenuadores de entrada, amplificador vertical, muestreador, etc. y también la máxima frecuencia de muestreo. Como se explica más adelante, lo que importa realmente es la frecuencia efectiva de muestreo, que depende tanto de la frecuencia de muestreo como de la capacidad de memoria del osciloscopio. Aunque muchas veces se deja de lado, también es importante el ancho de banda del canal de disparo, que debe ser similar al ancho de banda del canal vertical.

5.15.2. Algunos problemas

Los avances en la tecnología han permitido el desarrollo de mejores instrumentos, pero todavía hay algunas variables de diseño cuya elección resulta de un compromiso entre costo y prestación. Algunas de estas desventajas son:

- bajas frecuencias de muestreo;
- pequeña capacidad de memoria;
- tiempos más lentos de actualización de la información representada en la pantalla.
- errores de cuantización.

A continuación se tratan brevemente cada una de ellas.

United States Patent [19]

Moriyasu et al.

[11] **4,225,940**

[45] **Sep. 30, 1980**

[54] **OSCILLOSCOPE SYSTEM FOR ACQUIRING, PROCESSING, AND DISPLAYING INFORMATION**

[75] Inventors: **Hiro Moriyasu**, Portland; **Jack A. Gilmore**, Aloha; **Willem B. Velsink**, Beaverton; **Luis J. Havarro**, Portland, all of Oreg.

[73] Assignee: **Tektronix, Inc.**, Beaverton, Oreg.

[21] Appl. No.: **948,068**

[22] Filed: **Oct. 2, 1978**

Related U.S. Application Data

[63] Continuation of Ser. No. 736,677, Oct. 28, 1976, abandoned, which is a continuation of Ser. No. 631,345, Nov. 12, 1975, abandoned, which is a continuation of Ser. No. 321,876, Jan. 8, 1973, abandoned.

[51] **Int. Cl.**[2] **G06F 3/05**; G01R 13/20; G06F 5/00; G06F 13/00

[52] **U.S. Cl.** ..... **364/900**; 324/121 R; 340/745; 315/367; 315/379; 340/347 SH; 340/347 R

[58] **Field of Search** ... 364/200 MS File, 900 MS File, 364/521, 487; 315/365, 366, 367, 379; 346/110 R, 33 C, 33 WL; 324/77 R, 77 B, 78 E, 121 R, 77 A; 367/68, 69, 71; 340/347, 721, 722, 723, 736, 745, 747; 328/104, 154; 307/243

[56] **References Cited**

U.S. PATENT DOCUMENTS

3,153,763	10/1964	Uphoff	328/104
3,344,407	9/1967	Koeijmans	340/172.5
3,345,616	10/1967	Avril	340/172.5
3,380,028	4/1968	Gustafson	340/721
3,406,387	10/1968	Werme	340/324
3,439,342	4/1969	Barton	340/172 S
3,506,813	4/1970	Trimble	324/77 R
3,512,131	5/1970	Nelson	340/172 S
3,514,759	5/1970	Watanabe	340/172 S
3,514,762	5/1970	Sloane	340/172 S
3,585,440	6/1971	Lee	340/324
3,621,214	11/1971	Romney	235/151
3,629,841	12/1971	Hare	364/900
3,629,844	12/1971	Dancis	340/172 S
3,648,250	3/1972	Luw	340/172 S
3,651,510	3/1972	Gilbert	340/324 A
3,652,999	3/1972	Hjort	340/172 S
3,653,027	3/1972	Scheer	340/324 A
3,662,380	5/1972	Cargile	340/324 AD
3,736,564	5/1972	Watkins	340/172 S
3,765,009	10/1973	Graves	340/324 A
3,792,463	2/1974	Eriksson	340/723
3,859,556	1/1975	Schumann	315/367
3,872,461	3/1975	Jarosik	315/365

OTHER PUBLICATIONS

"Tektronix Oscilloscopes & Associated Instruments", 1970 Catalog, pp. 100–101, 127.

Primary Examiner—James D. Thomas
Attorney, Agent, or Firm—George T. Noe

[57] **ABSTRACT**

A general-purpose oscilloscope system is disclosed wherein waveforms acquired by the vertical and horizontal preamplifier channels can be displayed immediately, or they can be digitized and stored in a memory from where they can be recalled, reconstituted in their analog form and displayed at a later time. The processing system permits simultaneous display of instantaneous and processed waveforms, and includes facilities for processing associated z-axis signals and readout data as well. Access to peripheral equipment, such as a computer or the like, permits the digitized waveforms to be mathematically manipulated and returned to the memory in the processing system for ultimate display. The oscilloscope system can be assembled in a modular manner, whereby the processing unit becomes an integral part of the instrument, or the system can be assembled as a general-purpose oscilloscope without the processing unit, allowing a user to add the processing capability to his system at a later time.

4 Claims, 5 Drawing Figures

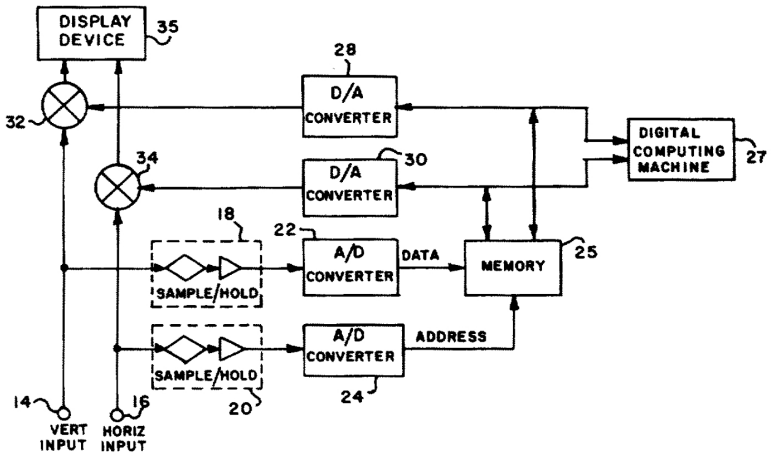


Fig. 5.89. Patente de un "sistema osciloscopio para adquirir, procesar y mostrar información", presentada en 1978 y otorgada en 1980.

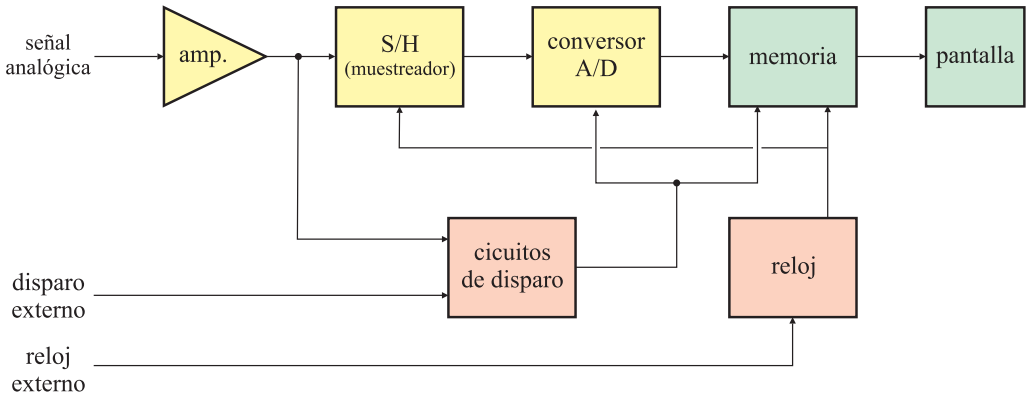


Fig. 5.90. Diagrama en bloques simplificado de un osciloscopio digital.

Bajas frecuencias de muestreo

Los primeros osciloscopios digitales estaban pensados para registrar señales repetitivas, y por lo tanto su frecuencia de muestreo estaba muy por debajo del ancho de banda del canal vertical. Para representar adecuadamente señales comprendidas dentro del ancho de banda del osciloscopio se utilizaba el denominado "muestreo equivalente", por el cual cada muestra de desplazaba en tiempo una cantidad precisa. De este modo la señal periódica queda muestreada en distintos puntos a lo largo de varios ciclos, y es posible obtener una representación fiel de la señal en la pantalla. Sin embargo, una baja frecuencia de muestreo aumenta las posibilidades de que ocurra distorsión por solapamiento (*aliasing*) de las componentes de alta frecuencia de una señal; además esta aproximación es inviable para señales no periódicas, lo que limita el modo de disparo único a señales de muy baja frecuencia. A medida que se dispuso de conversores más veloces y económicos la frecuencia de muestreo se incrementó a tres o cuatro veces el ancho de banda del amplificador vertical del osciloscopio (más detalles en la Sección 5.15.2), y en la actualidad, salvo para osciloscopios diseñados para analizar señales de muy alta frecuencia (del orden del gigahertz), el "muestreo equivalente" casi no se utiliza.

Pequeña capacidad de memoria

Una reducida capacidad de memoria limita la cantidad de muestras que se pueden almacenar en el modo de disparo único, y reduce el tiempo de muestreo efectivo (y por lo tanto el ancho de banda) sobre todo en las escalas de tiempo de más bajas (altos s/div). La poca memoria restringe el intervalo de tiempo que puede registrarse cuando se dispara la adquisición, y al haber pocas muestras la separación entre ellas debe ser mayor para cubrir un determinado lapso de tiempo. Esta restricción se debe en parte al costo de la memoria de alta velocidad, y en parte a las limitaciones de diseño del sistema de adquisición.

Capacidad de memoria y frecuencia de muestreo La base de tiempos de los osciloscopios digitales no sólo ajusta la escala del eje horizontal en unidades de tiempo por división, sino que también selecciona la frecuencia de muestreo con que se adquiere la señal analógica. En el caso de los osciloscopios Agilent DSO3102A disponibles en los

laboratorios, la máxima frecuencia de muestreo es de 1000 millones de muestras por segundo (1 Gs/s). De acuerdo al ajuste de la base de tiempo, se selecciona la frecuencia de muestreo de modo de mostrar $N_{s/d} = 100$ s/div (muestras por división), que es suficientemente denso como para mostrar formas de onda con buena resolución. Hay un total de $N_d = 12$ divisiones en el eje temporal, de modo que cada pantalla está formada por $N_s = N_{s/d}N_d = 1200$ muestras. De modo que la frecuencia de muestreo resulta

$$F_s = \frac{N_m}{N_d T_{BT}} = \frac{N_{s/d}}{T_{BT}} \text{ muestras},$$

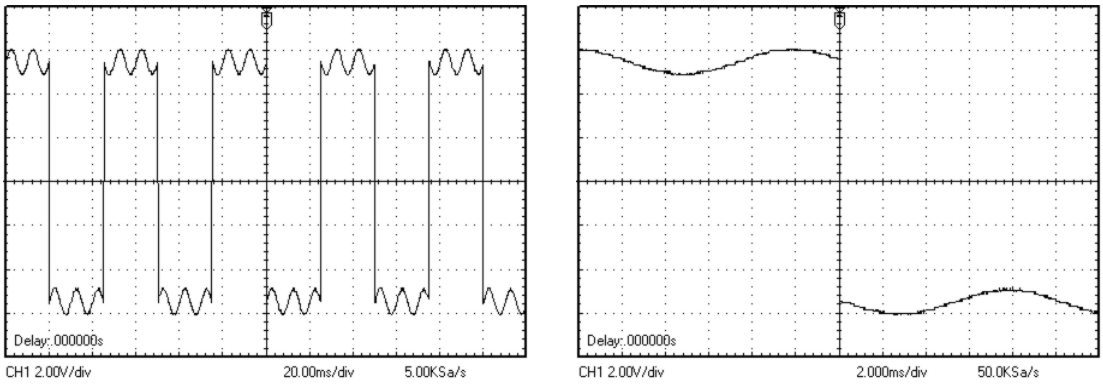
donde T_{BT} es el ajuste de la base de tiempo en unidades de tiempo por división. Por ejemplo, si la base de tiempos se ajusta a $T_{BT} = 20$ ms/div, la frecuencia de muestreo es $F_s = N_m/(N_d T_{BT}) = N_{m/d}/T_{BT} = 100/20 \times 10^{-3} = 5$ ks/s (kilo-muestras por segundo).

La distorsión por solapamiento se pone de manifiesto en señales formadas por componentes armónicas de frecuencias muy distintas entre sí, como se muestran en estos ejemplos.

EJEMPLO **5.31. Oscilogramas de señales de 20 Hz y 100 Hz**
En la Fig. 5.91 se muestra una señal compuesta por una onda cuadrada de 20 Hz y 9 V de pico sumada a una sinusoidal de 100 Hz y 1 V de pico. En la Fig. 5.91(a) se representa la señal que se observa en la pantalla del osciloscopio cuando se ajusta la base de tiempos a 20 ms/div, lo que resulta en una frecuencia de muestreo de 5 ks/s. En la Fig. 5.91(b) se muestra un detalle del tramo central de la señal, obtenida con una base de tiempos 10 veces más rápida (2 ms/div). Se observa que un ciclo de la señal senoidal ocupa 5 divisiones, y por lo tanto su frecuencia es de 100 Hz. □

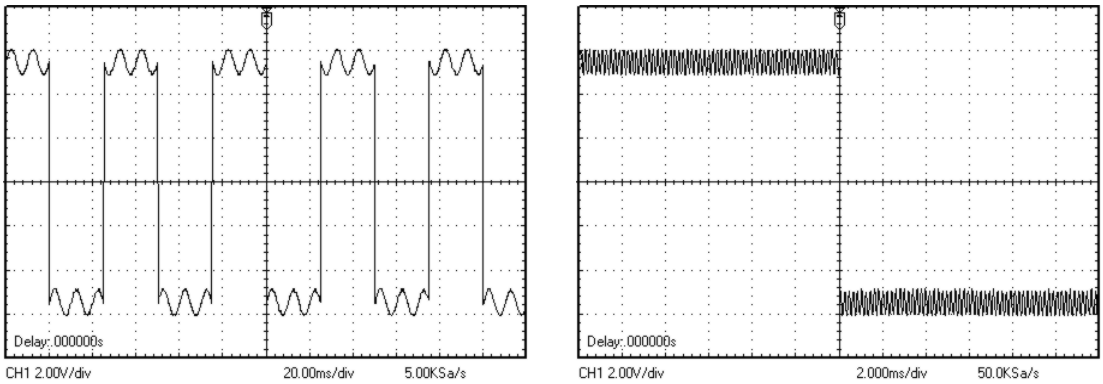
EJEMPLO **5.32. Oscilogramas de señales de 20 Hz y 5100 Hz**
La Fig. 5.92 muestra los resultados de aplicar una señal similar a la del ejemplo anterior, compuesta por una onda cuadrada de 20 Hz y 9 V de pico sumada a una sinusoidal de 1 V de pico, *pero con una frecuencia de* 5100 Hz. En la Fig. 5.92(a) se muestra la pantalla del osciloscopio cuando la base de tiempos se ajusta a 20 ms/div. ¡La forma de onda es idéntica a la de la Fig. 5.91(a)! En la figura se aprecia que hay 5 ciclos de la onda sinusoidal por cada ciclo de la onda cuadrada, de donde se deduce que la señal senoidal tiene una frecuencia 5 veces mayor que la de la onda cuadrada, es decir, 100 Hz. Sin embargo, si se cambia la base de tiempos a 2 ms/div, se observa la pantalla de la Fig. 5.92(b), que revela que la frecuencia de la señal senoidal es mucho mayor. Con buena voluntad se pueden contar 10 ciclos de la onda senoidal por cada división, lo que indica una frecuencia de aproximadamente 5 kHz. Una pantalla con una base de tiempos menor, de 200 μs/div que corresponde a una frecuencia de muestreo de 500 ks/s, se muestra en la Fig. 5.93. En esta gráfica se puede calcular que la frecuencia de la señal senoidal es aproximadamente 5 kHz (para determinar la frecuencia correcta de 5100 Hz deberían contarse 12.24 ciclos de la onda senoidal en la pantalla). □

Aunque los ejemplos pueden parecer caprichosos, este fenómeno ocurre cuando se estudian señales complejas que combinan eventos con diferentes escalas de tiempo. Tal es el caso de señales de audio que modulan en amplitud una portadora de alta frecuencia, o cuando se desea observar el tiempo de respuesta de fuentes conmutadas ante variaciones en la carga o en la línea de alimentación. Como estas variaciones son de frecuencia muy



(a) (b)

Fig. 5.91. Una onda cuadrada de 20 Hz y 9 V de pico sumada a una sinusoidal de 100 Hz y 1 V de pico. (a): Escala de tiempos: 20 ms/div. En cada ciclo de la onda cuadrada hay 5 períodos de la onda senoidal. (b): La misma señal con una escala de tiempo de 2 ms/div. Un ciclo de la señal senoidal ocupa 5 divisiones.



(a) (b)

Fig. 5.92. Una onda cuadrada de 20 Hz y 9 V de pico sumada a una sinusoidal de 5100 Hz y 1 V de pico. (a): Escala de tiempos: 20 ms/div. En cada ciclo de la onda cuadrada hay 5 períodos de la onda senoidal. (b): La misma señal con una escala de tiempo de 2 ms/div. En una división hay 10.2 períodos de la señal senoidal.

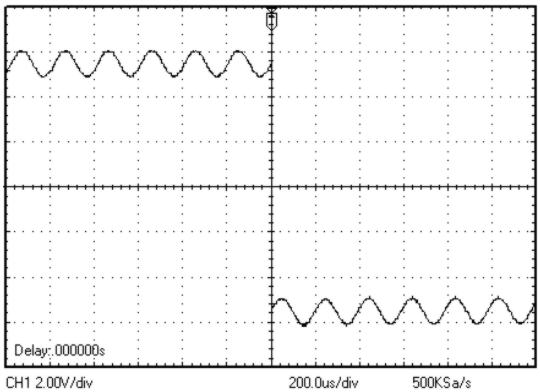


Fig. 5.93. Detalle de la señal de la Fig. 5.92 con una base de tiempos de 200 μs/div.

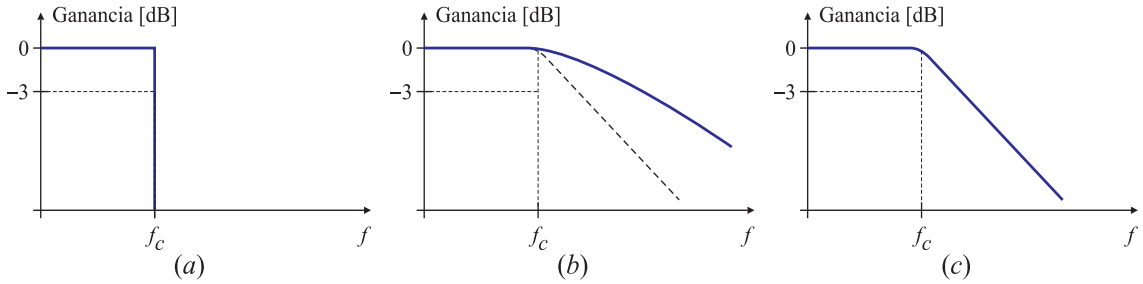


Fig. 5.94. Respuesta en frecuencia del canal vertical del osciloscopio: respuesta tipo ideal (a), Gaussiana (b) y Butterworth (c).

inferior a la frecuencia de conmutación de la fuente, en el estudio del transitorio pueden aparecer réplicas de la ondulación ("ripple") que dificultan la medición.

La clave para evitar posibles confusiones es observar la frecuencia efectiva de muestreo, indicada en este caso en el extremo inferior derecho de las pantallas. En el caso de la Fig. 5.91(a) y de la Fig. 5.92(a), la frecuencia de muestreo es $F_s = 5$ ks/s, lo que justifica que la señal senoidal de 5100 Hz de frecuencia tenga réplicas en 100 Hz, produciendo sobre la pantalla del osciloscopio el mismo efecto que una onda senoidal de 100 Hz de frecuencia. En caso de duda, lo más prudente es verificar la forma de onda con distintos ajustes de la base de tiempo, o utilizar un osciloscopio analógico.

En síntesis, como demuestran los ejemplos anteriores, la baja capacidad de memoria reduce el ancho de banda efectivo del osciloscopio. Aunque en la actualidad la capacidad de almacenamiento es mayor, este defecto sigue estando presente en los instrumentos sencillos y de bajo costo.

El ancho de banda del amplificador vertical

En general, el ancho de banda del amplificador vertical del osciloscopio no coincide con la frecuencia de Nyquist (la mitad de la frecuencia de muestreo), que indica la frecuencia máxima de las componentes frecuenciales de una señal para evitar el fenómeno de aliasing. Como se comentó más arriba, la frecuencia de muestreo depende del ajuste de la base de tiempos del osciloscopio, mientras que el ancho de banda del canal vertical está fijo por construcción (aunque en algunos instrumentos puede limitarse para disminuir la captación de ruido). Idealmente, el control de la base de tiempos *podría* ajustar el ancho de banda de un filtro antialiasing ideal, por ejemplo del tipo que se muestra en la Fig. 5.94(a), ubicado antes del amplificador vertical. Sin embargo, tal característica es imposible de construir en la práctica, y la mayoría de los osciloscopios con ancho de banda menores a 1 GHz tienen lo que se conoce como una respuesta en frecuencia gaussiana, representada en la Fig. 5.94(b), que decae más lentamente que una respuesta tipo Butterworth 5.94(c). El ancho de banda de un osciloscopio (60 MHz, 100 MHz, 1 GHz, etc.) es habitualmente el ancho de banda de ,3 dB del canal vertical, aunque algunos fabricantes (por ejemplo, LeCroy) lo especifican como la frecuencia de Nyquist (la mitad de la máxima frecuencia de muestreo).

Es importante conocer de qué manera se especifica el ancho de banda, porque permite evitar mediciones erróneas. La Fig. 5.95 muestra el ejemplo de un osciloscopio de "500

MHz" que muestrea exactamente a 1 GHz, mientras adquiere tres o cuatro canales. Aunque la frecuencia fundamental de la señal es menor a 500 MHz, tiene componentes frecuenciales que se extienden por encima de esta frecuencia. Cuando se observa en el osciloscopio los flancos de la señal parecen variar en el tiempo, con diferentes sobrepicos y velocidades de trepada. Esto es una evidencia del aliasing: una relación entre máxima frecuencia de muestreo y ancho de banda igual a 2, como se muestra en la Fig. 5.96(a) no es suficiente para hacer mediciones confiables de señales digitales.

Para minimizar el muestreo de componentes frecuenciales por encima de la frecuencia de Nyquist, otros fabricantes (Agilent, Tektronix) especifican el ancho de banda de sus osciloscopios como el punto de 3 dB de la respuesta en frecuencia gaussiana del canal vertical, que es 1/4 o 1/5 de la frecuencia de muestreo máxima, como se muestra en la Fig. 5.96(b). Aunque la frecuencia de muestreo podría aumentarse aún más, una relación entre la frecuencia de muestreo y el ancho de banda de 4 a 1 es suficiente para medir señales digitales con precisión.

La Fig. 5.97 muestra cómo se visualiza en la pantalla de un osciloscopio de 500 MHz de ancho de banda una señal cuadrada con tiempos de trepada en el orden del nanosegundo. Un ancho de banda de 500 MHz es el mínimo recomendado para capturar una señal de estas características. Este osciloscopio es capaz de muestrear la señal de entrada a 4 Gs/s cuando se opera en modo de 2 canales, o a 2Gs/s cuando se opera en modo de 4 canales. La Fig. 5.97(a) muestra la operación a 2 Gs/s, que es el doble de la frecuencia de Nyquist, y 4 veces el ancho de banda del canal vertical. Esta figura indica que una relación frecuencia muestreo-ancho de banda de 4 a 1 produce una representación estable y precisa de la señal de entrada. La diferencia en precisión y estabilidad es significativa con el osciloscopio mostrado en la Fig. 5.95).

Si la frecuencia de muestreo se lleva al doble (4 Gs/s), de modo que la relación entre la frecuencia de muestreo y el ancho de banda del canal vertical es de 8 a 1, se aprecian algunas mejoras, aunque mínimas, como se observa en la Fig. 5.97(b) . Se aprecia que el sobrepico es ligeramente menor, pero el tiempo de trepada que se mide es el mismo en ambos casos.

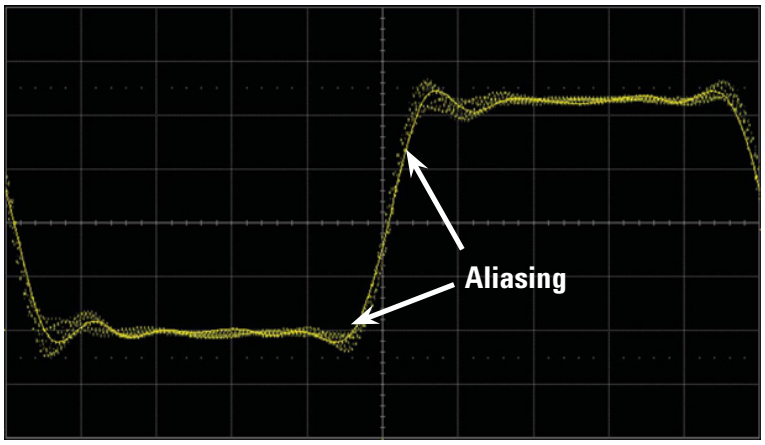


Fig. 5.95. Osciloscopio de "500 MHz" de ancho de banda muestreando a 1 Gs/s: el *aliasing* es evidente. (El ancho de banda de 500 MHz es la mitad de la frecuencia de muestreo, y no necesarimente el ancho de banda "analógico" del canal vertical.)

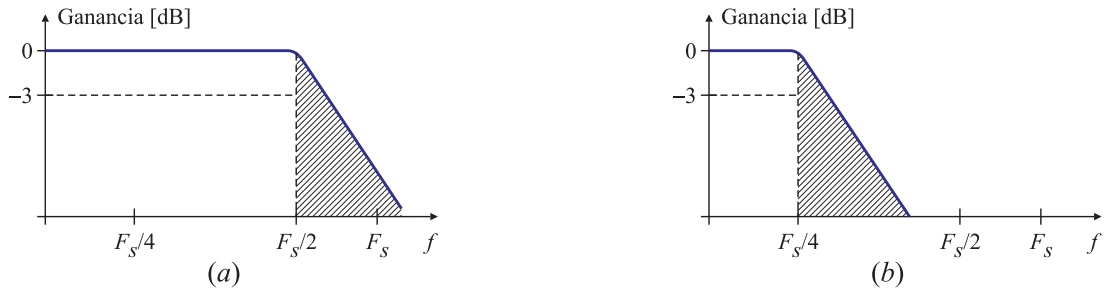


Fig. 5.96. Relación entre la frecuencia de muestreo y el ancho de banda de un osciloscopio digital: 2 a 1 (a) y 4 a 1 (b).

En los osciloscopios con anchos de banda del orden de 2 GHz o superiores la respuesta en frecuencia del canal vertical tiene un corte más abrupto, y se parece más a la respuesta en frecuencia de un filtro ideal que a la respuesta gaussiana. De esta forma, aumenta la atenuación de las componentes frecuenciales que exceden la frecuencia de Nyquist, lo que permite bajar la relación entre la frecuencia de muestreo y el ancho de banda, que es del orden de 2.5 a 1 o 3 a 1.

Bajos tiempos de actualización de pantalla

El tiempo de actualización de los osciloscopios digitales caracteriza su habilidad para efectuar mediciones repetitivas con mínimo tiempo muerto entre muestras. Una gran cantidad de memoria de almacenamiento es útil, pero impone nuevos desafíos, en particular al sistema de pantalla.

En los primeros osciloscopios digitales el tiempo de actualización era bajo, lo que dejaba lapsos de tiempo sin mediciones entre medio de cada bloque de muestras. Este bajo ciclo de trabajo, junto con la baja persistencia de las pantallas reducía la utilidad del osciloscopio para detectar anomalías intermitentes o esporádicas. Los usuarios debían confiar en las habilidades de disparo para poder registrar esos transitorios elusivos, como los "glitches" (señales anómalas de muy corta duración). El empleo de procesadores

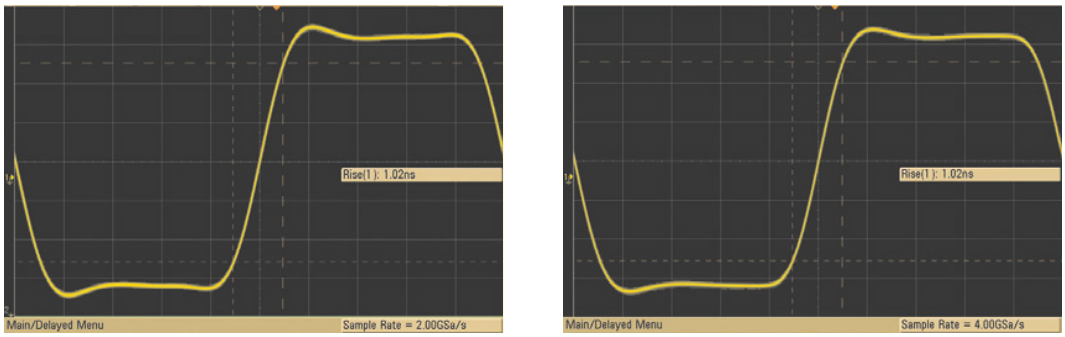


Fig. 5.97. Onda cuadrada con tiempo de trepada de 1 ns medida con un osciloscopio de 500 MHz de ancho de banda muestreando a 2 Gs/s (a) y a 4 Gs/s (b). La medición es correcta en ambos casos, con mínima mejora cuando se muestrea a 4 Gs/s.

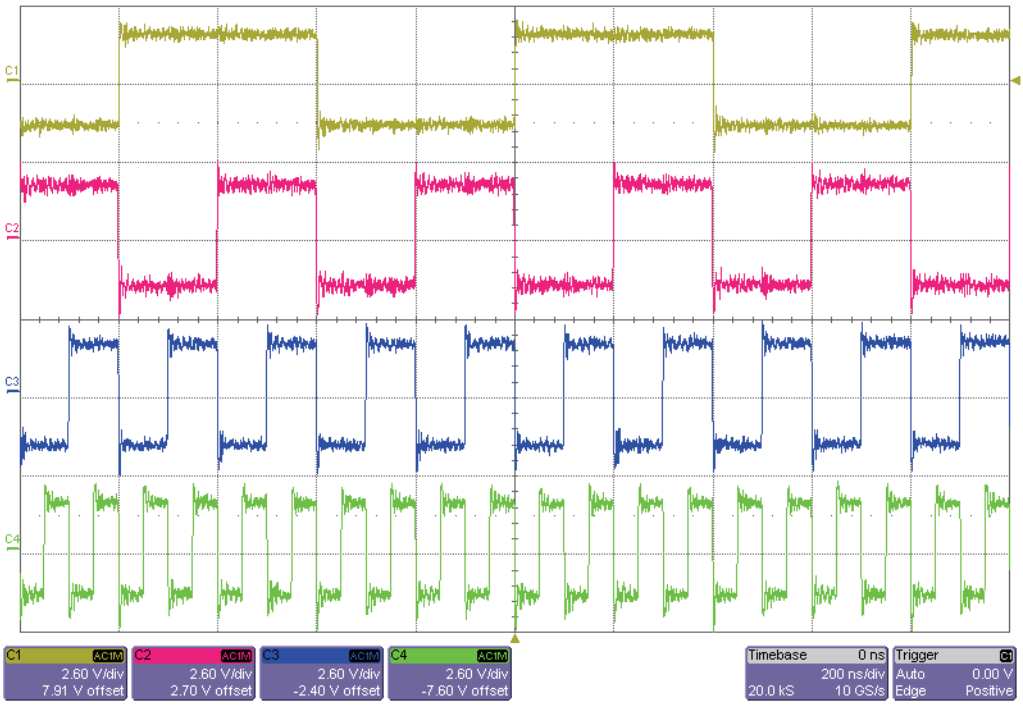


Fig. 5.98. La visualización de varias señales con escalas reducidas disminuye el número de bits con que se digitaliza la señal.

y unidades de visualización más veloces han permitido aumentar la tasa de refresco (un valor típico en la actualidad es de 50000 formas de onda por segundo). El ciclo de trabajo sigue siendo pequeño si la base de tiempos se ajusta para barridos muy veloces, pero es lo suficientemente alto para la mayoría de las aplicaciones.

Errores de cuantización

Los canales verticales de la mayoría de los osciloscopios digitales tienen un amplificador o atenuador antes del conversor analógico a digital, que usualmente es de 8 bits. Estos 256 niveles de cuantización están distribuidos de manera uniforme sobre la parte visible de la escala vertical de la pantalla. Por lo tanto, el paso de cuantización no es fijo, sino que depende del ajuste (V/div) del amplificador del canal vertical.

La amplitud de la señal debe ajustarse de modo que cubra el rango completo del conversor A/D. Habitualmente, esto significa que los controles de atenuación deben seleccionarse de modo que la señal ocupe la totalidad del rango vertical de la pantalla. Si la amplitud de la señal es menor, el error de cuantización crece. Por ejemplo, si la señal ocupa sólo media pantalla, la adquisición sólo se realiza con 7 bits de precisión. Esto introduce errores en las mediciones automá ticas que suelen estar disponibles en estos instrumentos. Este error se incrementa cuando se muestran en la pantalla dos o tres señales simultáneamente, como se muestra en la Fig. 5.98. en este caso, la resolución vertical es de sólo 6 bits, pero es posible visualizar todas las trazas y sus relaciones temporales.

5.15.3. Comentarios finales

Las funciones ofrecidas por los osciloscopios digitales modernos permiten obtener rápidamente la información relevante contenida en las señales medidas. Sin embargo, para obtener resultados correctos es necesario que el operador conozca los principios básicos de funcionamiento del instrumento, y principalmente las diferencias con su par analógico. En particular, los efectos de la frecuencia de muestreo (el muestreo efectivo) y el tamaño de la memoria de datos, junto con los niveles de cuantización de las señales, deben tenerse en cuenta en el momento de analizar los resultados.

5.16. Reseña histórica

Según algunos autores, los orígenes de la teoría del muestreo pueden rastrearse hasta el trabajo de Cauchy, Borel, Lagrange, Laplace y Fourier, si no más atrás. Como muchos otros teoremas fundamentales, fue desarrollado gradualmente por varios científicos, y no es sencillo determinar la fecha exacta de su aparición. Shannon, en su célebre trabajo de 1949, comenta acerca de esta imprecisión que:

> "this is a fact of common knowledge in the communication art [...] but in spite of its importance [it] seems not to have appeared explicitly in the literature of communication theory."

Para Kluvánek (1965), "el origen de este teorema difícilmente puede rastrearse", pero Higgins (1985) mostró que esta afirmación era un poco pesimista. En un artículo de 1999, H. D. Lüke observa que matemáticos, teóricos e ingenieros de comunicaciones apreciaron los efectos del muestreo independientemente unos de otros, y los vínculos entre los distintos desarrollos no se hicieron evidentes sino más adelante en el tiempo. Los principales hitos en la historia del teorema del muestreo se resumen en la Tabla 5.6.

Higgins (1985) resalta que el teorema del muestreo debe en realidad considerarse en dos partes:

- la primera donde se *demuestra* que es posible recuperar exactamente una señal de ancho de banda limitada a partir de sus muestras;
- la segunda, que *describe cómo* reconstruir la función utilizando estas muestras (problema de interpolación).

Ambos aspectos del teorema del muestreo fueron enunciados en una manera ligeramente distinta por J. M. Whittaker (1925), y antes que él por el matemático japonés K. Ogura (1920); probablemente ninguno de los dos había advertido que la primera parte del teorema había sido establecida en 1897 por Borel, quien para 1920 utilizó la fórmula de interpolación (que más adelante se conocería como serie cardinal) pero no parece haberse percatado del vínculo entre ambas partes del teorema. De hecho, todo parece indicar que Ogura fue el primero en enunciar el teorema del muestreo e indicar una demostración en 1920; sin embargo, al parecer erróneamente, atribuyó este resultado a un trabajo publicado en 1915 por E. T Whittaker (el padre de J. M), que trataba sobre la interpolación de funciones, y donde se investigaban las propiedades de la *función cardinal* y se mostraba que era de banda limitada.

Tabla 5.6: Hitos en el desarrollo de la serie cardinal.

1841	Cauchy "descubre" la primera versión conocida del teorema del muestreo.
1897	Borel reconoce la posibilidad de recuperar una señal de banda limitada a partir de sus muestras.
1915	E. T. Whittaker publica un artículo muy citado sobre la serie cardinal.
1920	K. Ogura enuncia por primera vez el teorema del muestreo, y cita como fuente el artículo de Whittaker de 1915.
1928	H. Nyquist establece una cota sobre la velocidad de transmisión de una señal telegráfica.
1928	K .Küpfmüller establece cotas sobre la velocidad de variación de señales para mantener la estabilidad de un proceso de control a lazo cerrado.
1929	A. M. Whitakker acuña el término *serie cardinal*.
1933	A. Kotelnikov (Rusia) publica su teorema del muestreo.
1939	H. Raabe (alemania) enuncia una versión del teorema en su tesis doctoral.
1941	W. R. Bennet publica un trabajo sobre telefonía múltiplex donde cita el artículo de Raabe.
1948	C. E. Shannon publica un artículo que "inventa" la teoría de información, donde incluye el teorema del muestreo, y cita como fuente el trabajo de Bennett.
1949	I. Someya y J. D. Weston producen independientemente versiones del teorema en Japón e Inglaterra, respectivamente.
1959	H. P. Kramer generaliza el teorema del muestreo para funciones limitadas en banda de forma en forma menos convencional.
1962	D. P. Peterson y D. Middleton extienden el teorema de muestreo a mayor cantidad de dimensiones
1968	A. Papoulis publica una generalización del teorema del muestreo, y muestra que un número de generalizaciones previas son casos particulares.

La primera formulación clara y distintiva del teorema del muestreo se debe a Shannon en dos trabajos publicados en 1948 y 1949; sin embargo Nyquist (1928) discutió temas similares, vinculados a la velocidad de trasmisión de señales telegráficas, unos veinte años antes. Debido a que la cota encontrada por Nyquist coincide numéricamente con la mínima frecuencia de muestreo para una señal de ancho de banda limitada, con el paso del tiempo las contribuciones de Nyquist y Shannon frecuentemente se han confundido. Sin embargo, Nyquist nunca consideró explícitamente el muestreo de una señal en el dominio temporal.

Hay pocas dudas que el artículo de Kotelnikov publicado en Rusia en 1933 (unos quince años antes que Shannon) fue el primero en tratar el problema de muestrear una señal continua de ancho de banda limitado en un contexto ingenieril, aún cuando las bases teóricas del muestreo ya habían sido consideradas por un puñado de matemáticos. Por motivos políticos, este trabajo no fue conocido fuera de la Unión Soviética, mientras que el artículo de Shannon se difundió rápidamente por todo el mundo. De manera más verbal y menos explícita, el teorema también había sido descrito en la literatura germana

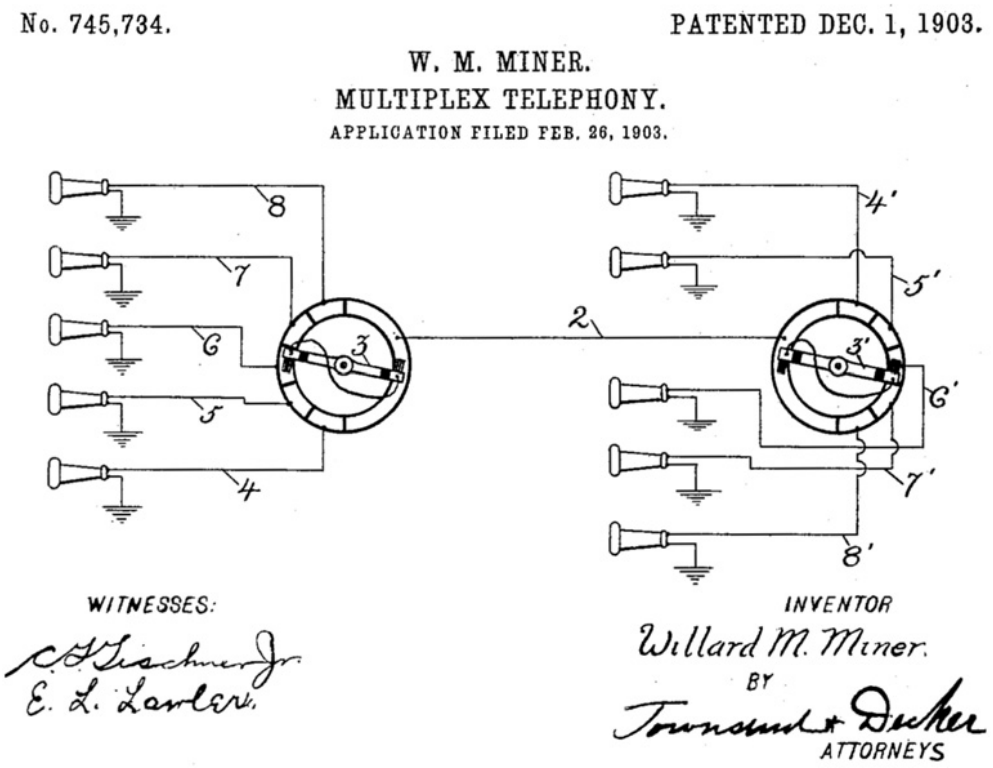


Fig. 5.99. Detalle de la patente de W. M. Miller (1903) de un circuito "multiplex" cuya finalidad es "permitir que un cierto número de comunicaciones telefónicas tengan lugar sobre una línea o circuito sin interferirse unas a otras": una de las primeras aplicaciones prácticas del muestreo, aún antes que se hubiese desarrollado la teoría.

en la tesis de doctorado de Raabe (1939). Otros autores han destacado que I. Someya (1949) en Japón y J. D. Weston en Inglaterra introdujeron el teorema casi simultáneamente con Shannon. Posteriormente se han publicado varias extensiones y generalizaciones del teorema del muestreo, actividad que se continúa hasta el presente.

5.16.1. Las experiencias

Los intentos de transmitir más de una señal simultáneamente sobre una línea única comenzaron apenas después que la *telegrafía* obtuvo sus primeros éxitos comerciales alrededor de 1840. Las primeras experiencias se basaron en la multiplexación por división de tiempo (TDM), y las primeras propuestas, utilizando conmutadores rotativos sincronizados se deben a F. C. Blackwell (1848), A. V. Newton (1851), y M. B. Farmer (1853). B. Meyer (1870), J. M. E. Baudot (1874), perfeccionaron esto métodos, y también P. Lacour y P. B. Delany (1878). Es significativo no sólo que estas técnicas ubicaran las señales de diferentes transmisores en orden cronológico (como en el sistema de Baudot) sino también que ciertos sistemas estuviesen equipados con conmutadores suficientemente rápidos de modo de transmitir dos muestras de cada señal elemental (el sistema de Delany), haciendo innecesaria la sincronización adicional entre el transmisor y el muestreador. Uno de estos conmutadores, el "distribuidor" del sistema de telegrafía de F. J. Patten (de alrededor de 1891) fue utilizado para la primera demostración de TDM de

señales *telefónicas* por William M. Miner, quien patentó su invención en 1903 después de muchos años de experimentación. La Fig. 5.99 muestra el esquema circuital, incluyendo el "distribuidor de Patten" (los números 3 y 3′ en la figura). Miner determinó la "frecuencia de muestreo" (la velocidad de giro del rotor) de manera experimental:

> "Se entenderá entonces que el aparato diseñado por Mr. Miner, aunque en forma general es el mismo que se utiliza para telegrafía multiplex, debe operarse a mayor velocidad de manera que la frecuencia de activación de los contactos sobre las diferentes ramas o sub-circuitos sea próxima en mayor o menor medida a la frecuencia de las vibraciones que caracterizan la voz. Una tasa de conmutación de 1000 o 2000 por segundo no servirá a estos fines, pero a medida que la frecuencia de conmutación se incrementa por encima de los 3000, los mejores resultados se hacen evidentes, y son mucho mejores cuando se alcanza una tasa de 3500 o 3600 por segundo; los resultados óptimos se obtienen para frecuencias de conmutación de cerca de 4300 por segundo."

Miner asumió que la frecuencia de muestreo debía coincidir aproximadamente con la mayores componentes frecuenciales de la voz. En realidad, el aparato telefónico que él usaba tenía una frecuencia de corte de poco más de 2 kHz, lo que alcanza para cumplir los requerimientos del teorema del muestreo.

Como todavía no había una explicación teórica del proceso de muestreo, las afirmaciones acerca de la frecuencia de conmutación apropiada para sistemas de TDM en telefonía fueron particularmente vagas hasta alrededor de 1930. Por ejemplo. L. von Kramolin en 1923 escribe en su patente sobre TDM:

> "...por lo tanto es posible trabajar con una frecuencia de conmutación que está más allá de los límites de audibilidad, en donde se evita el ruido de conmutación de los diferentes teléfonos y haciendo posible una comunicación exenta de ruidos".

Para 1930 se habían desarrollado varios sistemas TDM para telefonía; sin embargo (Cattermole, 1969)

> "la situación hacia 1936 era que el muestro y la telefonía TDM eran conocidos empíricamente, aunque la teoría era rudimentaria".

Algunos autores, como M. Marro en 1938, justificaban velocidades de muestreo demasiado bajas para transmisión de voz, utilizando para el muestreo un tren de pulsos con un ciclo de trabajo grande (y no un tren de impulsos) para un sistema TDM dúplex. Lo que ocurre es que por efectos psicoacústicos, al aumentar el ciclo de trabajo de la señal de muestreo es posible reducir la velocidad de muestreo y conseguir el mismo nivel de inteligibilidad. Esta dependencia fue examinada cuantitativamente por G. A. Miller y J. C. Licklider en 1959. Sus resultados, ilustrados en la Fig. 5.100, muestran que para señales de muestreo con ciclos de trabajo pequeños (menores al 6 %) la inteligibilidad del mensaje vocal se reduce monótonamente a medida que aumenta el ciclo de trabajo (curva sobre la derecha de la Fig. 5.100). Para pulsos de muestreo con mayor ciclo de trabajo la inteligibilidad se incrementa nuevamente para frecuencias de muestreo comprendidas entre 10 Hz y 100 Hz. En estos rangos la duración temporal del ciclo de trabajo es comparable a la duración de los fonemas, y el cerebro es capaz de distinguir la palabra articulada aunque desde un punto de vista técnico estuviese "mal muestreada".

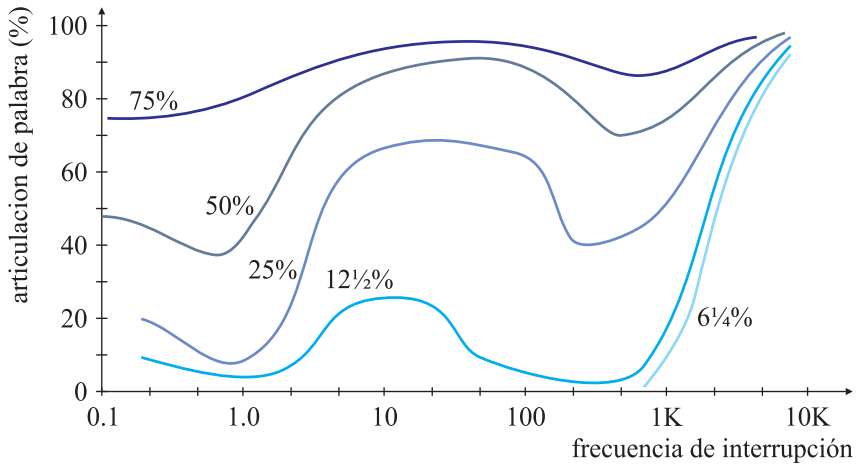


Fig. 5.100. Articulación de la palabra en función de la frecuencia de muestreo, con el ciclo de trabajo como parámetro (el muestreo ideal corresponde a un ciclo de trabajo nulo).

5.16.2. La teoría

Los ingenieros en comunicaciones comenzaron a trabajar en el problema de muestreo mucho tiempo después. H. Nyquist probó en 1928 que el número de señales telegráficas que puede transmitirse por una línea es proporcional al producto del tiempo de transmisión por el ancho de banda. El interés estaba centrado en calcular la máxima velocidad de transmisión de símbolos en un canal de ancho de banda limitado, y estaba pensado especialmente para señales telegráficas. En 1928 R. V. L. Hartley generalizó este resultado para transmisión multinivel, y en ese mismo año Nyquist derivó su famoso teorema sobre la transmisión sin distorsión de señales telegráficas (digitales o de dos niveles). Pero la transmisión sin distorsión de Nyquist y la interpolación libre de errores de muestras de una señal analógica son problemas diferentes, aún cuando haya algunas similitudes matemáticas. También en 1928 K. Küpfmüller obtuvo cotas sobre la velocidad de variación de señales que aseguraban la estabilidad de un sistema de control de lazo cerrado para controles automáticos de ganancia; pero tampoco trataba con señales muestreadas. En consecuencia, estos trabajos no pueden considerarse como antecesores del teorema del muestreo.

El primer científico en formular el teorema del muestreo de manera precisa y de aplicarlo a problemas de comunicaciones fue probablemente el ruso V. A. Kotelnikov. En su trabajo "On the transmission capacity of the 'ether' and wire in electrical communications", publicado en 1933, probó el teorema del muestreo para señales tipo pasabajo y pasabanda. En el mismo artículo aplicó el teorema para mostrar que el ancho de banda de una señal no puede reducirse por modulación.

El trabajo de los soviéticos entre 1939 y 1940 permaneció desconocido en Occidente, y sólo después de la Segunda Guerra Mundial y en el contexto de la guerra fría se efectuaron traducciones de investigaciones rusas de dominio público en ciencias e ingeniería. Antes e inmediatamente después de la revolución rusa, los científicos publicaban sus trabajos en revistas rusas, pero especialmente en publicaciones francesas y alemanas, y muy raramente en medios ingleses. A fines de 1930 el estado soviético desaconsejó esta práctica, y se favorecieron las publicaciones de carácter local. Este hecho, junto con la tendencia

a efectuar reclamos espurios sobre la prioridad rusa en ciencia y tecnología durante la época de Stalin, hicieron que las recopilaciones en idioma inglés del siglo XX no siempre reconocieran la importancia de las contribuciones soviéticas.

La formulación de Kotelnikov del teorema del muestreo es la siguiente:

> "**Teorema I**: Cualquier función $F(t)$ que abarque frecuencias desde 0 hasta f_1 períodos por segundo se puede representar por la serie
>
> $$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \frac{\operatorname{sen} \omega_1 (t - \frac{k}{2f_1})}{(t - \frac{k}{2f_1})} \tag{5.158}$$
>
> donde k es un entero, $\omega_1 = 2\pi f_1$, y las D_k son constantes que dependen de $F(t)$.
>
> Análogamente, cualquier función $F(t)$ representada por la serie de la ecuación (5.158) sólo contiene componentes frecuencias de 0 hasta f_1 períodos por segundo."

> "**Teorema II**: Cualquier función $F(t)$ que esté formada por componentes frecuenciales contenidas en el rango de 0 a f_1 se puede trasmitir de manera continua con cualquier grado de precisión deseado usando números espaciados $1/(2f_1)$ segundos entre sí. De la medición del valor de $F(t)$ en $t = n/(2f_1)$, donde n es un entero, se encuentra que
>
> $$F\left(\frac{n}{2f_1}\right) = D_n \omega_1$$
>
> porque todos los términos de la serie (5.158) para este valor de t tienden a cero, con la excepción del término con $k = n$ que vale $D_n \omega_1$, lo que puede establecerse fácilmente al calcular el valor del punto indefinido [aplicando l'Hopital] (...) Si se trasmiten estos D_k separados cada $1/(2f_1)$ segundos, es posible reconstruir $F(t)$ de acuerdo con la expresión (5.158) con cualquier grado de precisión deseado."

Como este trabajo no fue publicado en revistas científicas de fácil acceso, todos los trabajos teóricos sobre muestreo de señales fueron surgiendo de manera independiente. Por ejemplo, Raabe dedujo el teorema del muestreo en su tesis doctoral de 1939. Esta publicación es especialmente relevante para las aplicaciones prácticas, ya que tiene en cuenta el efecto de utilizar pulsos de muestreo con ciclo de trabajo finito (y no impulsos). Raabe sintetiza sus hallazgos:

> "Para las condiciones de transmisión demostradas, la frecuencia de muestreo se determina por el rango de frecuencias que abarca la señal de interés. Si este se mantiene por debajo de la mitad de la frecuencia de muestreo, todas las componentes frecuenciales del ruido permanecen afuera de este límite y puede evitarse que alcancen el receptor usando un filtro pasabajos. La transmisión de la señal estará entonces completamente libre de distorsión, si la frecuencia de muestreo es el doble de la máxima frecuencia de la señal. El límite superior de las frecuencias presentes en una señal es una condición vital para la transmisión sin distorsión de señales en sistemas multiplex con división de tiempo".

Este trabajo contiene una versión especial del teorema del muestreo para señales pasabanda. El artículo de Raabe está citado por W. R. Bennett en un trabajo sobre telefonía multiplex de 1941, y esta publicación a su vez, es citada por Shannon en 1949 como una de las fuentes del teorema del muestreo.

El teorema se deriva también en el texto japonés *Hakei Denso* ("Transmisión de señales") de I. Someya. En Inglaterra, J. D. Weston (1949) publicó resultados similares en la misma época. Todos estos desarrollos parecen haberse obtenido de manera independiente, y con total desconocimiento de las otras versiones.

5.16.3. Los matemáticos

Para los matemáticos el teorema del muestreo es un teorema particular en el campo de la teoría de aproximación, que se ocupa de temas tales como qué funciones pueden representarse por una suma lineal de funciones base (como funciones algebraicas o polinomios trigonométricos) y con qué error de aproximación. Una de los enfoques es determinar estas sumas lineales de modo que en puntos definidos tomen los mismos valores que la función que se desea aproximar. El teorema del muestreo permite resolver este problema de aproximación, con error arbitrariamente pequeño, especialmente para funciones acotadas en el dominio frecuencia.

Una primera aproximación fue descrita en 1765 por J. L. Lagrange, quien encuentra una manera de hacer que una suma de funciones sinusoidales armónicas coincidas con la función que debe aproximarse en n puntos equidistantes. Generalizando este enfoque, se puede establecer que el conocimiento de $2n + 1$ valores de la función a aproximar, equidistantes en un período, son suficientes para representar una función periódica descripta por una serie trigonométrica, con n términos sinusoidales, n términos cosinusoidales, y una constante. Esa descomposición de Fourier puede pensarse como un teorema del muestreo para funciones periódicas de banda limitada.

H. S. Black, en su libro *Modulation Theory* de 1953, explica que Cauchy reconoció la mecánica del muestreo de señales de ancho de banda limitada ya en 1841, y ofrece la siguiente traducción del texto original en francés:

> "Si una señal es una función que depende del tiempo, y el tiempo se divide en intervalos iguales tal que cada subdivisión comprende un intervalo de T segundos de longitud, donde T es menor que la mitad del período de la mayor componente frecuencial significativa la señal, y si una muestra instantánea se toma en cada intervalo de cualquier manera, entonces el conocimiento de la magnitud instantánea de cada muestra junto con el conocimiento del instante dentro de cada subintervalo en el cual la muestra fue tomada contiene toda la información de la señal original"

Sin embargo, Higgins (1985) nota que esta cita no figura en el artículo de Cauchy mencionado por Black, y en cambio, acredita a Borel el reconocimiento inicial sobre la serie cardinal en un trabajo de 1897, citando el siguiente pasaje traducido del original en francés:

> "Considere
>
> $$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x) e^{jzx} dx$$

> y suponga que la función $\Psi(z)$ satisface las condiciones de Dirichlet. Si se conocen los valores de la función $f(z)$ en los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces la función $\Psi(x)$ queda completamente determinada y por lo tanto la función entera $f(z)$ se conoce sin ambigüedad."

Esta conexión de la serie de Fourier con el teorema de muestreo fue la base de la explicación utilizada por Shannon en su artículo clásico de 1949.

La primera propuesta para la interpolación de funciones a partir de un conjunto de valores equidistantes utilizando la función $\operatorname{sen} x/x$ fue publicada en 1908 por C. J. de la Vallée Poussin en el *Bulletin Academie Royale de Belgique*, aunque en este trabajo no se explora el caso especial de la interpolación de funciones de ancho de banda limitado.

Posiblemente el primer trabajo donde se aborda el problema de interpolación para funciones de ancho de banda limitado es el artículo de E. T. Whittaker de 1915, "Sobre las funciones que son representables por las expansiones de la teoría de interpolación". Trata sobre el problema de conseguir la interpolación más suave posible, sin singularidades y sin "oscilaciones rápidas" para un conjunto dado de valores tabuladas de una función $f(x)$. En este trabajo, se define que dos funciones son *cotabulares* si ambas comparten las mismas muestras uniformemente espaciadas. Whittaker demostró que bajo ciertas condiciones es posible interpolar una señal a partir de valores separados no más de w unidades siempre que la transformada de Fourier de esa función no contenga ningún término con período menor que $2w$. Esta interpolación hace uso de una función, denominada *función cardinal* por Whittaker, y tiene la forma

$$C(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{f(a+rw)\operatorname{sen}[\frac{\pi}{w}(x-a-rw)]}{\frac{\pi}{w}(x-a-rw)}, \tag{5.159}$$

donde a es un desplazamiento arbitrario, con las siguientes características:

> "La definimos originariamente como la única función del conjunto cotabular que no tiene singularidades en la parte finita del plano y no tiene constituyentes cuyo período sea menor que el doble del intervalo tabular w."

En el párrafo anterior, el "intervalo tabular" es el período de muestreo. Whittaker demostró también que la función cardinal es la única función interpoladora que posee estas características. Implícitamente postula que cada función cuya transformada de Fourier está limitada a un rango de frecuencias menor que $1/(2w)$ (esto es, de banda limitada) puede describirse por valores separados cada w unidades, y que puede ser interpolada de manera única utilizando la función cardinal. La expresión (5.159) fue denominada *serie cardinal* por J. M. Whittaker (el hijo de E. T.) en su artículo de 1925.

W. L. Ferrar destacó en 1925 que el muestreo e interpolación de la función cardinal resulta nuevamente en la misma función, independientemente de cómo se desplacen en tiempo los instantes de muestreo, y denominó a esta importante propiedad de invariación como "consistencia".

Los dos artículos revolucionarios de Shannon, publicados en 1948 y 1949, fundaron la teoría de la información. En el trabajo de 1948, el teorema del muestreo se enuncia como el Teorema 13:

> "Sea $f(t)$ [una función que] no contiene frecuencias por encima de W. En-

tonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \frac{\operatorname{sen} \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)},$$

donde

$$X_n = f(\tfrac{n}{2W})''$$

El teorema se conoció como "teorema de Shannon" inmediatamente después de la publicación de estos trabajos, al menos en Occidente.

Una de las formas más útiles de este teorema se debe a Linvill (1949), quien la desarrolló en su tesis doctoral en el MIT. Derivó expresiones para la transformada bilátera de Laplace, y para la transformada de Fourier de la salida de un muestreador en función de la transformada de Laplace y de Fourier de la señal de entrada al dispositivo. Mostró que el proceso de muestreo puede pensarse como una modulación de amplitud de un tren de impulsos. Además, explicó la interpolación como un filtrado en el dominio frecuencial con un filtro pasabajos ideal. Un notable artículo suyo publicado en 1951 discutía la aplicación de la teoría del muestreo a sistemas de control realimentados; este trabajo fue extendido por Regazzini y Zadeh en 1952.

Casi la totalidad de los libros de procesamiento de señales siguen en enfoque de Linvill al tratar el muestreo de señales. Aunque muchos desarrollos son previos a su trabajo, sus ideas arraigaron fuertemente en los campos de procesamiento digital de señales y control digital, y hoy en día parece el enfoque natural para estos temas.

5.16.4. Conclusión

El teorema del muestreo para funciones tipo pasabajos es vital en la ingeniería de comunicaciones, vinculando las señales continuas con las discretas. Los distintos nombres que el teorema ha recibido –Shannon, Nyquist, Kotelnikov, Whittaker, Someya, etc.– indica la independencia de los diferentes enfoques. Esta historia también pone de manifiesto un proceso muchas veces aparente en los problemas teóricos en física o tecnología: en primer lugar los experimentadores establecen un conjunto de reglas empíricas, luego los teóricos desarrollan la solución general, y finalmente alguien descubre que los matemáticos habían resuelto el problema matemático subyacente con anterioridad, pero en "magnífica soledad".

5.17. Referencias

W. R. Bennet, Time Division Multiplex systems, *Bell Sys. Tech. J.*, **20**, 1941, pp. 199-221.

W. R. Bennet, Spectra of quantized signals, *Bell Sys. Tech. J.*, **27**, 1948, pp. 446-472.

H. S. Black, *Modulation theory*, Van Nostrand, New York, 1953.

E. Borel, Sur l'interpolation, *Comptes Rendus des Sciences de l'Academie des Sciences*, **124**, 1897, pp. 676, 673.

P. L. Butzer, A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions, *J. Math. Res. Exposition*, **3**, 1983, pp. 185-212.

P. L. Butzer, R. L. Sterns, SamplingTheory fornot necessarily band-limited functions: a historical overviev, *SIAM Review*, **34**,1, 1992, pp. 40-53.

K. W. Cattermole, *Principles of Pulse code Modulation*, London, Iliffe Books, 1969.

I. S. Grashteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, NY, 1980.

J. R. Higgins, Five short stories about the cardinal series, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 1, pp. 45-89.

A. J. Jerri, The Shannon Sampling Theorem-Its various extensions and applications: A tutorial review, *Proceedings of the IEEE*, **65**, 11, September 1977, pp. 1565–1594.

D. A. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

Y. I. Khurgin, V. P. Yacovlev, Progress in the Soviet Union on the Theory and Applications of Bandlimited Functions, *Proceedings of the IEEE*, **65**, 7, 1977, pp. 1005-1029.

I. Kluvánek, Sampling theorem in abstract harmonic analysis, *Mat.-Fyz Časopis Sloven Akad. Vied.*, **15**, 1965, pp. 43-48.

D. E. Knuth, *The art of computer programming: Seminumerical algorithms*, 3ra. Ed., Addisson-Wesley, Reading, MA, 1997

V. A. Kotel'nikov, On the transmission capacity of the 'ether' and wire in electrical communications, *First All-UnionConference on questions of communications*, Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscu, 1933, pp. 1-19 (en ruso).

K. Küpfmüller, On the Dynamics Of Automatic Gain Controllers, *Elekr. Nach. tech.*, **5**, 11, 1928, pp. 459-467.

W. K. Linvill, Analysis and design of sampled data control systems, D. Sc. Thesis, MIT Project Whirlwind Report R-170, 1949.

W. K. Linvill, Sampled data control systems studied through comparison of sampling with amplitude modulation, *AIEE Transactions*, **70**, 1951, pp. 1779-1788.

H. D. Lüke, The origins of the sampling theorem, *IEEE Communications Magazine*, **37**, 4, 1999, pp. 106-108.

R. J. Marks, *Introduction to Shannon sampling and interpolation theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

E. Meijering, A Chronology of interpolation: form ancient astronomy to modern signal and image processing, *Proceedings of the IEEE*, **90**, 3, 2002, pp. 319-342.

G. A. Miller, J. C. R. Licklider, The integibility or interrupted speech, *JASA*, **22**, 1959, pp. 167-173.

W. M. Miner, *Multiplex Telephony*, U. S. Patent 745 734, aceptada el 26 de febrero de 1903 y publicada el 1 de diciembre de 1903.

W. M. Miner, Recent developments in multiplex-telephony, *Elec. World and Eng.*, **42**, 1903, p. 920.

H. Nyquist, Certain Topics in Telegraph Transmission Theory, *AIEE Transactions*, **47**, 1928, pp. 617-644. Reimpreso en *Proceedings of the IEEE*, **90**, 2, 2002, pp. 280-305.

K. Ogura, On certain transcendental integral function in the theory of interpolation, *Thoku Math. J.*, **17**, 1920, pp. 64-72.

K. Ogura, On some central difference formulas of interpolation, *Thoku Math. J.*, **17**, 1920, pp. 232-241.

S. J. Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

B. Porat, *A Course on Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1997, p. 465–466.

H. Raabe, Untersuchungen an der wechselzeitigen Mehrfachübertragung (Multiplexübertrangung), *Elekr. Nach. tech*, **16**, 8, 1939, pp. 213-228.

J. R. Ragazzini, L. A. Zadeh, The analysis of sampled-data systems, *AIEE Transactions*, **71**, (1952), pp. 225-234.

C. E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, reimpreso con correcciones del *The Bell System Technical Journal*, **27**, 1948, pp. 379-423, 623-656.

C. E. Shannon, Communication in the Presence of Noise, *Proceedings of the IRE*, **47**, 1, 1949, pp. 10-21.

D. Slepian, On Bandwidth, *Proceedings of the IEEE*, **64**, 1976, pp. 292-300.

I. Someya, *Hakei Denso* ("Transmisión de señales"). Tokyo, Japón, Shyukyoo, 1949.

R. S. Stankovic, J. T. Astola, M. G. Karpovsky, Some historical remarks on sampling theorem, *2006 International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP2006*, Florencia, Italia, 2-3 de Setiembre de 2006, pp. 163-170.

M. K. Tchoubanou, N. N. Udalov, Vladimir Kotelnikov and Moscow Power Engineering Institute - Sampling theorem, radar systems... a fascinating and extraordinary life, *2006 International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP2006*, Florencia, Italia, 2-3 de Setiembre de 2006, pp. 171-178.

J. D. Weston, A note on the theory of communication, *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, ser. 7, **40**, 303, 1949, pp. 449-453.

B. Widrow, Statistical analysis of amplitude-quantized sampled-data systems, *AIEE Trans. (Applications and Industry)*, **81**, 1961, pp. 555-568.

B. Widrow, A study of rough amplitude quantization by means of Nyquist sampling theory, *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-3**, 1956, pp. 266-276.

B. Widrow, I. Kollar, *Quantization noise: Roundoff error in digital computation, signal processing, control and communications*, Cambridge University Press, ,Cambridge, 2008.

E. T. Whittaker, On the functions which are represented by the extension of interpolating theory, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **35**, 1915, pp. 181-194.

J. M. Whittaker, The 'Fourier' theory of cardinal functions, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **1**, 1929, pp. 169-176.

5.18. Ejercicios

Ejercicio 1. Para la señal analógica $x_a(t) = 3\ \text{sen}(100\pi t)$,

1. Dibuje la señal $x_a(t)$ para $0 \leq t \leq 30$ ms.
2. Determine la frecuencia de la señal discreta $x\,[n]$ que resulta de muestrear $x_a(t)$ con una frecuencia de muestreo F_s =300 muestras/segundo, y muestre que es periódica. ¿Cuál es el período en muestras? ¿Cuál es el período de la señal discreta en milisegundos?
3. Calcule los valores de las muestras de un período de $x[n]$. Dibuje $x[n]$ en un mismo diagrama junto con $x_a(t)$.
4. ¿Puede encontrar una frecuencia de muestreo F_s tal que alguna de las muestras de la señal $x[n]$ alcance el valor pico de $x_a\,(t)$? ¿Cuál es la mínima F_s apropiada para este fin?

Ejercicio 2. Una señal analógica contiene frecuencias de hasta 10 kHz.

1. ¿Qué rango de frecuencias de muestreo permitirán una reconstrucción exacta de esta señal a partir de las muestras?
2. Si la señal se muestrea a $F_s = 8$ kHz, ¿cuál es la frecuencia ω_1 (discreta) asociada a las componentes de frecuencia (analógica) $f_1 = 5$ kHz?
3. Repita el inciso anterior para las componentes de frecuencia $f_2 = 9$ kHz.

Ejercicio 3. La señal analógica $x_a\,(t) = \text{sen}\,(2\pi f_0 t)\,,\ -\infty < t < \infty$ se muestrea cada $T = 1/F_s$ segundos, donde F_s es la frecuencia de muestreo. La señal muestreada es $x[n] = x_a\,(nT) = \text{sen}\,(2\pi f_0 T n) = \text{sen}\,[2\pi\,(f_0/F_s)\,n]\,, -\infty < n < \infty$.

1. Grafique la señal $x[n]$, $0 \leq n \leq 30$ para $F_s = 5$ kHz y $f_0 = 0{,}5$, 2, 3, y 4,5 kHz.
2. Dibuje (a mano alzada) el espectro en frecuencia de la señal analógica y el de la señal muestreada en cada uno de los casos.
3. Repita los incisos 1 y 2 para la señal analógica $x_a\,(t) = \cos\,(2\pi f_0 t)\,.$
4. Explique las similitudes y las diferencias entre las diferentes gráficas de las señales muestreadas de los incisos 1 y 3, ayudándose con los espectros de las señales correspondientes.

Ejercicio 4. Una señal analógica $x_a(t) = \text{sen}(480\pi t) + 3\,\text{sen}(720\pi t)$ se muestrea a razón de 600 veces por segundo ($F_s = 600$ Hz).

1. ¿La frecuencia de muestreo cumple con el Teorema de Nyquist? Si la respuesta es negativa, determine la frecuencia de muestreo apropiada para la señal.
2. ¿A qué frecuencias aparecen las réplicas del espectro de la señal "mal muestreada"?

3. ¿Cuáles son las frecuencias ω_i de la señal discreta $x[n]$ que resulta del muestreo?

4. Si la señal $x[n]$ se convierte en una señal continua utilizando un conversor D/A ideal, escriba explícitamente la expresión de la señal reconstruida $y_a(t)$.

Ejercicio 5. La señal de tiempo continuo $x(t) = 10\,\mathrm{sen}(2\pi t) + 10\,\mathrm{sen}(8\pi t) + 5\,\mathrm{sen}(12\pi t)$ se muestrea a una frecuencia $f_s = 5$ Hz. Encuentre una señal $x_a(t)$ tal que sus muestras coincidan con las de $x(t)$ –es decir, $x(n/f_s) = x_a(n/f_s)$– pero cuyo contenido espectral sea nulo para $|f| > f_s/2$.

(I) **Ejercicio 6.** La señal $x(t) = e^{-0{,}02t^2}\,\mathrm{sinc}(t)$ se muestrea cada T segundos. Se encuentra que la transformada de Fourier $X\left(e^{j\omega}\right)$ de la señal muestreada $x[n] = x(t)|_{t=nT}$ verifica $X\left(e^{j\omega}\right) = 1$. ¿Cuál es el mínimo valor de T para el cual es posible tal resultado?. Si esto es imposible para cualquier T, explique porqué.

(I) **Ejercicio 7.** Se conoce que una señal $x(t)$ es de la forma $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$, con $\phi_0 = \pi/4$. Pedro muestrea la señal con $F_{s_1} = 150$ Hz, y encuentra que $f_0 = 50$ Hz. Pablo muestrea la misma señal, pero con $F_{s_2} = 240$ Hz, y encuentra que $f_0 = 20$ Hz.

1. ¿Es posible determinar el verdadero valor de la frecuencia f_0 en base a esta información? Si no es posible, ¿cuáles son todos los posibles valores de f_0?

2. Si se sabe que $f_0 < 1000$ Hz, ¿es posible determinar el verdadero valor de f_0?

Ejercicio 8. Un sistema lineal e invariante en el tiempo tiene la función transferencia $H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j(\alpha/2)\omega}$, $|\omega| < \pi$. Determine, justificando su respuesta, si el sistema es causal o no cuando (*a*) α es par, y (*b*) α es impar.

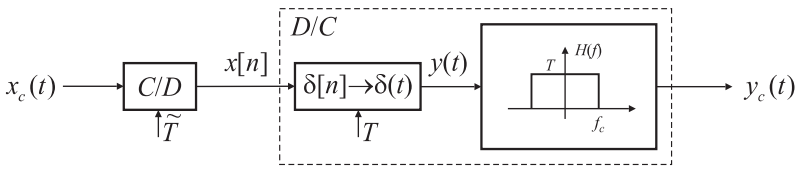
Ejercicio 9. En el sistema de procesamiento digital que se muestra en la figura, el período de muestreo del conversor C/D es de $\tilde{T} = 5$ ms y el del conversor D/C es $T = 1$ ms, respectivamente. La entrada es $x(t) = 3\cos(100\pi t) + 2\,\mathrm{sen}(250\pi t)$ (t en segundos).

1. Dibuje la forma del espectro de $x[n]$.

2. Dibuje la forma del espectro de $y(t)$.

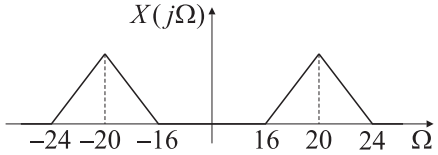
3. Determine la salida $y_c(t)$ si la frecuencia de corte del filtro es $f_c = 1/(2\tilde{T})$.

4. Repita el inciso anterior si la frecuencia de corte es $f_c = 1/(2T)$.



Ejercicio 10. Una cámara de cine sensa la imagen de una marca sobre una rueda que gira a Ω revoluciones por segundo. La cámara toma una imagen cada T segundos. Determine el máximo período $T_{máx}$ para el cual las imágenes representan el movimiento de la rueda. Discutir que sucede si (*i*) $T = T_{máx}$, (*ii*) $T > T_{máx}$, o (*iii*) $T < T_{máx}$.

Ejercicio 11. La figura muestra el espectro en frecuencia de una señal analógica. Se desea discretizar esta señal.

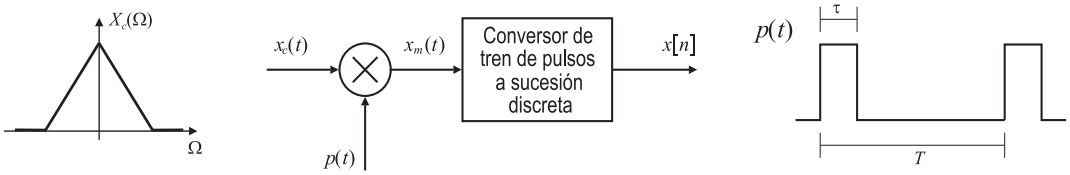


1. Determine la frecuencia de muestreo.
2. ¿Se requiere filtro antialiasing? ¿Por qué?
3. Dibuje el módulo del espectro en frecuencia de la señal muestreada.
4. Dibuje la respuesta en frecuencia $G(\Omega)$ (módulo y fase) de un mantenedor de orden cero que trabaja a la frecuencia de muestreo determinada en el inciso 1.
5. Si el mantenedor del inciso anterior se utiliza como filtro de reconstrucción, grafique el módulo del espectro de la señal resultante. En base a estos resultados, ¿considera que el mantenedor de orden cero es un buen filtro reconstructor? Proponga una solución si la respuesta es negativa.
6. **(interesante)** El espectro de la figura puede pensarse como el resultado de modular una señal $y(t)$ con una señal $m(t) = \cos(2\pi 20\, t)$, ¿Cuál es el espectro de $y(t)$? ¿Puede determinar una frecuencia de muestreo que permita recuperar $y(t)$ a partir de $x(t)$?

(I) **Ejercicio 12.** Una señal continua $x_c(t)$ se muestrea con un tren de *pulsos* $p(t)$ de ancho τ, período T, y amplitud $1/\tau$ de modo que el área bajo el pulso es unitaria. Específicamente, $x_m(t) = x_c(t) \times p(t)$, y

$$x[n] = \frac{1}{T}\int_{nT}^{nT+\tau} x_c(t)\, p(t)\, dt \cong \frac{1}{T}\left[\frac{x_c(nT) + x_c(nT+\tau)}{\tau}\right].$$

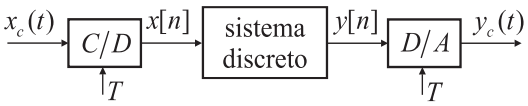
1. Dibuje el espectro de $x_c(t)$, $x_m(t)$, $x[n]$.
2. ¿Es posible recuperar *exactamente* $x_c(t)$ a partir de $x[n]$? Si la respuesta es afirmativa, indique de qué manera. En caso contrario, justifique por qué no.



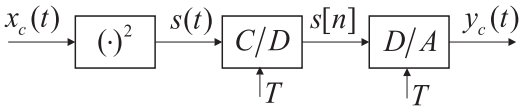
Ejercicio 13. Para un valor apropiado de T, el sistema de la figura

1. ¿es lineal?
2. ¿es invariante en el tiempo?

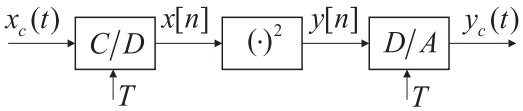
Para cada inciso, esboce una demostración si la respuesta es afirmativa o de un contraejemplo en caso contrario.



Ejercicio 14. El sistema continuo de la figura es un "elevador al cuadrado", $s(t) = x_c^2(t)$ y $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi\,1000$. ¿Cuál es el mayor valor de T para el cual $y_c(t) = x_c^2(t)$?



Ejercicio 15. El sistema discreto de la figura es un "elevador al cuadrado", $y[n] = x^2[n]$ y $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi\,1000$. ¿Cuál es el mayor valor de T tal que $y_c(t) = x_c^2(t)$?



Ejercicio 16. Para un sistema cuyo diagrama en bloques es similar al de la figura del Ejercicio 13, el sistema continuo obedece la ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes

$$\frac{d^2}{dt^2}y_c(t) + 4\frac{d}{dt}y_c(t) + 3y_c(t) = x_c(t).$$

Determine la respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\omega}\right)$ del sistema discreto cuando $T = 0{,}1$ s.

Ejercicio 17. La señal $x(t) = e^{-at}e^{j2\pi f_0 t}u(t)$, $a > 0$, que **no** es de banda limitada, se muestrea a una frecuencia $f_s = 1/T$. Compruebe que:

1. La magnitud del espectro se la señal continua es:

$$|X(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + [2\pi(f - f_0)]^2}.$$

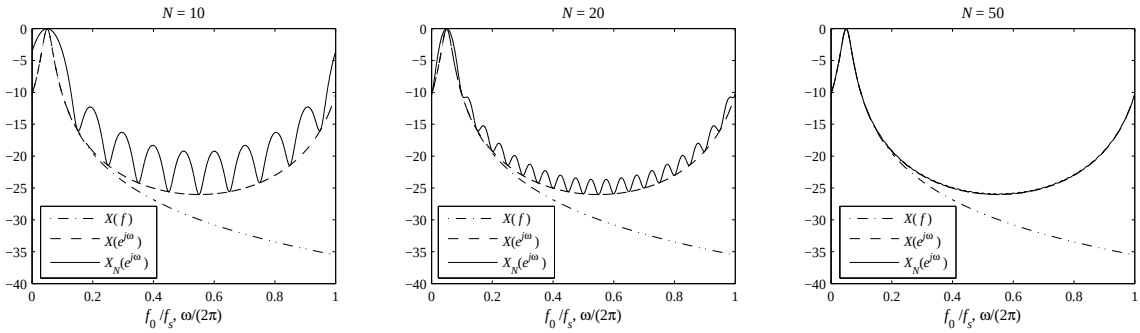
2. La magnitud del espectro de la señal muestreada es:

$$\left|X(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{1}{1 - 2e^{-aT}\cos[\omega - 2\pi f_0 T)] + e^{-2aT}}.$$

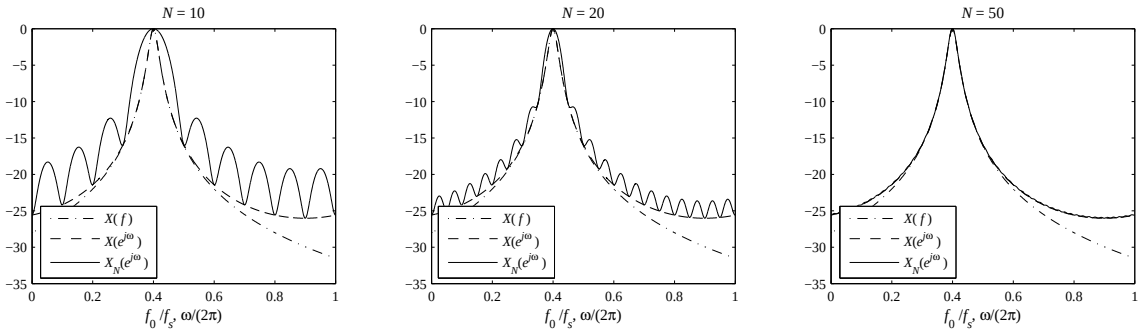
3. La magnitud del espectro de N muestras de la señal muestreada es

$$\left|X_N(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{1 - 2e^{-aTN}\cos(\omega - 2\pi f_0 T)N + e^{-2aTN}}{1 - 2e^{-aT}\cos(\omega - 2\pi f_0 T) + e^{-2aT}}.$$

Ⓜ **Ejercicio 18.** Usando MATLAB, grafique los espectros del Ejercicio 17. Para facilitar la comparación, grafique la amplitud en dB de los tres espectros de potencia, normalizando el máximo de cada espectro a 0 dB. Dibuje las tres respuestas en un único gráfico utilizando un eje de frecuencias normalizado: f/fs para $|X(f)|^2$, y $\omega/(2\pi)$ para $\left|X(e^{j\omega})\right|^2$, $\left|X_N(e^{j\omega})\right|^2$. Utilice los siguientes valores de los parámetros: $a = 100$, $f_s = 1000$. Calcule los espectros para dos valores de f_0, $f_0^A = 50$ Hz, $f_0^B = 400$ Hz, y tres valores de N: $N_1 = 10$, $N_2 = 20$, $N_3 = 50$.



Espectros de la señal con frecuencia portadora $f_0 = 50$ Hz.



Espectros de la señal con frecuencia portadora $f_0 = 400$ Hz.

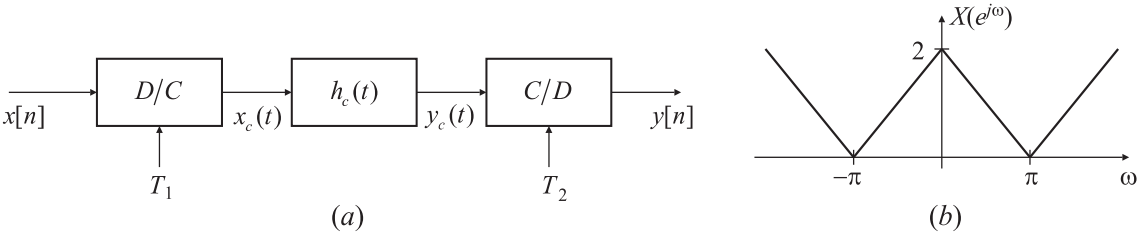
Comentario: En este ejemplo, como la señal se conoce analíticamente, es posible calcular tanto el espectro continuo $X(f)$ como el espectro discreto $X(e^{j\omega})$. Sin embargo, para una señal arbitraria, el *único* espectro de que puede conocer es $X_N(e^{j\omega})$, que se calcula con la TDF de las N muestras adquiridas, con el agregado eventual de ceros para obtener un gráfico "continuo".

Ejercicio 19. La figura (a) muestra un sistema de procesamiento continuo de señales discretas. El sistema continuo con respuesta impulsiva $h_c(t)$ es un filtro pasabajos ideal cuya respuesta en frecuencia es

$$H_c(f) = \begin{cases} 1, & |f| < 10 \text{ kHz}, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Exprese $y[n]$ en función de $x[n]$ si:

1. $T_1 = T_2 = 10^{-4}$, y $x[n]$ es arbitraria.
2. $T_1 = 0{,}25 \times 10^{-4}$, $T_2 = 10^{-4}$, y $x[n] = [\text{sinc}(n/2)]^2$. $X(e^{j\omega})$ se muestra en la Fig. (b).



Ejercicio 20. El osciloscopio Agilent DS03102 tiene un ancho de banda analógico de 60 MHz, y una velocidad de muestreo máxima de 1 Gs/s. La memoria de adquisión es de 4000 puntos, pero en pantalla sólo se muestran 1200, a razón de 100 puntos por división.

1. ¿Cuál es el máximo tiempo de adquisición cuando se utiliza la máxima frecuencia de muestreo?
2. ¿Cuál es el menor ajuste posible de la base de tiempos?
3. Para una señal senoidal de 60 MHz (frecuencia igual al ancho de banda del osciloscopio) ¿cuántos períodos se observan en la pantalla cuando la base de tiempos se ajusta en el valor del inciso anterior (es decir, cuando se muestrea a la máxima frecuencia posible)?
4. El osciloscopio se conecta a un generador que entrega una onda senoidal de 1.003 kHz. ¿cuál es la frecuencia de muestreo mínima para evitar el aliasing? ¿Cual es el ajuste de la base de tiempos, en unidades de tiempo por división, que corresponde a esta frecuencia?
5. Teniendo en cuenta que las escalas (tanto de la base de tiempos como de los atenuadores de entrada) siguen la proporción 1:2:5, ¿cuál es el verdadero valor de la base de tiempos que debe elegise en el inciso anterior? ¿Cuántos períodos de la señal se observan en la pantalla con la base de tiempos en esta posición?
6. ¿Cuál debe ser el ajuste de la base de tiempos para observar en la pantalla poco más de un ciclo de la señal?
7. Si la base de tiempos se ajusta a 100 ms/div, ¿cuál es la frecuencia de muestreo? ¿Hay aliasing? Grafique la forma de onda que se observa en la pantalla, y estime la frecuencia de la misma a partir de esta medición.
8. Para este ajuste de la base de tiempos, grafique el espectro de la señal analógica, el espectro de la señal muestreada, y el espectro de la señal reconstruida, que se observa en la pantalla del osciloscopio. Compare sus resultados con los obtenidos en el inciso anterior.

Ejercicio 21. Las figuras (a), (b) (c) muestran tres señales definidas en el intervalo $[0, 2T]$ como

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} A\cos 2\pi f_0 t, & 0 \le t \le T = 2/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \\ y(t) &= \begin{cases} A\cos 2\pi (2f_0) t, & 0 \le t \le T = 2/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \\ z(t) &= x(t) + y(t-T). \end{aligned}$$

1. Calcular y graficar los espectros $X(f)$, $Y(f)$, $Z(f)$.

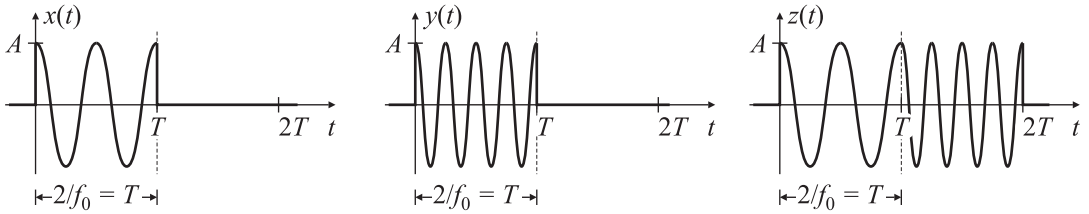
2. Determinar y graficar los espectros $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, y $Z(e^{j\omega})$ de las señales de longitud finita $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$ que resultan de muestrear $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ con una frecuencia f_s (la misma para las tres señales) durante $2T = 4/f_0$ segundos. ¿Cuál es el mínimo valor posible de f_s? ¿Cuál es la longitud M (en muestras) de las señales discretas?

3. Se desea distinguir la ocurrencia o no de las señales (a) , (b) o (c) usando la TDF. Determinar el orden N de la TDF que permite detectar "fácilmente" sin ambigüedades cualquiera de los casos.

4. El número N de muestras requeridas para la TDF, ¿coincide con el número M del inciso (2)? ¿Es conveniente muestrear a una frecuencia mayor o menor que la calculada en ese inciso? ¿Por qué?

5. Graficar los espectros $X[k]$, $Y[k]$, $Z[k]$ que resultan de calcular las TDF del inciso anterior.

6. ¿Cuáles muestras k_i de $X[k]$ (o $Y[k]$, $Z[k]$) deben observarse para distinguir los casos (a) , (b) o (c)?



Ejercicio 22. El ancho de banda de interés de una señal se extiende desde 0 hasta f_M Hz, y desde allí el módulo de su espectro decae a razón de α dB/década. Se dispone de un prefiltro analógico que tiene una banda de paso plana desde 0 hasta f_M Hz, y a partir de esa frecuencia la atenuación crece a razón de β dB/década. Se necesita que en el rango entre 0 y f_M las réplicas frecuenciales debidas al muestreo queden atenuadas más de A dB. Demuestre que la *mínima* frecuencia de muestreo que debe utilizarse para cumplir este requisito es

$$f_s = f_M \left(1 + 10^{\frac{A}{\alpha+\beta}}\right).$$

Ejercicio 23. El módulo del espectro de la señal de entrada a un sistema es

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (10^{-4} f)^8}}.$$

La mayor frecuencia de interés es de 20 kHz, y la señal se muestrea a f_s Hz. Se necesita que las réplicas ocasionadas por el muestreo queden atenuadas en más de 60 dB *relativos a la amplitud de la señal*, esto es, deben ser al menos 60 dB menores que la amplitud de las componentes de la señal en el rango de frecuencias de interés entre 0 y 20 kHz.

1. Determine la menor frecuencia de muestreo f_s que se debe adoptar si no se coloca un prefiltro analógico.
2. Se dispone de un prefiltro analógico tipo Butterworth de tercer orden, cuya respuesta en frecuencia tiene magnitud

   $$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^6}}.$$

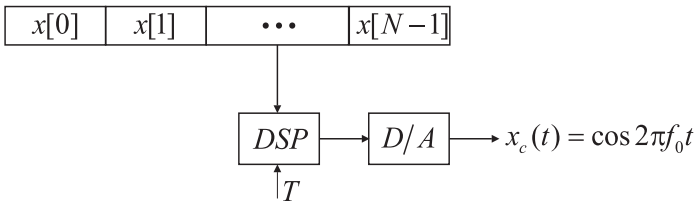
   Es necesario que la atenuación del prefiltro en el rango de frecuencias de interés sea menor a 1 dB. ¿Cuál es el valor de la frecuencia de normalización f_0 en este caso? ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo f_s que debe utilizarse? Compare este cálculo exacto con el método aproximado detallado en el Ejercicio 22.

Ejercicio 24. Para el sistema de procesamiento del Ejercicio 23, se fija la frecuencia de muestreo a un valor prefijado que es *menor* al mínimo determinado en ese ejercicio, pero mayor que $2f_M$. Para lograr la atenuación deseada de las réplicas causadas por el muestreo, se utiliza un filtro Butterworth de mayor orden, con una banda de transición más abrupta. El módulo de la respuesta en frecuencia de un filtro Butterworth de orden N es

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^{2N}}}.$$

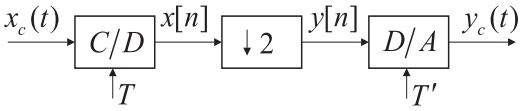
Dada f_s, determine el mínimo orden N del filtro de modo que la atenuación en la banda de paso sea menor que $A_P = 1$ dB, y tal que la atenuación de las réplicas sea superior a $A = 60$ dB.

Ⓒ **Ejercicio 25.** La figura ilustra el esquema básico de un oscilador digital sinusoidal implementado según la técnica de "look-up table". Las muestras de un ciclo de la señal $x[n] = \cos(2\pi n/N)$, $n = 0, 1, \ldots, N$ se almacenan consecutivamente en el espacio de memoria. La señal de salida se genera direccionando secuencialmente las distintas posiciones de memoria, volviendo al principio cuando el argumento supera el valor 2π. Esto puede lograrse utilizando direccionamiento "módulo N" (una opción habitual en los procesadores dedicados), es decir, implementando un *buffer* circular. Las muestras de $x[n]$ se envían al conversor D/A cada T segundos.



1. Muestre que la frecuencia f_0 de la señal de salida puede ajustarse cambiando T.
2. Si T se deja fijo, determine cuántas señales analógicas distintas pueden generarse con la misma tabla.

Ejercicio 26. En el sistema de la figura, $x[n] = x_c(nT)$ e $y[n] = x[2n]$.

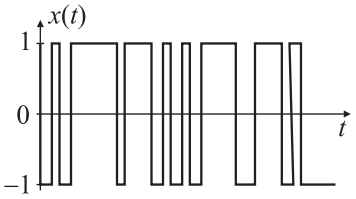


1. Si $x_c(t)$ tiene una transformada de Fourier tal que $X_c(j\Omega) = 0$, $|\Omega| > 2\pi\,100$, ¿cuál es el valor de T que asegura que $X\left(e^{j\omega}\right) = 0,\ \pi/2 < |\omega| < \pi$?
2. Calcule T' de modo que $y_c(t) = x_c(t)$.

Ⓒ **Ejercicio 27.** El método BPSK (binary phase shift keying) es una de las manera más simples de transmitir información digital. Para una sucesión de bits $b[n]$, que ocurren cada T segundos, se genera una señal $x\,(t)$ de tipo NRZ (non return to zero) haciendo

$$x\,(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } b[n] = 0, \\ -1, & \text{si } b[n] = 1, \end{cases} \qquad \text{para } nT \leq t < (n+1)T.$$

donde T es el *intervalo de bit* de la señal. Una forma de onda típica de este tipo de señales se muestra en la figura.



Una señal NRZ $x\,(t)$ con intervalo de bit $T = 5 \times 10^{-4}$ segundos modula una portadora compleja $e^{j2\pi f_0 t}$, generando la señal compleja

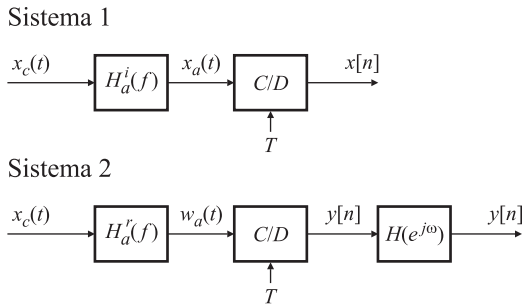
$$y(t) = x\,(t)\, e^{j2\pi f_0 t}.$$

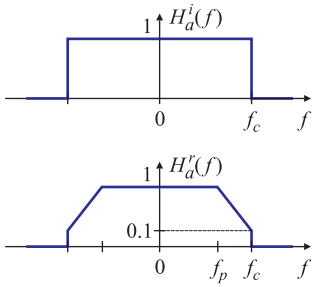
Se sabe que la frecuencia de la portadora está en el rango $|f_0| < 1000$ Hz, y se desea estimar f_0 a partir de un intervalo de medición finito de la señal BPSK modulada.

1. Explique porqué será dificultoso estimar f_0 a partir del módulo de la TDF de $y(t)$ (utilizando ventanas o no). En caso de duda, experimente con MATLAB.
2. Para estimar f_0 se propone el procedimiento que se detalla a continuación. Explique porqué este método da resultados correctos, y determine el intervalo de muestreo necesario para determinar f_0 sin ambigüedades.
   a) Muestrear la señal y elevar el resultado al cuadrado. Es decir, calcular $z[n] = y^2(nT)$.

b) Estimar f_0 a partir de la magnitud de la TDF de $z[n]$.

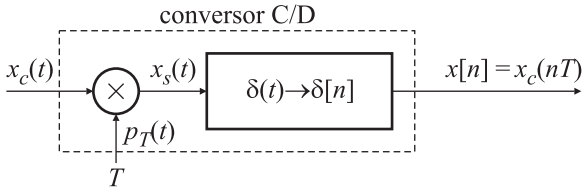
Ejercicio 28. En la Sección 5.11.1 se estudia el uso de un prefiltro para evitar el aliasing. En la práctica, el filtro antialiasing no es ideal, pero las características no ideales (atenuación en la banda de paso, zona de transición, etc.) se pueden compensar al menos parcialmente con un sistema de tiempo discreto ubicado a la salida del conversor C/D. En la figura se muestran dos sistemas de procesamiento de datos, uno de ellos con un filtro antialiasing ideal (Sistema 1), y otro con un filtro antialiasing "real" (Sistema 2); las respuestas en frecuencia del filtro ideal $H_a^i(e^{j\omega})$ y del filtro "real" $H_a^r(e^{j\omega})$ también se muestran en la figura, donde $f_c = F_s/2$, y $f_p = 3F_s/8$. Diseñar el sistema discreto $H(e^{j\omega})$ del Sistema 2 para que las sucesiones $x[n]$ e $y[n]$ sean iguales.





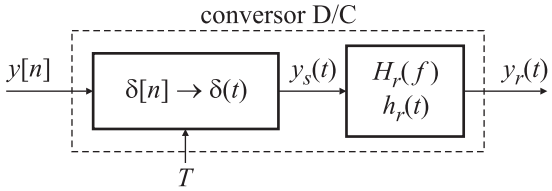
5.19. Tablas útiles

Muestreo



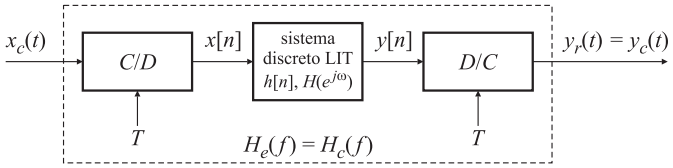
dominio frecuencial (f)	dominio temporal	dominio frecuencial (Ω)
$X_c(f)$	$x_c(t)$	$X_c(\Omega)$
$P_T(f)=\frac{1}{T}\sum_k \delta(f-kF_s)$	$p_T(t)=\sum_n \delta(t-nT)$	$P_T(\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_n \delta(\Omega-k\Omega_s)$
$X_s(f)=X_c(f)\times P_T(f)$	$x_s(t)=x_c(t)*p_T(t)$	$X_s(\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_c(\Omega)\times P_T(\Omega)$
$=\frac{1}{T}\sum_k X_c(f-kF_s)$	$=\sum_n x_c(nT)\delta(t-nT)$	$=\frac{1}{T}\sum_k X_c(\Omega-k\Omega_s)$
$X(e^{j\omega})=X_s(f)\big\vert_{f=\omega\frac{F_s}{2\pi}=\frac{\omega}{2\pi T}}$		$X_s(\Omega)\big\vert_{\Omega=\omega\frac{\Omega_s}{2\pi}=\frac{\omega}{T}}$
$=\frac{1}{T}\sum_k X_c(\omega\frac{F_s}{2\pi}-kF_s)$	$x[n]=x_c(t)\big\vert_{t=nT}$	$=\frac{1}{T}\sum_k X_c(\omega\frac{\Omega_s}{2\pi}-k\Omega_s)$
$=\frac{1}{T}\sum_k X_c\left[\frac{F_s}{2\pi}(\omega-2\pi k)\right]$		$=\frac{1}{T}\sum_k X_c[\frac{1}{T}(\omega-2\pi k)]$

Reconstrucción



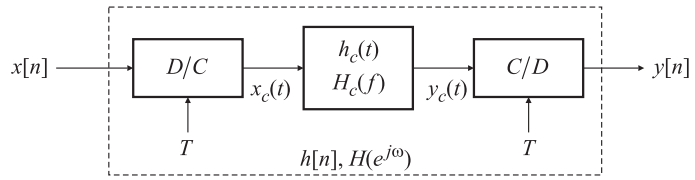
dominio frecuencial (f)	dominio temporal	dominio frecuencial (Ω)
$Y(e^{j\omega})$	$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
$Y_s(f)=Y(e^{j\omega})\big\vert_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}=f2\pi T}$	$y_s(t)=\sum_n y[n]\delta(t-nT)$	$Y_s(\Omega)=Y(e^{j\omega})\big\vert_{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s}=\Omega T}$
$H_r(f)=\begin{cases}T, & \lvert f\rvert<\frac{F_s}{2}\\ 0, & \lvert f\rvert>\frac{F_s}{2}\end{cases}$	$h_r(t)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}=\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$	$H_r(\Omega)=\begin{cases}T, & \lvert\Omega\rvert<\frac{\Omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}\\ 0, & \lvert\Omega\rvert>\frac{\Omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}\end{cases}$
$Y_r(f)=H_r(f)Y_s(f)$	$y_r(t)=\sum_n y[n]h_r(t-nT)$	$Y_r(\Omega)=H_r(\Omega)Y_s(\Omega)$
$=TY(e^{j\omega})\big\vert_{\omega=f\frac{2\pi}{F_s}=f2\pi T}$	$=\sum_n y[n]\operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$	$=TY(e^{j\omega})\big\vert_{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s}=\Omega T}$
si $\lvert f\rvert<\frac{F_s}{2}$		si $\Omega\rvert<\frac{\Omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}$

Procesamiento discreto de señales continuas



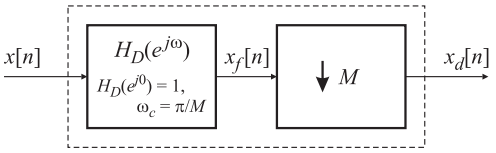
dominio frecuencial (f)	dominio temporal	dominio frecuencial (Ω)
$X_c(f)$	$x_c(t)$	$X_c(\Omega)$
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left[\frac{F_s}{2\pi}(\omega - 2\pi k)\right]$	$x[n] = x_c(t)\|_{t=nT}$	$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left[\frac{1}{T}(\omega - 2\pi k)\right]$
$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$	$y[n] = h[n] * x[n]$	$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$
$Y_s(f) = Y(e^{j\omega})\|_{\omega = f\frac{2\pi}{F_s} = f2\pi T}$	$y_s(t) = \sum_n y[n]\delta(t - nT)$	$Y_s(\Omega) = Y(e^{j\omega})\|_{\omega = \Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} = \Omega T}$
$Y_r(f) = H_r(f)Y_s(f)$ $= TH(e^{j\omega})X(e^{j\omega})\|_{\omega = f\frac{2\pi}{F_s} = f2\pi T}$	$y_r(t) = \sum_n y[n]h_r(t - nT)$ $= \sum_n y[n]\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$	$Y_r(\Omega) = H_r(\Omega)Y_s(\Omega)$ $= TH(e^{j\omega})X(e^{j\omega})\|_{\omega = \Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} = \Omega T}$
$H_c(f) = \begin{cases} H(e^{j\omega})\|_{\omega = f\frac{2\pi}{F_s} = f2\pi T} & \text{si } \|f\| < \frac{F_s}{2} \\ 0, & \text{si } \|f\| > \frac{F_s}{2} \end{cases}$		$H_c(\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})\|_{\omega = \Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} = \Omega T} & \text{si } \|\Omega\| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & \text{si } \|\Omega\| > \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$

Procesamiento continuo de señales discretas



dominio frecuencial (f)	dominio temporal	dominio frecuencial (Ω)
$X_c(f) = TX(e^{j\omega})\|_{\omega = f\frac{2\pi}{F_s}}$	$x_c(t) = \sum_n x[n]h_r(t - nT)$	$X_c(\Omega) = TX(e^{j\omega})\|_{\omega = \Omega T}$
$Y_c(f) = H_c(f)X_c(f)$	$y_c(t) = h_r(t) * x_c(t)$	$Y_c(\Omega) = H_c(\Omega)X_c(\Omega)$
$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}Y_c(f)\|_{f = \omega\frac{F_s}{2\pi}}$	$y[n] = y_c(t)\|_{t=nT}$	$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}Y_c(\Omega)\|_{\Omega = \omega\frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{\omega}{T}}$
$H(e^{j\omega}) = H_c(f)\|_{f = \omega\frac{F_s}{2\pi}}$, $\|\omega\| < \pi$		$H(e^{j\omega}) = H_c(\Omega)\|_{\Omega = \frac{\omega}{T}}$, $\|\omega\| < \pi$

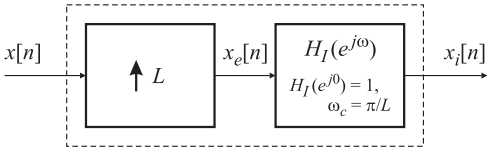
Decimación



$$\begin{aligned} x_f[n] &= x[n] * h_{PB}[n] \\ &= \sum_{\ell} x[\ell] h_{PB}[n-\ell] \quad \Leftrightarrow \quad X_f\left(e^{j\omega}\right) = H_{PB}\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right) \end{aligned}$$

$$x_d[n] = x_f[nM] \quad \Leftrightarrow \quad X_d\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} X_f\left(e^{j\left(\frac{\omega - 2\pi r}{M}\right)}\right)$$

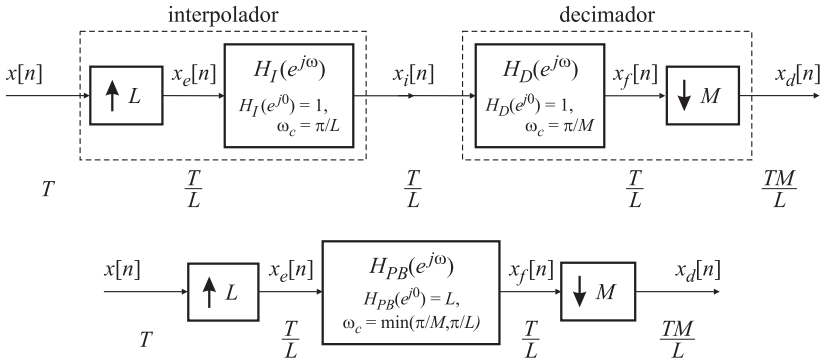
Interpolación



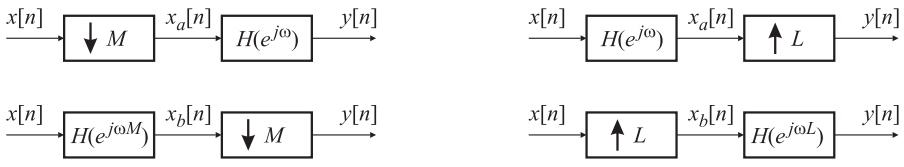
$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{si } n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X_e\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega L}\right)$$

$$\begin{aligned} x_i[n] &= x_e[n] * h_I[n] = \sum_{\ell} x_i[\ell] h[n-\ell] \\ &= \sum_{\ell} x[\ell] h[n - \ell L] \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} X_i\left(e^{j\omega}\right) &= H_I\left(e^{j\omega}\right) X_e\left(e^{j\omega}\right) \\ &= L\, X\left(e^{j\omega L}\right), \; |\omega| < \pi/L \end{aligned}$$

Cambio de la frecuencia de muestreo por un factor no entero



Intercambio de filtrado y sub/sobre muestreo



6 Transformada Z

La bibliografía para el estudio de este tema es:

- el Capítulos 3, "Z Transform" y
- el Capítulo 5, "Transform Analysis of Time-Invariant Systems"

del libro de Oppenheim, A., Schafer, R., *Discrete-Time Signal Processing*, 2da. Edición, Prentice-Hall, Inc., 1998.

6.1. Idea de la demostración del Teorema de Cauchy

Se desea probar que

$$\oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k = 1, \end{cases} \tag{6.1}$$

donde C es un contorno cerrado que rodea al origen y orientado en sentido antihorario (Fig. 6.1). Es conveniente introducir el cambio de variables $z = r(\theta) e^{j\theta}$ parametrizando el contorno C en función del ángulo θ. Es evidente que

$$\begin{aligned} dz &= \left[\frac{d\, r(\theta)}{d\theta} e^{j\theta} + r(\theta) \frac{d\, e^{j\theta}}{d\theta} \right] d\theta \\ &= r'(\theta)\, e^{j\theta}\, d\theta + j\, r(\theta)\, e^{j\theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

Para $k = 1$, el integrando es

$$\begin{aligned} z^{-k} dz &= z^{-1}\, dz \\ &= \frac{1}{r(\theta)\, e^{j\theta}} \left[r'(\theta)\, e^{j\theta} + j\, r(\theta)\, e^{j\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} d\theta + j\, d\theta. \end{aligned}$$

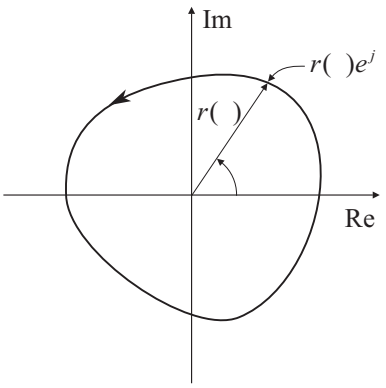


Fig. 6.1. Contorno de integración para la Ec. 6.1.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\oint_C z^{-1}dz &= \int_0^{2\pi}\frac{r'(\theta)}{r(\theta)}d\theta + \int_0^{2\pi} j\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}\left[\ln r(\theta)\right]d\theta + \int_0^{2\pi} j\,d\theta \\ &= \ln r(\theta)\big|_0^{2\pi} + j\theta\big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi j \end{aligned} \tag{6.2}$$

pues $r(0) = r(2\pi)$, y además $r(\theta) \neq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ pues el contorno de integración *rodea* al origen.

Para el caso en que $k = m \geq 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} z^{-m}dz &= \frac{1}{r^m(\theta)\, e^{jm\theta}}\left[r'(\theta)\, e^{j\theta} + j\, r(\theta)\, e^{j\theta}\right] d\theta \\ &= \frac{1}{m-1}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{r^{m-1}(\theta)\, e^{j(m-1)\theta}}\right] d\theta \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned}\oint_C z^{-m}dz &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{m-1}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{r^{m-1}(\theta)\, e^{j(m-1)\theta}}\right] d\theta \\ &= \frac{1}{m-1}\,\frac{1}{r^m(\theta)\, e^{jm\theta}}\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Finalmente, si $k = -p \leq 0$ (es decir, $p \geq 0$), resulta

$$\begin{aligned} z^{-m}dz &= z^p dz = r^p(\theta)\, e^{jp\theta}\left[r'(\theta)\, e^{j\theta} + j\, r(\theta)\, e^{j\theta}\right] d\theta \\ &= \frac{1}{p+1}\frac{d}{d\theta}\left[r^{(p+1)}(\theta)\, e^{j(p+1)\theta}\right] d\theta, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\oint_C z^{-k}dz &= \oint_C z^{p}dz \\ &= \oint_C \frac{1}{p+1}\frac{d}{d\theta}\left[r^{(p+1)}(\theta)\, e^{j(p+1)\theta}\right] d\theta \\ &= \frac{1}{p+1}\left[r^{(p+1)}(\theta)\, e^{j(p+1)\theta}\right]\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

De (6.2)-(6.4) queda probado (6.1).

6.2. Ejemplos de aplicación de la transformada $\mathcal{Z}$

6.2.1. Propiedad de convolución

EJEMPLO **6.1. Cálculo de la convolución entre dos sucesiones**
Se debe calcular la convolución entre la sucesión $x[n] = a^n u[n]$, donde se supone que $|a| < 1$, y la sucesión $h[n] = u[-n-1]$. En este ejemplo se exploran dos alternativas:

- **Cálculo de la convolución por definición**: Si $y[n] = x[n] * h[n]$, como $x[n]$ es causal y $h[n]$ es no causal se encuentra que

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k]y[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k], & \text{si } n < 0, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} x[k]h[n-k], & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

  Entonces, para $n < 0$ se tiene que

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

  Por otra parte, si $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=n+1}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n+1}^{\infty} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

  Por lo tanto,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & \text{si } n < 0, \\ \frac{a^{n+1}}{1-a}, & \text{si } n \geq 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

- **Cálculo de la convolución aplicando la transformada $\mathcal{Z}$**
  En general,es mucho más sencillo antitransformar el producto de las transformadas $\mathcal{Z}$ de las sucesiones que efectuar el cálculo de la convolución por definición. en este caso,

$$\begin{aligned} x[n] = a^n u[n] \quad &\overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} \quad X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}},\ |z| > |a|, \\ h[n] = u[-n-1] \quad &\overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} \quad H(z) = \frac{(-1)}{1-z^{-1}},\ |z| < 1. \end{aligned}$$

Como $|a| < 1$, las regiones de convergencia de $X(z)$ y de $Y(z)$ se solapan en $|a| < |z| < 1$, y entonces se puede definir

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \times \frac{(-1)}{1-z^{-1}}, \text{ para } |a| < |z| < 1.$$

Expresando $Y(z)$ en fracciones parciales,

$$Y(z) = \frac{A_0}{1-az^{-1}} + \frac{A_1}{1-z^{-1}},$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= Y(z)(1-az^{-1})\Big|_{z=a} = \frac{(-1)}{1-z^{-1}}\Big|_{z=a} = \frac{-1}{1-a^{-1}} = \frac{a}{1-a}, \\ A_1 &= Y(z)(1-z^{-1})\Big|_{z=1} = \frac{(-1)}{1-az^{-1}}\Big|_{z=1} = \frac{-1}{1-a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Y(z) = \left(\frac{a}{1-a}\right)\frac{1}{1-az^{-1}} + \left(\frac{-1}{1-a}\right)\frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ para } |a| < |z| < 1.$$

Para el polo en $z = a$, la región de convergencia es el exterior de un círculo, y por lo tanto la antitransformada corresponde a una sucesión derecha. Para el polo en $z = 1$ la región de convergencia es el interior de un círculo, y en consecuencia se asocia a una sucesión izquierda. En definitiva,

$$y[n] = \left(\frac{a}{1-a}\right)a^n u[n] + \frac{1}{1-a}u[-n-1],$$

que, evidentemente, coincide con la convolución calculada por definición en (6.5). □

6.3. Cálculos de transformadas inversas

Una de las principales aplicaciones de la transformada $\mathcal{Z}$ es en el análisis de sistemas lineales discretos. Frecuentemente este análisis involucra el encontrar transformadas $\mathcal{Z}$ de las sucesiones, y luego de alguna manipulación de las expresiones algebraicas, calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa. Existen varias maneras, formales e informales, de calcular la transformada inversa dada una expresión algebraica y su región de convergencia. El procedimiento formal se basa en la integral de Cauchy (Churchill y Brown, 1990). Sin embargo, para los tipos de sucesiones y transformadas $\mathcal{Z}$ que se encuentran en el análisis de sistemas discretos lineales e invariantes al desplazamiento, bastan (y en general, son preferibles) métodos menos formales. En las siguientes secciones se presentan algunos de ellos: el método de inspección, el de fracciones parciales, y el de la expansión en series de potencia

6.3.1. Método de inspección

El método de inspección consiste en familiarizarse con ciertos pares transformados, y tratar de reorganizar la expresión de la transformada $\mathcal{Z}$ para ponerlos en evidencia. Por ejemplo, en la Sección XX se evaluaron las transformadas $\mathcal{Z}$ de sucesiones de la forma

Tabla 6.1: Algunos pares de transformadas $\mathcal{Z}$ (consultar la Sección 6.8 para una tabla más completa).

	sucesión	transformada	región de convergencia
1.	$\delta[n]$	1	todo el plano z
2.	$\delta[n-m]$	z^{-m}	todo z salvo 0 (si $m>0$) o ∞ (si $m<0$)
3.	$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
4.	$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
5.	$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6.	$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
13.	$\cos(\omega_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
14.	$\operatorname{sen}(\omega_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{\operatorname{sen}\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
15.	$r^n\cos(\omega_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
16.	$r^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{r\operatorname{sen}\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
17.	$\begin{cases} a^n, & 0\le n\le N-1 \\ 0, & \text{caso contrario}\end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

$x[n] = a^n u[n]$, donde a puede ser real o complejo. Las sucesiones de este tipo aparecen frecuentemente, y por ellos es particularmente útil recordar el par transformado

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \tag{6.6}$$

Si se necesita encontrar la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}, \tag{6.7}$$

y se recuerda el par transformado indicado en (6.6), se puede reconocer "por inspección" que la sucesión asociada es $x[n] = (1/2)^n u[n]$. Si la región de convergencia asociada a $X(z)$ en la ecuación (6.7) hubiese sido $|z| < 1/2$, el par transformado número 6 de la Tabla 6.1 indica que $x[n] = -(1/2)^n u[-n-1]$.

Las tablas de transformadas $\mathcal{Z}$, como la Tabla 6.1, son de gran ayuda cuando se aplica

el método de inspección. Si la tabla es extensa, es posible expresar la transformada $\mathcal{Z}$ a invertir como una suma de términos cuya inversa figure en la tabla.

6.3.2. Expansión en fracciones parciales

Como se mencionó más arriba, las transformadas inversas se pueden calcular por inspección si se reconocen expresiones características, o si se cuenta con una tabla donde figure la transformada $\mathcal{Z}$ que se quiere antitransformar. Algunas veces $X(z)$ puede no figurar explícitamente en la tabla, pero puede obtenerse una forma alternativa como una suma de términos simples, cada uno de los cuales está tabulado. Este es el caso de cualquier función racional, ya que se puede obtener una expansión en fracciones parciales e identificar fácilmente las sucesiones asociadas a los términos individuales.

Para obtener una expansión en fracciones parciales, se supone que $X(z)$ está expresada como un cociente de polinomios en z^{-1}

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}. \tag{6.8}$$

Este tipo de transformadas aparecen frecuentemente en el estudio de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. Una expresión equivalente es

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}. \tag{6.9}$$

La ecuación (6.9) muestra explícitamente que para tales funciones habrá M ceros y N polos en el plano z, que no están ubicados en el origen. Además, habrá $M - N$ polos en $z = 0$ si $M > N$ o $N - M$ ceros en $z = 0$ si $N > M$. En otras palabras, las transformadas $\mathcal{Z}$ de expresiones de la forma (6.8) siempre tienen la misma cantidad de polos y ceros en el plano $\mathcal{Z}$, y no hay polos o ceros en $z = \infty$.

Para obtener la expansión en fracciones parciales de la expresión de $X(z)$ en la ecuación (6.8) es más conveniente notar que $X(z)$ también puede expresarse como

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k z^{-1})}, \tag{6.10}$$

donde los c_k, p_k son los ceros y polos no nulos, respectivamente, de $X(z)$. Si $M < N$, y los polos son de primer orden, entonces $X(z)$ puede escribirse como

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}. \tag{6.11}$$

Evidentemente, el denominador común de las fracciones en (6.11) es el mismo denominador de la ecuación (6.10). Multiplicando ambos miembros de (6.11) por $(1 - p_k z^{-1})$ y evaluando en $z = p_k$ se encuentra que los coeficientes A_k pueden calcularse como

$$A_k = \left. X(z)(1 - p_k z^{-1}) \right|_{z=p_k}. \tag{6.12}$$

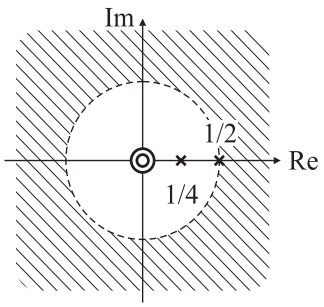


Fig. 6.2. Diagrama de polos y ceros y región de convergencia para la transformada $\mathcal{Z}$ del Ejemplo 6.2.

EJEMPLO **6.2. Transformada $\mathcal{Z}$ de segundo orden**
Sea $x[n]$ una sucesión con transformada $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}, \qquad |z| > \frac{1}{2}.$$

El diagrama de polos y ceros de $X(z)$ se representa en la Fig. 6.2: la transformada tiene un par de ceros en el origen, y polos en $z_1 = 1/4$ y en $z_2 = 1/2$, como se pone en evidencia al escribir $X(z)$ en la forma de la ecuación (6.9)

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

De la forma de la región de convergencia y de la Propiedad NN de la Sección XX se deduce que $x[n]$ es una sucesión derecha. Como los polos son de primer orden, $X(z)$ se puede expresar en la forma de la ecuación (6.11)

$$X(z) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

De la ecuación (6.12),

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(1-\tfrac{1}{4}z^{-1})\Big|_{z=1/4} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\bigg|_{z=1/4} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}4} = -1, \\ A_2 &= X(z)(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=1/2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}\bigg|_{z=1/2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}2} = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Como la sucesión es derecha, la región de convergencia de cada término se extiende por fuera del polo de mayor módulo. De la Tabla 6.1 y de la linealidad de la transformada $\mathcal{Z}$ se tiene que

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \qquad \square$$

El numerador que resultaría de sumar los términos de la ecuación (6.11) resultaría a lo sumo de grado $N-1$ en la variable z^{-1}. Si $M \geq N$, entonces debe agregarse un polinomio

de orden $M - N$ (en z^{-1}) al miembro de la derecha de la ecuación (6.11). Entonces, para $M \geq N$, la expansión en fracciones parciales de $X(z)$ toma la forma

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}. \tag{6.13}$$

Si $X(z)$ es una función racional de la forma (6.8) con $M \geq N$, los términos B_r de la expresión (6.13) se calculan efectuando la división entre el numerador y el denominador de $X(z)$, concluyendo el proceso de la división cuando el grado del resto (en z^{-1}) es menor que el grado del denominador. Los A_k se siguen calculando con la ecuación (6.12).

Si $X(z)$ tiene polos múltiples y $M \geq N$, la ecuación (6.13) debe modificarse; en particular si $X(z)$ tiene un polo de orden s en $z = p_i$ y todos los demás polos son de primer orden, la forma corregida de la ecuación (6.13) es

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{s} \frac{C_m}{(1 - p_i z^{-1})^m}. \tag{6.14}$$

Los coeficientes A_k y B_r se calculan como se indicó anteriormente, y los coeficientes C_m se calculan a partir de la siguiente expresión:

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-p_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} \left[(1 - p_i w)^s X(w^{-1}) \right] \right\} \Bigg|_{w = p_i^{-1}}. \tag{6.15}$$

La ecuación (6.14) es la forma más general de la expresión de expansión en fracciones parciales de una transformada $\mathcal{Z}$ racional expresada como función de z^{-1} para $M \geq N$ y para un polo p_i de orden s. Si ocurren varios polos múltiples, aparecerán términos como la tercera sumatoria de (6.14) por cada uno de ellos. Si no hay polos múltiples, (6.14) se reduce a (6.13). Si el orden del numerador es menor que el del denominador $(M < N)$ el término polinomial desaparece de las ecuaciones (6.13) y (6.14).

Resta determinar cuál es la sucesión correspondiente a una transformada $\mathcal{Z}$ racional dada. A tal fin se supone que $X(z)$ tiene sólo polos de primer orden, de manera que la ecuación (6.13) es la forma general de la expansión en fracciones parciales. Para calcular $x[n]$ se aprovecha la linealidad de la transformada $\mathcal{Z}$, de manera que se puede calcular la transformada inversa de cada término individual y luego sumarlos algebraicamente.

Los términos $B_r z^{-r}$ corresponden a impulsos escalados y desplazados, esto es, términos de la forma $B_r \delta[n - r]$. Cada una de las fracciones parciales corresponden a sucesiones exponenciales. Para decidir si un término de la forma

$$\frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

corresponde a una sucesión $p_k^n u[n]$ o $-p_k^n u[-n-1]$, se deben observar las propiedades de la región de convergencia que fueron discutidas en la Sección XX. Se observa entonces que si $X(z)$ tiene sólo polos simples, y la región de convergencia es de la forma $r_d < |z| < r_i$, entonces un polo p_k corresponde a una sucesión exponencial derecha $p_k^n u[n]$ si $|p_k| < r_d$, y corresponde a una sucesión exponencial izquierda $-p_k^n u[-n-1]$ si $|p_k| > r_i$. La región de convergencia sirve para clasificar los polos; los polos múltiples también pueden dividirse según contribuyan a sucesiones izquierdas o derechas de la misma manera. El

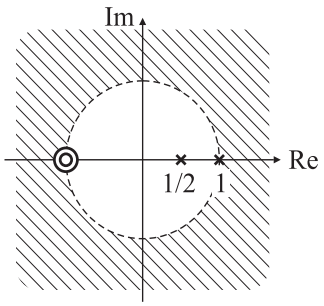


Fig. 6.3. Diagrama de polos y ceros y región de convergencia para la transformada $\mathcal{Z}$ del Ejemplo **??**.

empleo de la región de convergencia en el cálculo de las transformadas $\mathcal{Z}$ inversas a partir de la expansión en fracciones parciales se ilustra con los siguientes ejemplos.

EJEMPLO **6.3. Transformada inversa usando fracciones parciales**
En este ejemplo, la transformada $\mathcal{Z}$ tiene la forma indicada en la ecuación (6.13):

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}, \qquad |z|>1. \tag{6.16}$$

El diagrama de polos y ceros se representa en la Fig. **??**. De la región de convergencia y de la Propiedad 5, de la Sección XX, es evidente que $x[n]$ es una sucesión derecha.. Como el numerador y el denominador de la función transferencia son del mismo orden en z^{-1} (con $M=N=2$), y todos los polos son de primer orden, se puede expresar $X(z)$ como

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-z^{-1})}.$$

La constante B_0 se encuentra efectuando la división:

$$\begin{array}{l|l} z^{-2}+2z^{-1}+1 & \frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1 \\ \hline z^{-2}-3z^{-1}+2 & 2 \\ \hline 5z^{-1}-1 & \end{array}$$

El cálculo no se continua porque el resto es un grado menor (en la variable z^{-1}) que el divisor. De modo que $X(z)$ se puede expresar como

$$X(z) = 2 + \frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} \tag{6.17}$$

Los coeficientes A_1 y A_2 pueden encontrarse aplicando la ecuación (6.12) a las expresiones (6.16) o (6.17) indistintamente. Utilizando (6.16) se obtiene

$$A_1 = X(z)(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=1/2} = \left[2+\frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}\right](1-\tfrac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=1/2} = -9,$$

$$A_2 = X(z)(1-z^{-1})\Big|_{z=1} = \left[2+\frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}\right](1-z^{-1})\Big|_{z=1} = 8.$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 2 + \frac{-9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}}.$$

De la Tabla 6.1 se encuentra que, como la región de convergencia es $|z| > 1$,

$$\begin{aligned} 2 &\overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} 2\delta[n] \\ \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} &\overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n], \\ \frac{1}{1-z^{-1}} &\overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} u[n]. \end{aligned}$$

Por la linealidad de la transformada $\mathcal{Z}$,

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n] \qquad \square$$

EJEMPLO **6.4. Cálculo de antitransformadas**
Se debe calcular $x[n]$ sabiendo que

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1.$$

Como el numerador y el denominador de la función de sistema tienen el mismo orden en $z-1$ se debe calcular el cociente:

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{4}z^{-2} - z^{-1} + 1 & \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{5}{4}z^{-1} + 1 \\ \hline \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{5}{4}z^{-1} + 1 & 1 \\ \hline \frac{1}{4}z^{-1} + 0 & \end{array}$$

de modo que

$$X(z) = 1 + \underbrace{\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}}_{\tilde{X}(z)} = 1 + \frac{A_1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-z^{-1})}. \tag{6.18}$$

Los coeficientes A_1 y A_2 se calculan por residuos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{X}(z)(1-\tfrac{1}{4}z^{-1})\Big|_{z=1/4} = \left.\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-z^{-1})}\right|_{z=1/4} = \frac{1}{1-(\frac{1}{4})^{-1}} = -\frac{1}{3}, \\ A_2 &= \tilde{X}(z)(1-z^{-1})\Big|_{z=1} = \left.\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}\right|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Los residuos A_1, A_2 de $\tilde{X}(z)$ son los mismos que los de $X(z)$, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(1-\tfrac{1}{4}z^{-1})\Big|_{z=1/4} = \left.\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1-z^{-1})}\right|_{z=1/4} = \frac{(1-2)^2}{1-(\frac{1}{4})^{-1}} = -\frac{1}{3}, \\ A_2 &= X(z)(1-z^{-1})\Big|_{z=1} = \left.\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}\right|_{z=1} = \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3}\frac{1}{(1-z^{-1})}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1, \tag{6.19}$$

y de tablas se encuentra que

$$x[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n u[n] - \tfrac{1}{3}u[-n-1]. \tag{6.20}$$

Observación: Cuando el numerador y el denominador de la función de sistema tienen el mismo orden, es *imprescindible* efectuar el cociente entre el numerador y el denominador de $X(z)$. En caso contrario , no se obtiene el término "1" en la ecuación (6.18), y al descomponer $X(z)$ en fracciones parciales se tiene

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3}\frac{1}{(1-z^{-1})} = \frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})} = \tilde{X}(z). \tag{6.21}$$

Es evidente que $\tilde{X}(z) \neq X(z)$, y por lo tanto, la expresión en fracciones parciales del miembro izquierdo de ecuación (6.21) es incorrecta. □

Los mismos resultados puede obtenerse si la expresión racional $X(z)$ se expresa como un cociente de polinomios en z en lugar de z^{-1}. En este caso, el lugar de factores de la forma $(1-az^{-1})$ se hubieran considerado factores del tipo $(z-a)$, lo que hubiera conducido a un conjunto de ecuaciones similares a las (6.13)-(6.15) que serían convenientes para utilizar con una tabla de transformadas $\mathcal{Z}$ expresadas en función de z y no de z^{-1}. Ya que la Tabla 6.1 está expresada en función de z^{-1}, este enfoque es más útil. De todas maneras, estas alternativas se exploran en los Ejemplos 6.5 y 6.6.

EJEMPLO **6.5. Antitransformando expresiones en "z"**
La sucesión $x[n]$ también puede obtenerse a partir de $X(z)$ trabajando con polinomios en z y no en z^{-1}. En este caso,

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{z^2-z+\frac{1}{4}}{z^2-\frac{5}{4}z+\frac{1}{4}} = \frac{(z-\frac{1}{2})^2}{(z-\frac{1}{4})(z-1)}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1.$$

Nuevamente, como el numerador y el denominador de $X(z)$ tienen el mismo orden, es necesario calcular el cociente:

$$\begin{array}{l|l} z^2 - z + \frac{1}{4} & z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4} \\ \hline z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \frac{1}{4}z + 0 & \end{array}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 1 + \underbrace{\frac{\frac{1}{4}z}{(z-\frac{1}{4})(z-1)}}_{\tilde{X}(z)} = 1 + \frac{A_1}{(z-\frac{1}{4})} + \frac{A_2}{(z-1)},$$

donde los residuos A_1, A_2 se pueden calcular a partir de $\tilde{X}(z)$, como

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{X}(z)(z-\tfrac{1}{4})\big|_{z=1/4} = \left.\frac{\frac{1}{4}z}{z-1}\right|_{z=1/4} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{12}, \\ A_2 &= \tilde{X}(z)(z-1)\big|_{z=1} = \left.\frac{\frac{1}{4}z}{z-\frac{1}{4}}\right|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

o bien usando $X(z)$, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(z-\tfrac{1}{4})\Big|_{z=1/4} = \left.\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{(z-1)}\right|_{z=1/4} = \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{12}, \\ A_2 &= X(z)(z-1)|_{z=1} = \left.\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{(z-\frac{1}{4})}\right|_{z=1} = \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De modo que

$$X(z) = 1 - \frac{1}{12}\frac{1}{(z-\frac{1}{4})} + \frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1. \tag{6.22}$$

El problema ahora está en antitransformar $X(z)$, ya que los pares transformados que se conocen son

$$\begin{aligned} x[n] = a^n u[n] \quad &\overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} \quad X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \ |z| > |a|, \\ h[n] = -a^n u[-n-1] \quad &\overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} \quad H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \ |z| < |a|. \end{aligned}$$

y al compara con (6.22) se observa que al menos falta una "z" en el numerador. Esto se puede solucionar multiplicando numerador y denominador por z^{-1} para obtener

$$X(z) = 1 - \frac{1}{12}\frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1. \tag{6.23}$$

Esta expresión se puede antitransformar fácilmente haciendo uso de la propiedad de desplazamiento: $x[n-n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$. Nuevamente, para el polo en $z = 1/4$ la región de convergencia es el exterior de un círculo, y la respuesta temporal está asociada a una sucesión derecha:

$$\frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| \overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} (\tfrac{1}{4})^{n-1}u[n-1].$$

Para el polo en $z = 1$, la región de convergencia es el interior de un círculo, y la respuesta temporal está asociada a una sucesión izquierda

$$\frac{1}{(1-z^{-1})}, \quad |z| < 1 \overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} -u[-n-1].$$

Pero hay que prestar especial atención al desplazamiento, pues $z^{-1}/(1-z^{-1})$ equivale a deslazar la sucesión temporal una muestra *hacia la derecha* (es decir, reemplazar n por $n-1$):

$$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}, \quad |z| < 1 \overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} -u[-(n-1)-1] = -u[-n].$$

Por lo tanto, la antitransformada de (6.23) resulta

$$x[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{4})^{n-1}u[n-1] - \tfrac{1}{3}u[-n]. \tag{6.24}$$

La comparación de las ecuaciones (6.20) y (6.24) muestra que la expresión matemática de $x[n]$ es distinta; sin embargo los valores numéricos de ambas sucesiones son iguales. Operando con los términos de (6.24), se tiene que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{4})^{n-1}u[n-1] &= \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4})^{n-1}u[n-1] = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n}u[n-1] = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n}u[n] - \tfrac{1}{3}\delta[n], \\ \tfrac{1}{3}u[-n] &= \tfrac{1}{3}\delta[n] + \tfrac{1}{3}u[-n-1]. \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en (6.24) se encuentra que

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] - \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{4})^{n-1}u[n-1] - \tfrac{1}{3}u[-n] \\ &= \delta[n] - \left(\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n}u[n] - \tfrac{1}{3}\delta[n]\right) - \left(\tfrac{1}{3}\delta[n] + \tfrac{1}{3}u[-n-1]\right) \\ &= \delta[n] - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n}u[n] - \tfrac{1}{3}u[-n-1], \end{aligned}$$

que coincide con la ecuación (6.20). □

EJEMPLO **6.6. Otra manera de antitransformar expresiones en "z"**
Para evitar confusiones en el corrimiento hacia la derecha de las sucesiones izquierdas, cuando $X(z)$ se expresa como un cociente de polinomios en z y no en z^{-1}, es conveniente expresar en fracciones parciales la función $X(z)/z$. Aunque de esta forma es necesario calcular un residuo más porque se adiciona un polo en el origen, en general se evita hacer el cociente y se simplifica el cálculo posterior, como se muestra a continuación. Utilizando la misma transformada $\mathcal{Z}$ de los ejemplos previos,

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{(z-\frac{1}{2})^2}{(z-\frac{1}{4})(z-1)}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1,$$

se tiene que

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z(z-\frac{1}{4})(z-1)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{4}} + \frac{A_3}{z-1}.$$

Los residuos son

$$\begin{aligned} A_1 &= \left.\frac{X(z)}{z}z\right|_{z=0} = \left.\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{(z-\frac{1}{4})(z-1)}\right|_{z=0} = \frac{(-\frac{1}{2})^2}{(-\frac{1}{4})(-1)} = 1, \\ A_2 &= \left.\frac{X(z)}{z}(z-\tfrac{1}{4})\right|_{z=1/4} = \left.\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z(z-1)}\right|_{z=1/4} = \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})} = -\frac{1}{3}, \\ A_3 &= \left.\frac{X(z)}{z}(z-1)\right|_{z=1} = \left.\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z(z-\frac{1}{4})}\right|_{z=1} = \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{1(1-\frac{1}{4})} = .\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z} - \frac{\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}}{z-1}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1.$$

Multiplicando ambos miembros por z, resulta

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-1}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1,$$

que también puede escribirse como

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1.$$

Esta transformada $\mathcal{Z}$ coincide con la expresión (6.19) del Ejemplo 6.4, y la antitransformada es directa teniendo en cuenta la forma de la región de convergencia para cada uno de los polos. Se tiene entonces que

$$x[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n}u[n] - \tfrac{1}{3}u[-n-1], \tag{6.25}$$

que coincide con las sucesiones calculadas en los Ejemplos 6.4 y 6.5. □

EJEMPLO **6.7. Una cuarta forma de calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa**
Si la transformada $\mathcal{Z}$ tiene una expresión sencilla, la aplicación de propiedades puede simplificar el cálculo de las sucesiones, aunque frecuentemente resultan expresiones no tan compactas de $x[n]$ como las obtenidas en los Ejemplos 6.4 a 6.6. Partiendo de la misma transformada $\mathcal{Z}$ que en los ejemplos anteriores, pero expresada como cociente de polinomios en z^{-1},

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1,$$

se puede escribir

$$X(z) = (1-\frac{1}{2}z^{-1})^2 X_1(z) = (1-z^{-1}+\tfrac{1}{4}z^{-2})X_1(z), \tag{6.26}$$

donde

$$X_1(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1.$$

Esta transformada auxiliar se puede expresar en fracciones parciales (se omiten los cálculos por brevedad) como

$$X_1(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3}\frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \tfrac{1}{4} < |z| < 1,$$

cuya antitransformada es

$$x_1[n] = -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n u[n] - \tfrac{4}{3}u[-n-1].$$

Con esta sucesión, y teniendo en cuenta de la ecuación (6.26) que

$$x[n] = x_1[n] - x_1[n-1] + \tfrac{1}{4}x_1[n-2],$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} x[n] &= \left\{-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n u[n] - \tfrac{4}{3}u[-n-1]\right\} \\ &\quad - \left\{-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-1} u[n-1] - \tfrac{4}{3}u[-(n-1)-1]\right\} \\ &\quad - \tfrac{1}{4}\left\{-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-2} u[n-2] - \tfrac{4}{3}u[-(n-2)-1]\right\}. \\ &= -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n u[n] - \tfrac{4}{3}u[-n-1] + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-1} u[n-1] + \tfrac{4}{3}u[-n] \\ &\quad - \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{4})^{n-2} u[n-2] - \tfrac{1}{3}u[-n+1] \end{aligned} \tag{6.27}$$

Esta expresión es más complicada que las expresiones (6.20), (6.24) y (6.25) obtenidas en los Ejemplos 6.4 a 6.6, respectivamente, pero puede simplificarse notando que el tercer término se puede escribir como

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-1} u[n-1] = \tfrac{1}{3}\delta[n-1] + \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{4})^{n-2} u[n-2],$$

y por lo tanto la suma del primer, tercer y quinto término queda

$$-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n u[n] + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-1} u[n-1] - \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{4})^{n-2} u[n-2] = -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n u[n] + \tfrac{1}{3}\delta[n-1] \tag{6.28}$$

El segundo, el cuarto y el último término pueden escribirse como

$$\begin{aligned} -\tfrac{4}{3}u[-n-1] + \tfrac{4}{3}u[-n] - \tfrac{1}{3}u[-n+1] &= \tfrac{4}{3}\left(-u[-n-1] + u[-n]\right) - \tfrac{1}{3}u[-n+1] \\ &= \tfrac{4}{3}\delta[n] - \tfrac{1}{3}u[-n+1] \\ &= \tfrac{4}{3}\delta[n] - \tfrac{1}{3}\delta[n] - \tfrac{1}{3}\delta[n-1] - \tfrac{1}{3}u[-n-1] \\ &= \delta[n] - \tfrac{1}{3}\delta[n-1] - \tfrac{1}{3}u[-n-1]. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Por lo tanto, teniendo en cuente (6.28) y (6.29), la expresión (6.27) resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n u[n] + \tfrac{1}{3}\delta[n-1]\right) + \left(\delta[n] - \tfrac{1}{3}\delta[n-1] - \tfrac{1}{3}u[-n-1]\right) \\ &= \delta[n] - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n u[n] - \tfrac{1}{3}u[-n-1], \end{aligned}$$

que coincide con las expresiones (6.20), (6.24) y (6.25) de los Ejemplos previos. □

En la Sección **??** se discutirán e ilustrarán una serie de propiedades de la transformada $\mathcal{Z}$ que, en combinación con el método de las fracciones parciales permiten determinar la sucesión asociada a una función racional algebraica en z y su región de convergencia aún cuando $X(z)$ no esté dada exactamente en la forma indicada en la ecuación (6.10).

Antitransformada de expresiones con polos complejos congujados

De acuerdo a la expresión (6.13), la transformada $\mathcal{Z}$ de una sucesión que al menos tenga un par de polos complejos conjugados, por ejemplo en $z = p = \rho e^{j\theta}$ y en $z = p^* = \rho e^{-j\theta}$, puede expresarse como

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=2}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_0}{1 - p z^{-1}} + \frac{A_1}{1 - p^* z^{-1}}$$

donde los dos últimos términos representan las fracciones parciales correspondientes a los polos complejos conjugados. En lo que sigue se muestra que $A_1 = A_0^*$. Para simplificar la notación es conveniente expresar $X(z)$ como

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{\tilde{Q}(z)} \frac{1}{(1 - p z^{-1})(1 - p^* z^{-1})}.$$

donde $P(z)$, $Q(z)$ y $\tilde{Q}(z)$ son polinomios con coeficientes reales. Por lo tanto, según el cálculo de residuos,

$$\begin{aligned} A_0 &= X(z)(1 - p z^{-1})\Big|_{z=p} = \frac{P(p)}{\tilde{Q}(p)} \frac{1}{(1 - p^* p^{-1})}, \\ A_1 &= X(z)(1 - p z^{-1})\Big|_{z=p^*} = \frac{P(p^*)}{\tilde{Q}(p^*)} \frac{1}{[1 - p(p^*)^{-1}]} = \left[\frac{P(p)}{\tilde{Q}(p)}\right]^* \frac{1}{[1 - (p^* p^{-1})^*]} = A_0^*. \end{aligned}$$

ya que $P(p^*) = [P(p)]^*$, $\tilde{Q}(p^*) = [\tilde{Q}(p)]^*$ porque tienen coeficientes reales.

La transformada del par de polos complejos conjugados se puede escribir entonces como

$$\frac{A}{1 - p z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^* z^{-1}} = \frac{A - A p^* z^{-1} + A^* - A^* p z^{-1}}{1 - (p + p^*) z^{-1} + p p^* z^{-2}} = \frac{2\,\mathrm{Re}\{A\} - 2\,\mathrm{Re}\{A p^*\} z^{-1}}{1 - 2\,\mathrm{Re}\{p\} z^{-1} + |p|^2 z^{-2}}. \tag{6.30}$$

Por otra parte, si $A = \alpha e^{j\phi}$, y $p = \rho e^{j\theta}$, la antitransformada para una región de convergencia $|z| > |p|$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} A p^n u[n] + A^* (p^*)^n u[n] &= \alpha e^{j\phi} (\rho e^{j\theta})^n u[n] + \alpha e^{-j\phi} (\rho e^{-j\theta})^n u[n] \\ &= \alpha \rho^n [e^{j(n\theta+\phi)} + e^{-j(n\theta+\phi)}] u[n] \\ &= 2\rho^n \cos(\theta n + \phi) u[n]. \\ &= 2|A||p|^n \cos(\arg\{p\} n + \arg\{A\}) u[n]. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Por lo tanto, de acuerdo a las expresiones (6.30) y (6.31) se puede establecer el par transformado

$$2\alpha\rho^n\cos(\theta n+\phi)u[n] \Longleftrightarrow 2\alpha\frac{\cos\phi-\rho\cos(\phi-\theta)\,z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\,z^{-1}+\rho^2z^{-2}},\quad |z|>\rho. \tag{6.32}$$

La aplicación de este par transformado se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO **6.8. Antitransformada de polos complejos conjugados**
Se desea calcular la antitransformada de

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}. \tag{6.33}$$

Esta función tiene un par de ceros en el origen, y un par de polos complejos conjugados en

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/6}=\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{3}}{4},$$

de manera que $\rho=1/2$, $\theta=\pi/6$. Por lo tanto, $X(z)$ puede escribirse como

$$X(z)=\frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{j\pi/6}z^{-1}}+\frac{A^*}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/6}z^{-1}},$$

donde A, A^* se calculan aplicando residuos:

$$A=X(z)(1-\tfrac{1}{2}e^{j\pi/6}z^{-1})\Big|_{z=\frac{1}{2}e^{j\pi/6}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/6}z^{-1}}\bigg|_{z=\frac{1}{2}e^{j\pi/6}}=\frac{1}{1-e^{-j\pi/3}}=\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}=1e^{-j\pi/3}$$

de modo que $\alpha=1, \phi=-\pi/3$. Aplicando (6.31) se encuentra que

$$x[n]=2\alpha\rho^n\cos(\theta n+\phi)\,u[n]=2(\tfrac{1}{2})^n\cos(\tfrac{\pi}{6}n-\tfrac{\pi}{3})\,u[n]. \tag{6.34}$$

La expresión (6.33) también se puede antitransformar sin calcular residuos, comparándola con (6.32). En este caso, como en el numerador de (6.33) no aparece z^{-1}, y $\rho\neq 0$, debe ser $\cos(\phi-\theta)=0$, de donde

$$\phi=\theta+\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},$$

esto es, $\phi=\frac{2}{3}\pi+\pi k$. El numerador de (6.32) es $2\alpha\cos\phi$, y el de (6.33) es la unidad, de modo que $2\alpha\cos\phi=1$ de donde

$$\alpha=\frac{1}{2\cos\phi}.$$

Como $\alpha\geq 0$ (porque es el módulo del residuo A) se debe elegir un valor de $\phi=\frac{2}{3}\pi+\pi k$ compatible, esto es, tal que $\cos\phi\geq 0$, lo que ocurre para k impar. Para $k=1$, $\phi=5\pi/6$, y entonces $\cos\phi=1/2$, de donde $\alpha=1$. Finalmente, de la expresión (6.32) se encuentra que

$$x[n]=2\alpha\rho^n\cos(\theta n+\phi)\,u[n]=2(\tfrac{1}{2})^n\cos(\tfrac{\pi}{6}n+\tfrac{5\pi}{3})\,u[n]. \tag{6.35}$$

Aunque las expresiones (6.34) y (6.35) son matemáticamente diferentes, representan la misma sucesión temporal porque el ángulo $(-\pi/3)$ es congruente con $5\pi/3$. □

EJEMPLO **6.9. Antitransformada de una expresión con polos complejos conjugados**
Se desea calcular la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}}{1 - (\frac{1}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2})z^{-1} + (\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2})z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-3}} = \frac{(1 + z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{9}{4}z^{-2})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

Esta expresión tiene ceros en $c_{1,2} = \pm j$ y $c_3 = -1/4$, y polos en $z_{1,2} = \frac{3}{2}e^{\pm j\pi/4}$ y en $z_3 = 1/3$, de modo que también puede escribirse como

$$X(z) = \frac{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - jz^{-1})(1 + jz^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}.$$

Como el numerador y el denominador tienen igual orden, para calcular la antitransformada es necesario efectuar el cociente entre ambos. Se encuentra que

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{3} + (\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{2}}{2})z^{-1} + (\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{6})z^{-2}}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

que puede escribirse como

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{A_0}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})} + \frac{A_1}{(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Los coeficientes A_0, $A_1 = A_0^*$ y A_2 se calculan por residuos:

$$\begin{aligned}
A_0 &= X(z)(1-\tfrac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})\Big|_{z=\frac{3}{2}e^{j\pi/4}} = \tfrac{-3}{2132}\left[(212+203\sqrt{2})-j(514+105\sqrt{2})\right] = \sqrt{\tfrac{873}{1066}+\tfrac{66\sqrt{2}}{164}}e^{j\beta} \\
A_1 &= A_0^*, \\
A_2 &= X(z)(1-\tfrac{1}{3}z^{-1})\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \tfrac{70}{85-18\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

donde $\beta = -\tan^{-1}[(514 + 105\sqrt{2})/(212 + 203\sqrt{2})]$. Expresiones aproximadas para los residuos son

$$\begin{aligned}
A_0 &\approx -0{,}702278 - j0{,}932213 \approx 1{,}16714e^{-j2{,}21643}, \\
A_1 &\approx -0{,}702278 + j0{,}932213 \approx 1{,}16714e^{+j2{,}21643}, \\
A_2 &\approx 1{,}1756,
\end{aligned}$$

con $\alpha = 1{,}16714$ y $\phi = -2{,}21643$. Por lo tanto,

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{1{,}16714e^{-j2{,}21643}}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})} + \frac{1{,}16714e^{j2{,}21643}}{(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})} + \frac{1{,}1756}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Las posibles regiones de convergencia y las antitransformadas correspondientes son

- Para $|z| < 1$,

  $$x[n] = -\tfrac{1}{3}\delta[n] - 2 \times 1{,}16714 \times (\tfrac{3}{2})^n \cos(\tfrac{\pi}{4}n - 2{,}21643)u[-n-1] - 1{,}1756(\tfrac{1}{3})^n u[-n-1]$$

- Para $1 < |z| < 3/2$,

  $$x[n] = -\tfrac{1}{3}\delta[n] - 2 \times 1{,}16714 \times (\tfrac{3}{2})^n \cos(\tfrac{\pi}{4}n - 2{,}21643)u[-n-1] + 1{,}1756(\tfrac{1}{3})^n u[n]$$

- Para $\frac{3}{2} < |z|$,

  $$x[n] = -\tfrac{1}{3}\delta[n] + 2 \times 1{,}16714 \times (\tfrac{3}{2})^n \cos(\tfrac{\pi}{4}n - 2{,}21643)u[n] + 1{,}1756(\tfrac{1}{3})^n u[n] \qquad \square$$

6.3.3. Expansión en series de potencias

La expresión que define la transformada $\mathcal{Z}$ es una serie de Laurent donde cada uno de los elementos de la sucesión de valores $x[n]$ son los coeficientes de z^{-n}. De modo que si la transformada $\mathcal{Z}$ se da como una serie de potencia en la forma

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-2} + +x[2]z^{-2} + \cdots, \end{aligned} \tag{6.36}$$

se puede determinar cualquier valor de la sucesión encontrando el coeficiente de la potencia apropiada de z^{-1}. Esta aproximación es la misma que se aplicó al calcular la transformada inversa de la parte polinomial en la expresión en fracciones parciales cuando $M \geq N$. También es útil para sucesiones de longitud finita donde $X(z)$ puede no tener una forma cerrada más sencilla que un polinomio en z^{-1}.

EJEMPLO **6.10. Sucesiones de longitud finita**
Si $X(z)$ está dada por

$$\begin{aligned} X(z) &= z^2(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})(1+z^{-1}) \\ &= \frac{z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2}}{z} \end{aligned} \tag{6.37}$$

se observa que tiene un único polo en $z = 0$, de modo que no resulta práctica la expansión en fracciones parciales de la Sección 6.3.2. Sin embargo, multiplicando los factores de la ecuación (6.37) se puede expresar $X(z)$ como

$$X(z) = z^2 - \tfrac{1}{2}z - 1 + \tfrac{1}{2}z^{-1}.$$

Por inspección, teniendo en cuenta (6.36), se desprende que

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = -2, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } n = -1, \\ -1, & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

o bien

$$x[n] = \delta[n+2] - \tfrac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1]. \qquad \square$$

Cuando se busca la transformada $\mathcal{Z}$ de una sucesión se trata de sumar la serie de potencias de la ecuación (6.36) para obtener una expresión matemática más sencilla, en general una función racional. Si se desea usar la técnica de la serie de potencias para encontrar la sucesión asociada a una dada $X(z)$ expresada en forma cerrada, primero es necesario expandir $X(z)$ nuevamente en una serie de potencias. Existen tablas de series de potencias para muchas funciones, tales como logaritmo, seno, seno hiperbólico, etc. En algunos casos tales series de potencia pueden tener una interpretación útil como transformadas $\mathcal{Z}$, como se muestra en el siguiente ejemplo. En el caso de transformadas $\mathcal{Z}$ racionales la expresión en serie de potencias se pude obtener calculando la "división larga", como en los Ejemplos 6.12 y 6.13

EJEMPLO **6.11. Transformada inversa por expansión en series de potencias**
Aunque en general no serán de aplicación en este curso, es posible calcular las antitransformadas de funciones no racionales en z. Por ejemplo, si

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \qquad |z| > |a|,$$

se puede conocer la sucesión $x[n]$ correspondiente expresando $X(z)$ en serie de potencias. Teniendo en cuenta que

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

resulta

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n z^{-n},$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión (6.36),

$$x[n] = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u[n-1]. \qquad \square$$

.

EJEMPLO **6.12. Transformada inversa por división larga**
Se desea calcular la antitransformada de $X(z) = 1/(1 - az^{-1})$, $|z| > |a|$. Como la región de convergencia es el exterior de un círculo, la sucesión $x[n]$ es derecha, de modo que la transformada $\mathcal{Z}$ de $X(z)$ está formada por una serie de potencias negativas de z. Tal serie se puede obtener calculando el cociente entre los polinomios 1 y $1 - az^{-1}$ ordenando el dividendo y el divisor de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - az^{-1} \\
\cline{2-2}
1 \;\; -az^{-1} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots \\
\cline{1-1}
0 \;\; +az^{-1} & \\
\quad +az^{-1} \;\; -a^2z^{-2} & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad +a^2z^{-2} & \\
\qquad\quad +a^2z^{-2} \;\; -a^3z^{-3} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad +a^3z^{-3} & \\
\qquad\qquad\quad \vdots &
\end{array}$$

Es evidente que

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots.$$

si $|z| > |a|$. En este ejemplo sencillo es fácil deducir la forma general de la solución. Observando las potencias que intervienen en el resultado, y comparando con la expresión general de la transformada $\mathcal{Z}$ se nota que

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_n x[n] z^{-n} \\
&= \cdots + \underbrace{x[-2]}_{\downarrow 0} z^2 + \underbrace{x[-1]}_{\downarrow 0} z + \underbrace{x[0]}_{\downarrow 1} z^0 + \underbrace{x[1]}_{\downarrow a} z^{-1} + \underbrace{x[2]}_{\downarrow a^2} z^{-2} + \underbrace{x[3]}_{\downarrow a^3} z^{-3} + \cdots
\end{aligned}$$

de donde se deduce la forma general $x[n] = a^n u[n]$. $\square$

Con este método también pueden calcularse las transformadas inversas de regiones de convergencia que sean el interior de un disco, que corresponde a sucesiones izquierdas. Para ello es necesario ordenar los polinomios en potencias crecientes de (z^{-1}), como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO **6.13. Transformada inversa por división larga de una sucesión izquierda**

Tomando la misma transformada $\mathcal{Z}$ del ejemplo anterior, $X(z) = 1/(1 - az^{-1})$, pero con región de convergencia $|z| < |a|$, la antitransformada inversa puede calcularse efectuando el cociente de la manera siguiente:

$$
\begin{array}{rl|l}
1 & & -az^{-1}+1 \\
\cline{3-3}
1 \;\; -a^{-1}z & & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \cdots \\
\cline{1-1}
0 \;\; +a^{-1}z & & \\
\quad +a^{-1}z \;\; -a^{-2}z^2 & & \\
\cline{2-2}
\qquad\quad +a^{-2}z^2 & & \\
\qquad\quad +a^{-2}z^2 \;\; -a^{-3}z^3 & & \\
\cline{2-2}
\qquad\qquad\quad +a^{-3}z^3 & & \\
\qquad\qquad\quad \vdots & &
\end{array}
$$

Es evidente que

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \cdots$$

si $|z| < |a|$. Nuevamente, comparando con la expresión general de la transformada $\mathcal{Z}$ se observa que

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_n x[n]z^{-n} \\
&= \cdots + \underbrace{x[-3]}_{\downarrow\, -a^{-3}} z^3 + \underbrace{x[-2]}_{\downarrow\, -a^{-3}} z^2 + \underbrace{x[-1]}_{\downarrow\, -a^{-1}} z + \underbrace{x[0]}_{\downarrow\, 0} z^0 + \underbrace{x[1]}_{\downarrow\, 0} z^{-1} + \underbrace{x[2]}_{\downarrow\, 0} z^{-2} + \cdots
\end{aligned}
$$

de donde se deduce la forma general $x[n] = -a^n u[-n-1]$. □

Este procedimiento no es útil para transformadas muy complicadas, pero puede dar una pista para encontrar la forma general de la solución, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO **6.14. Transformada inversa de una sucesión derecha**
Se desea calcular la sucesión derecha asociada a la transformada $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Como se desea encontrar una sucesión derecha, el cociente debe arreglarse como

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +\frac{1}{2}z^{-1} & -\frac{1}{3}z^{-2} & & 1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2} \\
\cline{5-5}
1 & -\frac{5}{6}z^{-1} & +\frac{1}{6}z^{-2} & & 1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{11}{18}z^{-2}+\frac{31}{108}z^{-3}+\cdots \\
\cline{1-3}
0 & +\frac{4}{3}z^{-1} & -\frac{1}{2}z^{-2} & & \\
 & +\frac{4}{3}z^{-1} & -\frac{10}{9}z^{-2} & +\frac{2}{9}z^{-3} & \\
\cline{2-4}
 & 0 & +\frac{11}{18}z^{-2} & -\frac{2}{9}z^{-3} & \\
 & & +\frac{11}{18}z^{-2} & -\frac{55}{108}z^{-3} & +\frac{11}{108}z^{-4} \\
\cline{3-5}
 & & 0 & \frac{31}{108}z^{-3} & -\frac{11}{108}z^{-4} \\
 & & & \vdots &
\end{array}$$

La sucesión $x[n]$ puede escribirse como

$$x[n] = \delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n-1] + \frac{11}{18}\delta[n-2] + \frac{31}{108}\delta[n-3] + \cdots \tag{6.38}$$

pero es difícil encontrar un patrón que permita generalizar la sucesión. Utilizando otros métodos, por ejemplo el de fracciones parciales, es más sencillo encontrar la forma general. En este caso, como el numerados y denominador de $X(z)$ tienen el mismo orden, es necesario efectuar el cociente, pero ordenando los coeficientes de manera distinta:

$$\begin{array}{rrr|l}
-\frac{1}{3}z^{-2} & +\frac{1}{2}z^{-1} & +1 & \frac{1}{6}z^{-2}-\frac{5}{6}z^{-1}+1 \\
\cline{4-4}
-\frac{1}{3}z^{-2} & +\frac{5}{3}z^{-1} & -2 & -2 \\
\cline{1-3}
0 & -\frac{7}{6}z^{-1} & +3 &
\end{array}$$

De modo que $X(z)$ puede escribirse como

$$X(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = -2 + \frac{-\frac{7}{6}z^{-1}+3}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = -2 + \frac{A_1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= X(z)(1-\tfrac{1}{3}z^{-1})\Big|_{z=1/3} = \left.\frac{-\frac{7}{6}z^{-1}+3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=1/3} = \frac{-\frac{7}{6}3+3}{1-\frac{1}{2}3} = 1, \\
A_2 &= X(z)(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=1/2} = \left.\frac{-\frac{7}{6}z^{-1}+3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right|_{z=1/2} = \frac{-\frac{7}{6}2+3}{1-\frac{1}{3}2} = 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = -2 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},$$

y entonces,

$$x[n] = -2\delta[n] + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Se puede verificar que esta expresión coincide con (6.38) dando valores numéricos para $n = 0, 1, ...$

n	0	1	2	3	$\cdots$
$x[n]$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{31}{108}$	$\cdots$

En consecuencia, el método de la división larga es conveniente cuando sólo se necesitan conocer unos pocos términos de $x[n]$. □

Sin embargo, algunas veces el método de la división larga permite poner en evidencia cierta estructura de la sucesión a encontrar que sería difícil de encontrar de otra forma, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO **6.15. Método de división larga en sucesiones particulares**
Se desea conocer la transformada inversa de $X(z) = 1/(1-\frac{1}{2}z^{-3})$, para $|z| > 2^{-1/3}$. En este caso, la expansión en fracciones parciales necesita conocer los residuos de $X(z)$ en las tres raíces de $z^3 = 1/2$, que son $z_k = 2^{-1/3}e^{j\frac{2\pi}{3}k}$, con $k = 0,1,2$. Esto es,

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-3}} = \frac{1}{(1-2^{-1/3}z^{-1})} \times \frac{1}{(1-2^{-1/3}e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})} \times \frac{1}{(1-2^{-1/3}e^{j\frac{4\pi}{3}}z^{-1})}.$$

Si bien se puede resolver por residuos, es mucho más sencillo ensayar el método de la división larga:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 \;\; -\frac{1}{2}z^{-3} \\ \hline 0 \;\; +\frac{1}{2}z^{-3} \\ \quad +\frac{1}{2}z^{-3} \;\; -\frac{1}{4}z^{-6} \\ \hline \qquad\quad +\frac{1}{4}z^{-6} \\ \qquad\quad +\frac{1}{4}z^{-6} \;\; -\frac{1}{8}z^{-9} \\ \hline \qquad\qquad\quad +\frac{1}{8}z^{-9} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1-\frac{1}{2}z^{-3} & \\ \hline 1+\frac{1}{2}z^{-3}+\frac{1}{4}z^{-6}+\frac{1}{8}z^{-9}+\cdots & \end{array}$$

Es evidente que

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-3}} = 1 + \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-6} + \frac{1}{8}z^{-9} + \cdots$$

y por lo tanto, la transformada inversa es

$$x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-3] + \frac{1}{4}\delta[n-6] + \frac{1}{8}\delta[n-9] + \cdots$$

que puede generalizarse fácilmente a

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/3}, & \text{si } n \text{ es múltiplo de 3,} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En este caso, es mucho más sencillo calcular la transformada inversa utilizando el método de la división larga en lugar de efectuar la expansión en fracciones parciales, al contrario que lo que sucede con el Ejemplo anterior. □

El la Tabla 6.2 se listan algunas funciones comunes y su expansión en series de potencias.

6.3.4. Transformada inversa usando integración de contorno

En las Secciones 6.3.1 a 6.3.3 se discutieron varias formas de obtener la sucesión asociada a una transformada $\mathcal{Z}$ dada.. En esta sección se desarrolla un método formal , que será de interés teórico para obtener dos propiedades adicionales de la transformada $\mathcal{Z}$: el teorema de convolución compleja y la relación de Parseval.

Tabla 6.2: Algunas funciones y sus series de potencias.

	función	serie de potencia	RdC
1.	$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$\lvert z\rvert < 1$
2.	$\frac{1}{(1-z)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
3.	$\frac{1}{(1-z)^3}$	$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$	$\lvert z\rvert < 1$
4.	$\frac{z}{(1-z)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$	$\lvert z\rvert < 1$
5.	$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$	$\lvert z\rvert < 1$
6.	$\log(1+z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$\lvert z\rvert < 1$
7.	$-\log(1-z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$	$\lvert z\rvert < 1$
8.	$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$\lvert z\rvert < 1$
9.	$z+(1-z)\log(1-z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^n$	$\lvert z\rvert < 1$
10.	e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$	plano z
11.	$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$	plano z
12.	$\operatorname{sen} z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n$	plano z
13.	$\cosh z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$	plano z
14.	$\operatorname{senh} z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$	plano z
15.	$\arctan z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$	$\lvert z\rvert < 1$
16.	$\operatorname{arctanh} z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$	$\lvert z\rvert < 1$
17.	$\arcsin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} z^{2n+1}$	$\lvert z\rvert < 1$
		$= z + \frac{1}{2}\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{1}{7}z^7 + \cdots$	$\lvert z\rvert < 1$
18.	$\operatorname{arcsinh} z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} z^{2n+1}$	$\lvert z\rvert < 1$
		$= z - \frac{1}{2}\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{1}{7}z^7 + \cdots$	
19.	$\tan z$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4^n(4^n-1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$	$\lvert z\rvert < \frac{\pi}{2}$
		$= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 + \frac{1382}{155925}z^{11} + \cdots$	
20.	$\tanh z$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(4^n-1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$	$\lvert z\rvert < \frac{\pi}{2}$
		$= z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 - \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 - \frac{1382}{155925}z^{11} + \cdots$	

$n!!$ es el producto de todos los enteros (pares o impares) menores que n: $7!! = 7{\cdot}5{\cdot}3{\cdot}1$, $6!! = 6{\cdot}4{\cdot}2{\cdot}1$.
B_n es el n-ésimo número de Bernoulli. Se calcula por recursión $\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j-1} B_j = 0$ con $B_0 = 1$, y $m > 0$.

La expresión formal de la transformada $\mathcal{Z}$ inversa puede obtenerse a partir del teorema integral de Cauchy (Churchill y Brown 1992), que establece

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-k}dz = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{6.39}$$

donde C es un contorno cerrado que rodea al origen.

A partir de la definición de la transformada $\mathcal{Z}$,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{6.40}$$

multiplicando ambos miembros por z^{k-1} e integrando con una integral de contorno donde la curva de integración rodee al origen y esté íntegramente contenida en la región de convergencia de $X(z)$, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}\, z^{k-1}dz.$$

Intercambiando el orden de la integración y la suma (que es válido siempre que la serie sea convergente, de allí que el contorno de integración debe estar contenido en la RdC) resulta que

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-n-1}dz.$$

De acuerdo a la expresión (6.39) $\oint_C z^{k-n-1}dz = 1$ cuando $n = k$, y es nula si $n \neq k$; por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = x[k].$$

De modo que la transformada $\mathcal{Z}$ inversa se puede expresar de manera formal como la integral de contorno

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz, \tag{6.41}$$

donde C es un contorno cerrado orientado en sentido antihorario contenido en la región de convergencia de $X(z)$ y que rodea al origen. en la derivación de la relación (6.41) no se hizo ninguna hipótesis sobre el signo de k o de n, de modo que dicha expresión vale tanto para n positivos o negativos.

La ecuación (6.41) es la expresión formal de la transformada $\mathcal{Z}$ inversa. Si la región de convergencia incluye el círculo unitario, y éste se toma como contorno de integración, se puede escribir $z = e^{j\omega}$, con ω variando desde $-\pi$ hasta π para recorrer el círculo en sentido antihorario. Se tiene entonces que $dz = j\omega e^{j\omega}d\omega$, y reemplazando en (6.41) resulta

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{z=e^{j\omega}} X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)}j\omega e^{j\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(z)e^{j\omega n}d\omega,$$

que no es otra cosa que la transformada de Fourier inversa de $X(e^{j\omega})$.

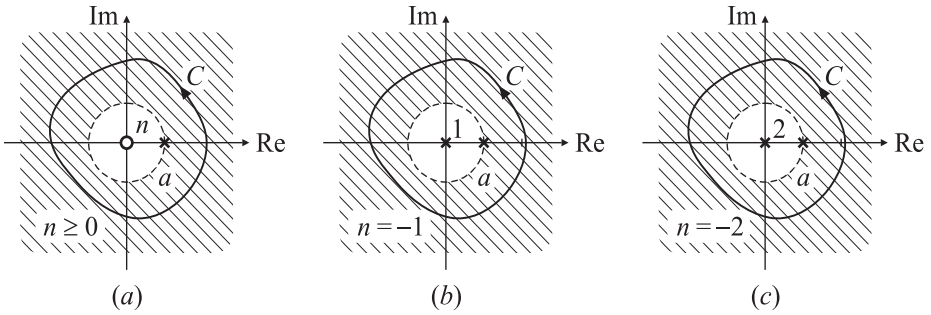


Fig. 6.4. Contornos de integración para la función $X(z)z^{n-1}$ del Ejemplo 6.16: para $n \geq 0$ (a), y para $n = -1$ (b) y $n = -2$ (c).

Es frecuente evaluar las integrales de contorno como (6.41) con el teorema de los residuos de Cauchy, que aplicado a la expresión (6.41) resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \\ &= \sum \text{residuos de } X(z)z^{n-1} \text{ en los polos encerrados por } C. \end{aligned} \tag{6.42}$$

La ecuación (6.42) es válida para cualquier transformada $X(z)$, pero el cálculo de los residuos de una transformada $\mathcal{Z}$ que no sea una función racional puede ser difícil. Sin embargo, si $X(z)z^{n-1}$ es una función racional, se puede expresar como

$$X(z)z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - p_k)^s},$$

donde $X(z)z^{n-1}$ tiene s polos en $z = p_k$, y $\psi(z)$ no tiene ningún polo en $z = p_k$. El residuo de $X(z)z^{n-1}$ en $z = p_k$ está dado por

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = p_k\} = \frac{1}{(s-1)!} \left. \frac{d^{s-1}\psi(z)}{dz^{s-1}} \right|_{z=p_k}. \tag{6.43}$$

En particular, si hay un único polo en $z = p_k$ $(s = 1)$, la expresión (6.43) se simplifica a

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = p_k\} = \psi(z)|_{z=p_k}. \tag{6.44}$$

Comparando (6.15) con (6.43) es sencillo advertir que encontrar los residuos de $X(z)z^{n-1}$ es similar a calcular los coeficientes para una expansión en fracciones parciales de $X(z)$. En general, para transformadas $\mathcal{Z}$ racionales es más sencillo aplicar el método de las fracciones parciales presentado en la Sección 6.3.2, ya que permite obtener la expresión de $x[n]$ para cualquier valor de n; en cambio, la expresión formal dada por la ecuación (6.41) permite calcular los valores de $x[n]$ muestra a muestra. En consecuencia la expresión (6.41) resulta de interés para aplicaciones teóricas, como se verá sobre el final del capítulo. De todas maneras, es interesante ilustrar este método utilizando una transformada $\mathcal{Z}$ sencilla.

EJEMPLO **6.16. Transformada inversa por integral de contorno**
Como un ejemplo del empleo de la expresión (6.41) se calculará la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|.$$

Aplicando (6.41) se tiene que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - a} dz,$$

donde el contorno de integración está contenido en la región de convergencia $|z| > |a|$, como se muestra en la Fig. 6.4(a). Es evidente en este caso que

$$X(z)z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - p_k)^s} = \frac{z^n}{z - a}.$$

Si $n \geq 0$, $\psi(z) = z^n$, $X(z)z^{n-1}$ sólo tiene un polo en $z = a$, y por lo tanto el contorno encierra sólo un polo. Se tiene entonces que

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} = \psi(z)|_{z=a} = a^n.$$

Por lo tanto,

$$x[n] = a^n, \qquad \text{para } n \geq 0.$$

Si $n < 0$, aparece un polo múltiple en el origen, cuya multiplicidad depende de n, y por lo tanto el cálculo de los residuos se dificulta a medida que $n \to (-\infty)$. Por ejemplo, para $n = -1$,

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{-2}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z} \frac{1}{z - a} dz$$

de modo que dentro del contorno de integración quedan *dos* polos, uno en $z = a$ y otro en $z = 0$, como se muestra en la Fig. 6.4(b) . Por lo tanto,

$$x[-1] = \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\}.$$

Es sencillo calcular que

$$\begin{aligned} \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z &= 0\} = \frac{1}{z} \frac{1}{z - a} z \Big|_{z=0} = -a^{-1}, \\ \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z &= a\} = \frac{1}{z} \frac{1}{z - a} (z - a) \Big|_{z=a} = a^{-1}, \end{aligned}$$

de modo que $\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} = 0$, y entonces

$$x[-1] = 0.$$

Si $n = -2$,

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{-3}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^2} \frac{1}{z - a} dz,$$

y dentro del contorno de integración quedan *tres polos*: el polo en $z = a$, y un polo *doble* en $z = 0$. Nuevamente,

$$\begin{aligned} x[-2] &= \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}} \left(\frac{1}{z - a} \right) + \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z &= 0\} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}}\left(\frac{1}{z-a}\right)\Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{a^2},\\ \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z &= a\} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{z-a}(z-a)\Big|_{z=a} = \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x[-2] = \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z=0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z=a\} = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = 0.$$

La evaluación de $x[n]$ para valores más negativos de n hacen que crezca la multiplicidad del polo en $z = 0$, complicando los cálculos. Aún así se puede encontrar que $x[n] = 0$ para $n < 0$, y en consecuencia,

$$x[n] = a^n u[n],$$

como era de esperar. □

Mientras que la ecuación (6.41) es válida para todo n, no es cómoda para calcular los valores de $x[n]$ cuando $n < 0$ por la aparición de polos múltiples en el origen. Esto se puede evitar haciendo un cambio de variables, que resulta en una ecuación alternativa que es más fácil de aplicar cuando $n < 0$. Si se hace $z = p^{-1}$, se tiene que $dz = -p^{-2}dp$, y (6.41) toma la forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz\Big|_{z=p^{-1}} = \frac{-1}{2\pi j}\oint_{-C'} X(p^{-1})p^{-n+1}p^{-2}dp. \tag{6.45}$$

El cambio de variables introduce modificaciones en la región de convergencia y el contorno de integración. Como $z = p^{-1}$, si el contorno de integración tiene sentido antihorario en el plano z, en el plano p se recorre en sentido horario; por ello se indica el contorno como $-C'$. El sentido de recorrido se puede hacer antihorario nuevamente multiplicando el último término de la expresión (6.45) por (-1). Además, si el contorno de integración es un círculo de radio r en el plano z, el contorno C' corresponde a un círculo de radio $1/r$ en el plano p. Los polos de $X(z)$ que estaban *fuera* del contorno C quedan *dentro* del contorno C' y viceversa. Algunos polos adicionales pueden o no aparecer en el origen o en infinito, pero no es importante para esta argumentación. En definitiva, multiplicando por (-1) para que el nuevo contorno también sea recorrido en sentido antihorario, la expresión (6.45) se puede escribir como

$$\begin{aligned}x[n] &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} X(1/p)p^{-n-1}dp\\ &= \sum \text{residuos de } X(1/p)p^{-n-1} \text{ en los polos encerrados por } C'.\end{aligned} \tag{6.46}$$

La utilidad de esta expresión se aprecia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO **6.17. Transformada inversa por integral de contorno para $n < 0$**
Para calcular la antitransformada de la función racional $X(z)$ del ejemplo anterior, primero es necesario efectuar el cambio de variables $z = p^{-1}$. Por lo tanto,

$$X(1/p) = X(z)|_{z=p^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}\Bigg|_{z=p^{-1}} = \frac{1}{1-ap}.$$

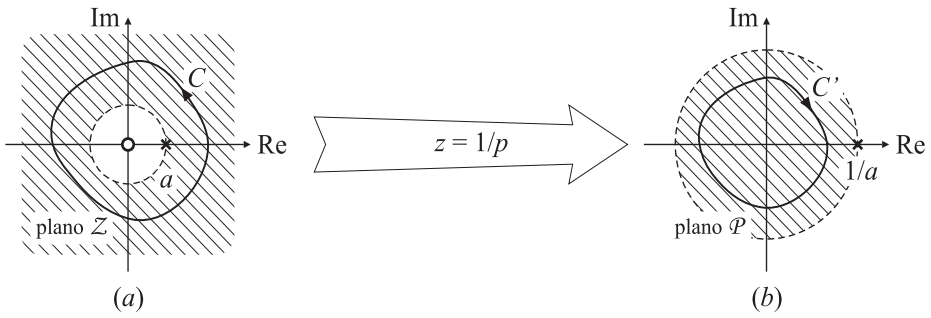


Fig. 6.5. Región de convergencia de $X(z)$ y de $X(1/p)$ para el Ejemplo 6.17.

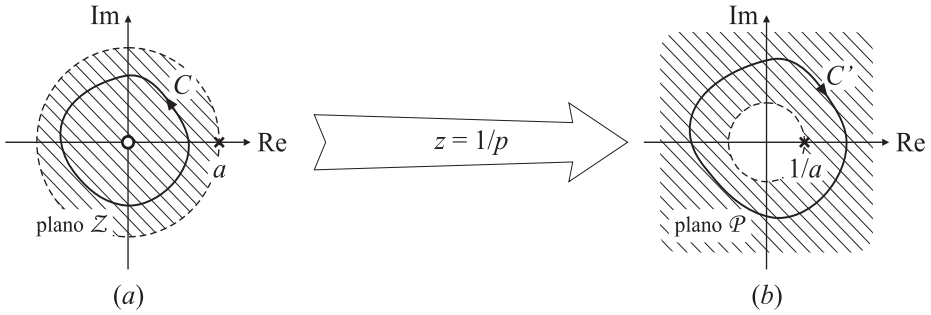


Fig. 6.6. Región de convergencia de $X(z)$ (a) y de $X(1/p)$ (b) para el Ejemplo 6.18.

Esta expresión tiene un polo en $p = 1/a$. La región de convergencia para $X(z)$ era $|z| > |a|$, y para $X(1/p)$ será $|p^{-1}| > |a|$, que puede escribirse como $|p| < 1/|a| = |1/a|$. El contorno de integración C', que debe estar contenido dentro de la región de convergencia de $X(1/p)$, y por lo tanto no rodea al polo en $1/a$, como se muestra en la Fig. 6.5. Se tiene entonces que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} X(1/p)p^{-n-1}dp = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{1}{1-ap}p^{-n-1}dp,$$

y, por ejemplo, para $n = -1$, resulta

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{1}{1-ap}p^{+1-1}dp = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{1}{1-ap}dp = 0,$$

porque el contorno de integración no encierra ningún polo. Para $n = -2$,

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{1}{1-ap}p^{+2-1}dp = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{p}{1-ap}dp = 0,$$

por el mismo motivo. Se observa que valores más negativos de n sólo aumentan el número de ceros, pero dejan inalterado el cálculo de los residuos. □

De la misma manera que la expresión (6.42) es válida pero complicada de aplicar para el caso $n < 0$, la ecuación (6.46) también es válida, pero incómoda, para el caso $n > 0$.

EJEMPLO **6.18. Aplicación del método de la integral de contorno**
Se desea calcular la sucesión $x[n]$ asociada a la transformada $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| < |a|.$$

Para calcular la parte de la sucesión correspondiente a $n \geq 0$, se aplica la ecuación (6.42):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z-a} dz$$

La región de convergencia de $X(z)$ y el contorno de integración se muestran en la Fig. **??**(a) . Si $n \geq 0$, el término z^n del numerador representa n ceros en el origen. Como el contorno de integración no encierra ningún polo, la integral de contorno es nula, esto es

$$x[n] = 0 \quad \text{para } n \geq 0. \tag{6.47}$$

Para los $n < 0$ conviene aplicar la expresión (6.46). En este caso,

$$X(1/p) = \frac{1}{1-ap} = \frac{-a^{-1}}{p-a^{-1}}, \qquad |p| > |1/a|.$$

El cero en el origen de $X(z)$ se mapea en un cero en $p = \infty$ de $X(1/p)$. La región de convergencia de $X(1/p)$ se representa en la Fig. **??**(b) . Entonces, de (6.46) se tiene que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} X(1/p) p^{-n-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}}{p-a^{-1}} p^{-n-1} dp.$$

Como $n < 0$, el numerador p^{-n-1} representa $n+1$ ceros en el origen. Por lo tanto el contorno de integración sólo encierra el polo en $p = a^{-1}$. Por lo tanto,

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}}{p-a^{-1}} p^{-(-1)-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}}{p-a^{-1}} dp = \text{Res}\left\{ \frac{-a^{-1}}{p-a^{-1}} \text{ en } p = a^{-1} \right\} = -a^{-1}.$$

Para $n = -2$,

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}}{p-a^{-1}} p^{-(-2)-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}p}{p-a^{-1}} dp = \text{Res}\left\{ \frac{-a^{-1}p}{p-a^{-1}} \text{ en } p = a^{-1} \right\} = -a^{-2},$$

etc. De modo que

$$x[n] = -a^n \quad \text{para } n < 0. \tag{6.48}$$

De (6.47) y (6.48) se deduce que $x[n] = -a^n n[-n-1]$. □

6.4. El teorema de convolución compleja

En el Capítulo 3 se discutió la propiedad de convolución periódica para las transformadas de Fourier de tiempo discreto (TFTD). Específicamente, la transformada de Fourier de un producto de sucesiones es la convolución periódica de sus transformadas de Fourier. Una generalización de esta propiedad es el teorema de la convolución compleja, que relaciona la transformada $\mathcal{Z}$ del producto de sucesiones con la transformada $\mathcal{Z}$ de cada una de las sucesiones.

Para derivar el teorema de la convolución compleja sea $w[n]$ el producto de dos sucesiones $x[n]$ e $y[n]$,

$$w[n] = x[n]y[n],$$

de modo que

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n}. \tag{6.49}$$

Si $Y(z)$ es la transformada $\mathcal{Z}$ de $y[n]$, se puede escribir

$$y[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} Y(v) v^{n-1} dv,$$

donde C_y es un contorno de integración orientado en sentido antihorario contenido en la región de convergencia de $Y(v)$. Por lo tanto, $W(z)$ resulta

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} Y(v) v^{n-1} dv \right] z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (z/v)^{-n} \right]}_{X(z/v)} Y(v) v^{-1} dv$$

que puede escribirse como

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} X(z/v) Y(v) v^{-1} dv \tag{6.50}$$

donde C_2 es un contorno cerrado contenido en la zona común de las regiones de convergencia de $X(z/v)$ y de $Y(v)$. De manera similar, si se reemplaza en (6.49) la sucesión $x[n]$ por su expresión equivalente

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} X(v) v^{n-1} dv,$$

se llega a la expresión

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} X(v) Y(z/v) v^{-1} dv, \tag{6.51}$$

donde en este caso C_x es un contorno de integración contenido en la región de convergencia común a $X(v)$ y a $Y(z/v)$. Para determinar la región de convergencia de $W(z)$ se supone que las regiones de convergencia de $X(z)$ y de $Y(z)$ están dadas por

$$\text{RdC}_X\text{: } r_{dx} < |z| < r_{ix}, \qquad \text{RdC}_Y\text{: } r_{dy} < |z| < r_{iy}.$$

Entonces, en la ecuación (6.50) C_Y es un contorno tal que

$$r_{dy} < |v| < r_{iy},$$

y

$$r_{dx} < \left|\frac{z}{v}\right| < r_{ix}.$$

Combinando estas dos expresiones, se encuentra que la región de convergencia de $W(z)$ es

$$r_{dx} r_{dy} < |z| < r_{ix} r_{iy}.$$

Este región de convergencia se suele designar como $\text{RdC}_X \times \text{RdC}_Y$. En algunas ocasiones la región de convergencia puede ser más grande que esta, por la eventual cancelación de polos y ceros, pero siempre incluye la región de convergencia recién definida, y extendiéndose hacia adentro o hacia afuera hasta los polos más cercanos. En otras palabras, la región de convergencia de $W(z)$ *contiene a* $\text{RdC}_X \times \text{RdC}_Y$.

Como es de esperar, las expresiones (6.50) y (6.51) coinciden con las convoluciones periódicas de la transformada de Fourier cuando se toma el círculo unitario como el contorno

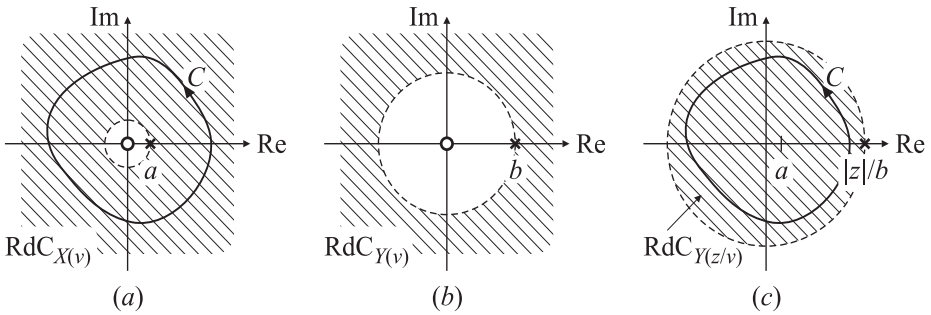


Fig. 6.7. Diagramas de polos y ceros y región de convergencia de $X(v)$ (a), $Y(v)$ (b) e $Y(z/v)$ (c) del Ejemplo 6.19.

C_X o C_Y, haciendo $v = e^{j\theta}$ (de manera que $dv = je^{j\theta}d\theta$) y evaluando $W(z)$ sobre el círculo unitario tomando $z = e^{j\omega}$. En estas condiciones, la expresión (6.51) se puede escribir como

$$\begin{aligned} W(z)|_{z=e^{j\omega}} &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_x} X(v)Y(z/v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j\omega}/e^{j\theta})e^{-j\theta}(je^{j\theta}d\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j\omega-\theta})d\theta, \end{aligned}$$

que es la expresión de la convolución periódica estudiada en el Capítulo 2.

Una de las principales dificultades en aplicar el teorema de convolución compleja consiste en determinar cuáles de los polos del integrando quedan dentro y cuáles fuera del contorno de integración. El siguiente ejemplo permite ilustrar el procedimiento.

EJEMPLO **6.19. Aplicación del teorema de convolución compleja**
Sean $x[n] = a^n u[n]$ e $y[n] = b^n u[n]$. Es claro que

$$w[n] = x[n]y[n] = a^n u[n]b^n u[n] = (ab)^n u[n],$$

y por lo tanto,

$$W(z) = \frac{1}{1-(ab)z^{-1}}, \qquad \text{para } |z| > |ab|. \tag{6.52}$$

Este mismo resultado puede encontrarse aplicando el teorema de convolución compleja. Las transformadas $\mathcal{Z}$ de $x[n]$ e $y[n]$ son

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|, \qquad \text{y} \qquad Y(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z| > |b|,$$

respectivamente. Reemplazando en (6.51) se tiene que

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{1-av^{-1}}\frac{1}{1-b(z/v)^{-1}}v^{-1}dv \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{(v-a)}\frac{-(z/b)}{(v-z/b)}dv \end{aligned}$$

El integrando (es conveniente destacar que aquí la variable es v y no z) tiene dos polos, uno ubicado en $v = a$ y otro en $v = z/b$ El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia de $X(v)$

se representan en Fig. 6.7(a) . Ya que el contorno de integración debe estar dentro de la región de convergencia de $X(v)$, necesariamente encierra el polo en $v = a$. Para determinar si el contorno rodea o no al polo en $v = z/b$, se observa que la región de convergencia de $Y(z)$ es $|z| > |b|$, como se muestra en la Fig. 6.7(b) y por lo tanto, la región de convergencia de $Y(z/v)$ es $|z/v| > |b|$ o $|v| > |z/b|$, como se ilustra en la Fig. 6.7(c). Como el contorno de integración debe estar contenido en la región de convergencia común a $X(v)$ y a $Y(z/v)$, el polo en $v = z/v$ queda *afuera* del contorno C. (En las figura se ha supuesto que a y b son reales para facilitar la representación). Utilizando el teorema de los residuos de Cauchy para evaluar $W(z)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{(v-a)}\frac{-(z/b)}{(v-z/b)}dv = \text{Res}\left\{\frac{1}{(v-a)}\frac{-(z/b)}{(v-z/b)} \text{ en } v=a\right\} \\ &= \frac{-(z/b)}{(a-z/b)} = \frac{1}{1-(ab)z^{-1}}, \end{aligned} \tag{6.53}$$

que coincide con la expresión calculada en (6.52). Debe notarse que, para que se solapen las regiones de convergencia de $X(v)$ y de $Y(z/v)$, la Fig. 6.7(c) muestra que $|z/b| > |a|$, de donde resulta que $W(z)$ converge donde $|z| > |ab|$.

Nota: El cálculo de residuo en (6.53) sólo tiene en cuenta el polo encerrado por el contorno de integración. Es rutina verificar que si (por error) dentro del contorno de integración se hubiese considerado también el polo en $v = z/b$, la evaluación de la integral hubiese sido nula. □

6.5. Relación de Parseval

En el Capítulo 2 se estudió la relación de Parseval para la transformada de Fourier. La generalización de esta relación para la transformada $\mathcal{Z}$ es consecuencia directa del teorema de convolución compleja. Dadas dos sucesiones (que se supondrán complejas), $x[n]$ e $y[n]$, la relación de Parseval establece que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}dv, \tag{6.54}$$

donde el contorno de integración debe estar contenido en la zona común entre la región de convergencia de $X(v)$ y la de $Y^*(1/v^*)$. La relación (6.54) se puede obtener definiendo una sucesión auxiliar

$$w[n] = x[n]y^*[n],$$

y notando que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] = W(z)|_{z=1}\,. \tag{6.55}$$

De la Propiedad 5 de la Tabla 4.2 y el teorema de convolución compleja,

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]z^{-n} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y^*(z^*/v^*)v^{-1}dv. \tag{6.56}$$

Evaluando (6.56) para $z = 1$ se obtiene (6.54). Debe observarse que para poder aplicar (6.55) la región de convergencia de $W(z)$ debe contener el círculo unitario.

Si tanto $X(z)$ como $Y(z)$ convergen sobre el círculo unitario, se puede elegir $v = e^{j\omega}$, y la ecuación (6.54) se puede escribir como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega, \tag{6.57}$$

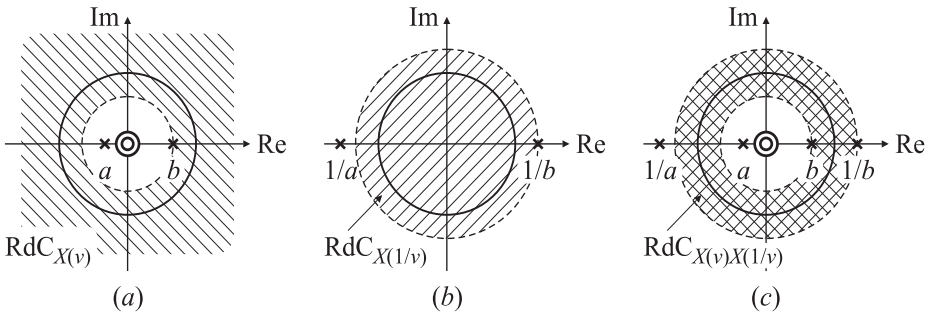


Fig. 6.8. Diagramas de polos y ceros y regiones de convergencia de $X(v)$ (a), $X(1/v)$ (b) y de $X(v)X(1/v)$ (c) (Ejemplo 6.20).

que es la relación de Parseval para la transformada de Fourier estudiada en el Capítulo 2.

La relación de Parseval en la forma de la ecuación (6.57) es difícil de evaluar. Por ejemplo, si $X(z)$ e $Y(z)$ son funciones racionales, el integrando de 6.57 será una función complicada de $e^{j\omega}$ aún para sistemas sencillos. Sin embargo, la expresión (6.54) se puede calcular fácilmente aplicando el teorema de los residuos de Cauchy, como se muestra en el Ejemplo 6.20.

Un caso particular de (6.54) es cuando $x[n] = y[n]$, donde $x[n]$ es una sucesión real. En este caso la relación (6.54) toma la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)X(1/v)v^{-1}dv, \tag{6.58}$$

donde C es un contorno cerrado en la región de convergencia de $X(z)$. Como se mencionó más arriba, para que las sumatorias del miembro izquierdo sean finitas, la región de convergencia de $X(z)$ debe contener al círculo unitario.

La expresión (6.58) es una expresión de la energía de una sucesión $x[n]$ en función de su transformada $\mathcal{Z}$, y se suele aplicar para encontrar la potencia de ruido (debido al redondeo en las operaciones aritméticas) en la salida de filtros digitales. El siguiente ejemplo muestra el uso del teorema de los residuos de Cauchy para evaluar la ecuación (6.58).

EJEMPLO **6.20. Energía de una sucesión en base a la relación de Parseval**
Sea $x[n]$ una sucesión derecha con transformada $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})},$$

donde $|a| < |b| < 1$. Entonces, la región de convergencia de $X(z)$ es $|z| > |b|$. Para calcular la integral de contorno en (6.58) es necesario calcular $X(v) = X(z)|_{z=v}$, que está dada por

$$X(v) = \frac{1}{(1-av^{-1})(1-bv^{-1})} = \frac{v^2}{(v-a)(v-b)},$$

y cuya región de convergencia es $|v| > |b|$, que tiene un cero doble en el origen y un polo en $v = a$ y otro en $v = b$, como se muestra en la Fig. 6.8(a). También es necesario calcular $X(v^{-1}) = X(z)|_{z=v^{-1}}$,

$$X(v^{-1}) = \frac{1}{(1-av)(1-bv)} = \frac{1}{ab}\frac{1}{(v-1/a)(v-1/b)},$$

que tiene un cero doble en infinito, y polos en $v = 1/a$ y en $v = 1/b$, donde por hipótesis,$1 < 1/|b| < 1/|a|$. La región de convergencia es entonces $|v| < 1/|b|$, que naturalmente se solapa con la región de convergencia de $X(v)$, como se representa en la Fig. 6.8(b). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)X(1/v)v^{-1}dv \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{v^2}{(v-a)(v-b)}\frac{1}{ab}\frac{1}{(v-1/a)(v-1/b)}v^{-1}dv \end{aligned} \tag{6.59}$$

donde C es un contorno de integración contenido en la intersección de las regiones de convergencia de $X(v)$ y de $X(v^{-1})$, es decir, en el anillo $|b| < |z| < |b|^{-1}$, representado en la Fig. 6.8(c) . Para calcular la integral de (6.59) los únicos polos rodeados por la curva C son los polos en $v = a$ y en $v = b$, de modo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{v^2}{(v-a)(v-b)}\frac{1}{ab}\frac{1}{(v-\frac{1}{a})(v-\frac{1}{b})}v^{-1}dv \\ &= \text{Res}\left\{\frac{1}{ab}\frac{v}{(v-a)(v-b)(v-\frac{1}{a})(v-\frac{1}{b})} \text{ en } z=a\right\} + \\ &\quad \text{Res}\left\{\frac{1}{ab}\frac{v}{(v-a)(v-b)(v-\frac{1}{a})(v-\frac{1}{b})} \text{ en } z=b\right\} \\ &= \frac{1}{ab}\frac{a}{(a-b)(a-\frac{1}{a})(a-\frac{1}{b})}+\frac{1}{ab}\frac{b}{(b-a)(b-\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b})} = \frac{1+ab}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)}\end{aligned} \tag{6.60}$$

Este resultado también puede obtenerse en el dominio temporal. La transformada $X(z)$ también puede escribirse como

$$\begin{aligned}X(z) &= \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{1}{1-b/a}\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-a/b}\frac{1}{1-bz^{-1}} \\ &= \frac{-a}{b-a}\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{b}{b-a}\frac{1}{1-bz^{-1}},\end{aligned}$$

de modo que

$$x[n] = \frac{-a}{b-a}a^n u[n] + \frac{b}{b-a}b^n u[n].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}x^2[n] &= \left(\frac{-a}{b-a}a^n u[n] + \frac{b}{b-a}b^n u[n]\right)^2 \\ &= \left(\frac{a^2}{(b-a)^2}a^{2n} - \frac{2ab}{(b-a)^2}a^n b^n + \frac{b^2}{(b-a)^2}b^{2n}\right)u[n],\end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{(b-a)^2}a^{2n} - \frac{2ab}{(b-a)^2}a^n b^n + \frac{b^2}{(b-a)^2}b^{2n}\right) \\ &= \frac{a^2}{(b-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(a^2)^n - \frac{2ab}{(b-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(ab)^n + \frac{b^2}{(b-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(b^2)^n \\ &= \frac{a^2}{(b-a)^2}\frac{1}{1-a^2} - \frac{2ab}{(b-a)^2}\frac{1}{1-ab} + \frac{b^2}{(b-a)^2}\frac{1}{1-b^2} \\ &= \frac{1+ab}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)}\end{aligned} \tag{6.61}$$

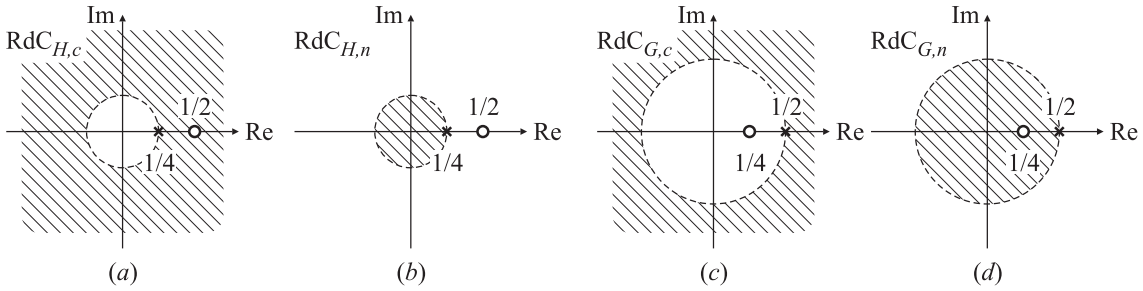


Fig. 6.9. Regiones de convergencia de $H(z)$ causal (a) y no causal (b), y del sistema inverso $G(z)$ causal (c) y no causal (d).

resultado que, naturalmente, coincide con (6.60). En este ejemplo la dificultad de calcular la energía en el dominio temporal o transformado es más o menos equivalente; sin embargo, para sistemas de mayor orden, la complejidad del cálculo en el dominio temporal crece con el orden, mientras que el desarrollo de los cómputos en el dominio transformado se limitan a calcular más residuos. □

6.6. Sistemas inversos

Dado un sistema cualquiera con respuesta impulsiva $h[n]$, el sistema inverso (si existe) tiene una respuesta impulsiva $g[n]$ tal que

$$h[n] * g[n] = \delta[n].$$

El cálculo de $g[n]$ a partir de $h[n]$ se denomina *deconvolución*, y es difícil de computar en el dominio temporal. El empleo de la transformada $\mathcal{Z}$ facilita su obtención como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO **6.21. Sistema inverso**
Se desea calcular el sistema inverso del sistema

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = 2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Hasta aquí el sistema está "mal definido" porque no se consigna su región de convergencia. El propósito del ejemplo es analizar la existencia o no del sistema inverso $G(z)$ para distintas "versiones" de $H(z)$.

Como se muestra en la Fig. 6.9, $H(z)$ tiene dos regiones de convergencias posibles:

- RdC$_{H,c}$: $|z| > 1/4$, correspondiente a un sistema *causal*, como se muestra en la Fig. 6.9(a)
- RdC$_{H,c}$: $|z| < 1/4$, asociada a un sistema *no causal*, representada en la Fig. 6.9(b).

Las respuestas impulsivas en cada caso están dadas por

$$h_c[n] = 2\delta[n] - \frac{1}{4^n}u[n] \text{ (causal)}, \qquad h_n[n] = 2\delta[n] + \frac{1}{4^n}u[-n-1] \text{ (no causal)}.$$

La función de sistema $G(z)$ del sistema inverso es

$$G(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}},$$

y de acuerdo a las regiones de convergencia de la transformada las respuestas impulsivas asociadas a cada sistema son:

1. $g_c[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}u[n]$, para la región de convergencia causal RdC$_{G,c}$: $|z| > 1/2$ que se muestran en la Fig. 6.9(c) ;
2. $g_n[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}u[-n-1]$ para la región de convergencia no causal RdC$_{G,c}$: $|z| < 1/2$ ilustrada en la Fig. 6.9(d) .

A continuación se analizan los posibles sistemas inversos de $H(z)$ según sea éste causal o no.

- $H(z)$ es causal, y su respuesta impulsiva es $h_c[n] = 2\delta[n] - \frac{1}{4^n}u[n]$. En este caso, la región de convergencia de $H(z)$ [Fig. 6.9(a)] se solapa con cualquiera de las dos posibles regiones de convergencia de $G(z)$ [Fig. 6.9(c) o (d)],lo que indica que $H(z)$ tiene dos sistemas inversos: un sistema inverso causal, definido por la respuesta impulsiva

$$g_c[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}u[n],$$

  y otro no causal, determinado por la respuesta impulsiva

$$g_n[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}u[-n-1].$$

- $H(z)$ *no* es causal [Fig. 6.9(b)], y su respuesta impulsiva es $h_n[n] = 2\delta[n] + \frac{1}{4^n}u[-n-1]$. En este caso, la región de convergencia de $H(z)$ sólo se solapa con la región de convergencia correspondiente a una $G(z)$ no causal [Fig. 6.9(d)], de modo que el sistema sólo admite una inversa *no* causal, cuya respuesta impulsiva es

$$g_n[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}u[-n-1].$$

Es interesante revisar que los sistemas $g_c[n]$, $g_n[n]$ son efectivamente los inversos de $h_c[n]$, y que $g_n[n]$ es el inverso de $h_n[n]$. La manera más "convincente" pero más laboriosa es verificar que:

- **Caso (a):** $x[n] = h_c[n] * g_c[n] = \delta[n]$ (sistema causal con inversa causal)
  En este caso, como ambas respuestas son causales, se tiene que

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \sum_{k=0}^{n} h_c[k]g_c[n-k], & n \geq 0. \end{cases}$$

  Resulta entonces (para $n \geq 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} h_c[k]g_c[n-k] &= \sum_{k=0}^{n}\left(2\delta[k] - \frac{1}{4^k}u[k]\right)\left(\frac{1}{2}\delta[n-k] + \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-k}}u[n-k]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\delta[k]\delta[n-k] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\delta[n-k] + \frac{1}{2^{n-k}}u[n-k]\delta[k] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{n-k}}u[k]u[n-k] \\ &= \delta[n] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{-k}} \end{aligned} \tag{6.62}$$

  Notando que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{-k}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

  la ecuación (6.62) se pues escribir como

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} h_c[k]g_c[n-k] &= \delta[n] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \delta[n] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n} = \delta[n]. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $x[n] = h_c[n] * g_c[n] = \delta[n]$ como se quería probar. △

- **Caso (b):** $y[n] = h_c[n] * g_n[n] = \delta[n]$ (sistema causal con inversa no causal)
  En este caso, como $h_c[n]$ es causal y $g_n[n]$ es no causal, se puede escribir

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} h_c[k] g_n[n-k], & n < 0, \\ \sum_{k=n}^{\infty} h_c[k] g_n[n-k], & n \geq 0. \end{cases}$$

  Se tiene entonces:

  1. Para $n < 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} h_c[k] g_n[n-k] &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(2\delta[k] - \frac{1}{4^k} u[k]\right) \left(\frac{1}{2}\delta[n-k] - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k]\delta[n-k] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\delta[n-k] - \frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1]\delta[k] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1] \\ &= \delta[n] - \frac{1}{2^n} u[-n-1] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1], \end{aligned} \tag{6.63}$$

     donde se ha tenido en cuenta en general que $u[k] = 1$ para $k \geq 0$, y en particular para el segundo término que $\delta[n-k] = 0$ pues $n < 0$ y $k \geq 0$. Teniendo en cuenta que el último término se puede escribir como

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{-k}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = \frac{1}{2^n} \end{aligned} \tag{6.64}$$

     donde $u[-n+k-1]$ porque $k \geq 0$ y $n < 0$. Reemplazando (6.64) en (6.63) y considerando que $u[-n-1] = 1$ y $\delta[n] = 0$ para $n < 0$, resulta que

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_c[k] g_n[n-k] = 0. \tag{6.65}$$

  2. Para $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} h_c[k] g_n[n-k] &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(2\delta[k] - \frac{1}{4^k} u[k]\right) \left(\frac{1}{2}\delta[n-k] - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1]\right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \delta[k]\delta[n-k] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\delta[n-k]u[k] - \frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1]\delta[k] \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1]u[k] \end{aligned} \tag{6.66}$$

     Teniendo en cuenta que, para $k \geq n \geq 0$, $\delta[n-k]u[k] = u[n] = 1$, $u[-n+k-1]\delta[k] = u[-n-1] = 0$ y $u[-n+k-1]u[k] = u[-n+k-1]$, y además

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{n-k}} u[-n+k-1]u[k] &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{-k}} u[-n+k-1] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} u[-n+k-1] = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\frac{(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{4^n}, \end{aligned}$$

la expresión (6.66), para $n > 0$, puede escribirse como

$$\sum_{k=n}^{\infty} h_c[k]g_n[n-k] = \delta[n] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} = \delta[n]. \tag{6.67}$$

Por lo tanto, combinando (6.65) y (6.67) se encuentra que $y[n] = h_c[n] * g_n[n] = \delta[n]$. △

- **Caso (c):** $z[n] = h_n[n] * g_c[n] = \delta[n]$ (sistema no causal con inversa no causal)
  En este caso, como $h_n[n]$ y $g_n[n]$ son no causales, se puede escribir

$$z[n] = \begin{cases} \sum_{k=n}^{0} h_c[k]g_n[n-k], & n < 0, \\ 1 & n = 0, \\ 0 & n > 0. \end{cases}$$

Entonces, para $n < 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{0} h_c[k]g_n[n-k] &= \sum_{k=n}^{0} \left(2\delta[k] + \frac{1}{4^k}u[-k-1]\right)\left(\frac{1}{2}\delta[n-k] - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-k}}u[-n+k-1]\right) \\ &= \sum_{k=n}^{0} \delta[k]\delta[n-k] - \frac{1}{2^{n-k}}u[-n+k-1]\delta[k] + \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}u[-k-1]\delta[n-k] \\ &\quad + \sum_{k=n}^{0} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{n-k}}u[-n+k-1]u[-k-1] \\ &= \delta[n] - \frac{1}{2^n}u[-n-1] + \frac{1}{2}\frac{1}{4^n}u[-n-1] \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=n}^{0} \frac{1}{2^k}u[-n+k-1]u[-k-1] \end{aligned} \tag{6.68}$$

Tomando en cuenta que

$$\sum_{k=n}^{0} \frac{1}{2^k}u[-n+k-1]u[-k-1] = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1/2-1}u[-n-2] = \left(-2 + \frac{1}{2^n}\right)u[-n-2]$$

la expresión (6.68) resulta (para $n < 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{0} h_c[k]g_n[n-k] &= -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\left(-2 + \frac{1}{2^n}\right)u[-n-2] \\ &= -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n}u[-n-2] - \frac{1}{2}\frac{1}{4^n}u[-n-2] = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, $z[n] = h_n[n] * g_c[n] = \delta[n]$ como se quería demostrar. △

Los desarrollos de los casos (a), (b) y (c) confirman que, efectivamente, $g_c[n]$ y $g_n[n]$ son dos posibles sistemas inversos de $h_c[n]$, y que $g_n[n]$ es el único sistema inverso de $h_n[n]$. □

En este ejemplo el sistema causal y estable $h_c[n]$ tiene dos sistemas inversos posibles: $g_c[n]$ que también es causal y estable, y $g_n[n]$ que no es estable ni causal. En las aplicaciones "en línea" o de tiempo real, sólo pueden utilizarse sistemas que sean causales y estables. En consecuencia, para aplicaciones de este tipo, sólo podrá utilizarse el sistema $g_c[n]$. Sin embargo, no todos los sistemas tienen sistemas inversos causales y estables, como muestra el siguiente ejemplo, y por lo tanto no podrán ser compensados en "tiempo real".

EJEMPLO **6.22. Sistema causal y estable que no tiene una inversa causal y estable**
El sistema caracterizado por

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > 1/4$$

tiene un polo en $z_p = 1/4$, y un cero en $z_c = 2$. El sistema inverso es

$$G(z) = H^{-1}(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}},$$

que tiene un polo en $z_p = 2$, y un cero en $z_c = 1/4$. Si se elige la región de convergencia $|z| > 2$, el sistema inverso será causal, pero no estable (porque la región de convergencia no contiene al círculo unitario). Por otra parte, si se elige la región de convergencia $|z| < 2$, el sistema inverso será estable, pero no causal. Por lo tanto, el sistema causal $H(z)$ no tiene una inversa que sea simultáneamente *causal* y *estable*. □

Los sistemas causales y estables que tienen inversas causales y estables se denominan *sistemas de fase mínima*, y serán estudiados más adelante. Los sistemas de fase mínima se pueden compensar exactamente en tiempo real; es decir, se puede encontrar una inversa $G(z)$ tal que $H(z)G(z) = 1$. Para los sistemas que no son de fase mínima, la compensación busca encontrar un sistema $C(z)$ tal que $|H(z)C(z)| = 1$.

EJEMPLO **6.23. Identificación de un sistema a partir de su entrada y su salida**
Se desea conocer la respuesta impulsiva $h[n]$ de un sistema que al ser excitado con la entrada

$$x[n] = (1/4)^n u[n] - u[-n-1]$$

que se representa en la Fig. 6.10(a) responde con la salida

$$y[n] = (1/2)^n u[n] - 2^n u[-n-1].$$

que se grafica en la Fig. 6.10(b) . Si $X(z)$, $Y(z)$ y $H(z)$ son las transformadas de $x[n]$, $y[n]$ y $h[n]$, resulta que

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{2(1 - \frac{5}{8}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad \text{RdC}_X : \tfrac{1}{4} < |z| < 1$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{2(1 - \frac{5}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad \text{RdC}_Y : \tfrac{1}{2} < |z| < 2$$

y por lo tanto,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(x)} = \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - \frac{5}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{5}{8}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}. \tag{6.69}$$

La clave está en determinar adecuadamente la región de convergencia de $H(z)$. Como $y[n] = x[n] * h[n]$, la región de convergencia de $x[n]$ y las de $h[n]$, que se muestran en la Fig. 6.10(c) y (d) , respectivamente, tienen que solaparse, y la propiedad establece que la región de convergencia de $Y(z)$ *contiene* a la región de convergencia de $X(z)H(z)$. Como $H(z)$ tiene tres polos (en $z_1 = 1/2$, $z_2 = 5/8$ y en $z_3 = 2$), las regiones de convergencia posibles son cuatro, representadas en la Fig. 6.11.

1. $\text{RdC}_{H,1} : |z| < 1/2$. Esta región no es compatible con la RdC_Y, y por lo tanto se descarta.

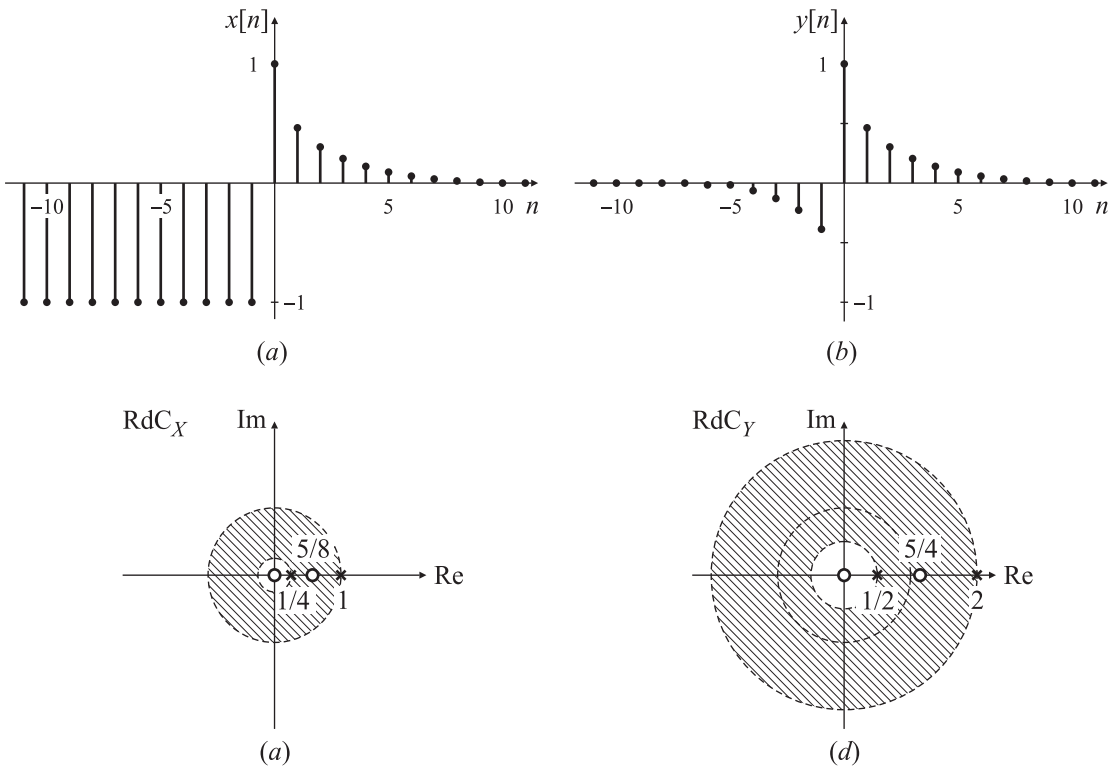


Fig. 6.10. Sucesiones $x[n]$ (a) e $y[n]$ (b) del Ejemplo 6.23 y sus regiones de convergencia RdC_X (c) y RdC_Y (d).

2. $\text{RdC}_{H,2} : 1/2 < |z| < 5/8$. Esta región se solapa parcialmente con RdC_X y con RdC_Y.
3. $\text{RdC}_{H,3} : 5/8 < |z| < 2$. Esta región se solapa parcialmente con RdC_X y con RdC_Y.
4. $\text{RdC}_{H,4} : |z| < 2$. Esta región no se solapa con RdC_X y por lo tanto no es admisible.

De las cuatro regiones especificadas, sólo dos son admisibles: la Región 2 ($\text{RdC}_{H,2} : 1/2 < |z| < 5/8$) y la Región 3 ($\text{RdC}_{H,3} : 5/8 < |z| < 2$) Esto significa que hay *dos* sistemas inversos posibles: uno no causal e inestable, caracterizado por la región de convergencia $\text{RdC}_{H,2}$ y otro no causal, pero estable, cuya región de convergencia es $\text{RdC}_{H,3}$.

Para calcular cada una de las respuesta impulsivas conviene expresar la función de sistema $H(z)$ de la ecuación (6.69) en fracciones parciales. Se tiene que

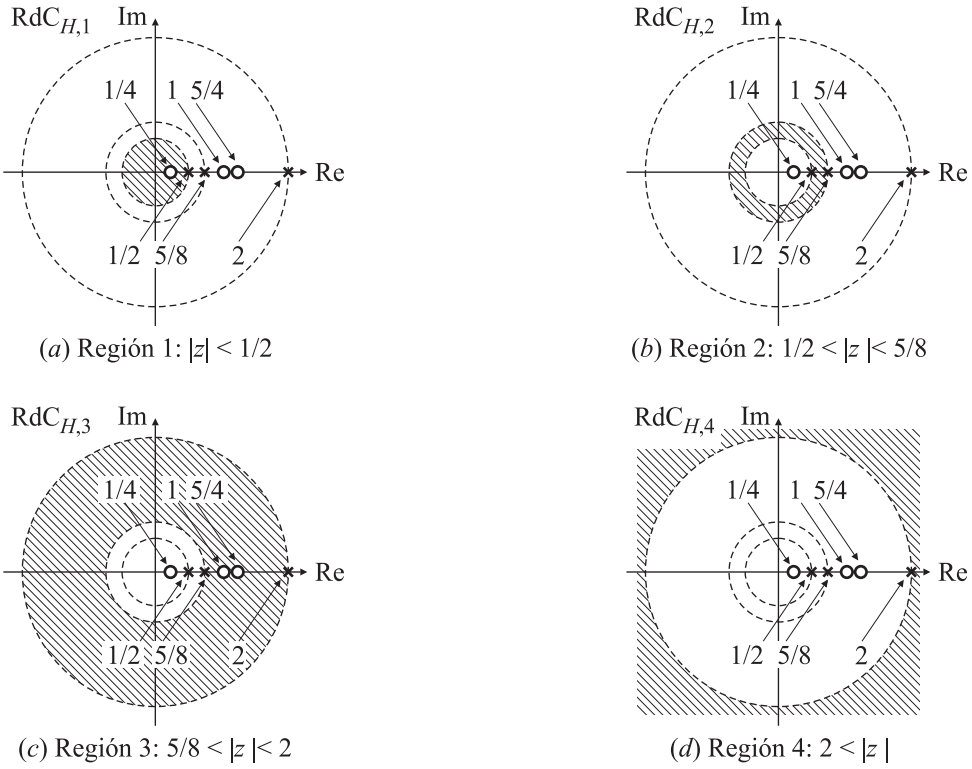
$$H(z) = \frac{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})(1-\frac{5}{4}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{5}{8}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{-\frac{5}{16}z^{-3}+\frac{29}{16}z^{-2}-\frac{5}{2}z^{-1}+1}{-\frac{5}{8}z^{-3}+\frac{41}{16}z^{-2}-\frac{25}{8}z^{-1}+1} \tag{6.70}$$

Como el numerador y el denominador son polinomios de igual orden es necesario hacer la división:

$$\begin{array}{r|l} -\frac{5}{16}z^{-3}+\frac{29}{16}z^{-2}-\frac{5}{2}z^{-1}+1 & -\frac{5}{8}z^{-3}+\frac{41}{16}z^{-2}-\frac{25}{8}z^{-1}+1 \\ \hline -\frac{5}{16}z^{-3}+\frac{41}{32}z^{-2}-\frac{25}{16}z^{-1}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{17}{32}z^{-2}-\frac{15}{16}z^{-1}+\frac{1}{2} & \end{array}$$

de modo que

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{17}{32}z^{-2}-\frac{15}{16}z^{-1}+\frac{1}{2}}{-\frac{5}{8}z^{-3}+\frac{41}{16}z^{-2}-\frac{25}{8}z^{-1}+1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{17}{32}z^{-2}-\frac{15}{16}z^{-1}+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{5}{8}z^{-1})(1-2z^{-1})}.$$



(a) Región 1: $|z| < 1/2$ (b) Región 2: $1/2 < |z| < 5/8$

(c) Región 3: $5/8 < |z| < 2$ (d) Región 4: $2 < |z|$

Fig. 6.11. Posibles regiones de convergencia de la función de sistema $H(z)$ del Ejemplo 6.23.

Esta expresión puede escribirse como

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{A_0}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{A_1}{(1-\frac{5}{8}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-2z^{-1})},$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= H(z)(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=1/2} = \left.\frac{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})(1-\frac{5}{4}z^{-1})}{(1-\frac{5}{8}z^{-1})(1-2z^{-1})}\right|_{z=1/2} = 1, \\ A_1 &= H(z)(1-\tfrac{5}{8}z^{-1})\Big|_{z=5/8} = \left.\frac{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})(1-\frac{5}{4}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}\right|_{z=1/2} = -\frac{9}{11}, \\ A_2 &= H(z)(1-2z^{-1})\Big|_{z=2} = \left.\frac{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})(1-\frac{5}{4}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{5}{8}z^{-1})}\right|_{z=2} = \frac{7}{22}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} - \frac{9}{11}\frac{1}{(1-\frac{5}{8}z^{-1})} + \frac{7}{22}\frac{1}{(1-2z^{-1})}.$$

A partir de esta expresión es sencillo calcular las transformadas inversas:

1. Para RdC$_{H,2}$: $1/2 < |z| < 5/8$, el polo en $z = 1/2$ está asociado a la región de convergencia formada por el exterior de un círculo, y corresponden entonces a una sucesión derecha. La región de convergencia de los otros dos polos (en $z = 5/8$ y $z = 2$) es el interior de un círculo, y por lo tanto corresponden a sucesiones izquierdas. Por lo tanto, la respuesta impulsiva es

$$h_{\text{RdC2}}[n] = \tfrac{1}{2}\delta[n] + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \tfrac{9}{11}\left(\tfrac{5}{8}\right)^n u[-n-1] - \tfrac{7}{22}(2)^n u[-n-1]. \qquad (6.71)$$

que caracteriza a un sistema que es *no causal* e *inestable*.

2. Para RdC$_{H,3}$: $5/8 < |z| < 2$, tanto el polo en $z = 1/2$ como el polo en $z = 5/8$ están en el interior del anillo de convergencia, y por lo tanto corresponden a sucesiones derechas, mientras que el polo en $z = 2$ corresponde a una sucesión izquierda. La respuesta impulsiva es entonces

$$h_{\text{RdC3}}[n] = \tfrac{1}{2}\delta[n] + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \tfrac{9}{11}\left(\tfrac{5}{8}\right)^n u[n] - \tfrac{7}{22}(2)^n u[-n-1]. \tag{6.72}$$

que caracteriza a un sistema *no causal* y *estable*.

La ecuación de sistema (6.70) está asociada a la ecuación a diferencias

$$y[n] - \frac{25}{8}y[n-1] + \frac{41}{16}y[n-2] - \frac{5}{8}y[n-3] = x[n] - \frac{5}{2}x[n-1] + \frac{29}{16}x[n-2] - \frac{5}{16}x[n-3]. \tag{6.73}$$

Para obtener cada una de las respuestas impulsivas (6.71-6.72) es necesario dar un conjunto de condiciones iniciales para (6.73). Como la parte recursiva del sistema es de tercer orden se deben dar *tres* condiciones iniciales; la forma más sencilla es evaluar tres términos de $h_{\text{RdC2}}[n]$, $h_{\text{RdC3}}[n]$, respectivamente. Evaluando por ejemplo en $n = -1, -2, -3$, se encuentra que

n	$h_{\text{RdC2}}[n]$
-1	$\frac{23}{20} \cong 1{,}15$
-2	$\frac{403}{200} \cong 2{,}015$
-3	$\frac{6623}{2000} \cong 3{,}115$

n	$h_{\text{RdC3}}[n]$
-1	$-\frac{7}{44} \cong -0{,}159091$
-2	$-\frac{7}{88} \cong -0{,}079545$
-3	$-\frac{7}{176} \cong -0{,}039772$

Entonces, la ecuación a diferencias (6.73) con las condiciones iniciales $y[-1] = 23/20$, $y[-2] = 403/200$, e $y[-3] = 6623/2000$ resulta en la respuesta impulsiva $h_{\text{RdC2}}[n]$ dada por la ecuación (6.71), mientras que la misma ecuación con las condiciones iniciales $y[-1] = -7/44$, $y[-2] = -7/88$, e $y[-3] = -7/176$ genera la respuesta impulsiva $h_{\text{RdC3}}[n]$ indicada por (6.72).

Nuevamente, es instructivo (aunque *muy* tedioso) revisar que la convolución de la señal $x[n] = (1/4)^n u[n] - u[-n-1]$ con cualquiera de las respuestas impulsivas $h_{\text{RdC2}}[n]$, $h_{\text{RdC3}}[n]$ dadas por (6.71-6.72), respectivamente, resultan en la *misma* salida $y[n] = (1/2)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$. Esta verificación se puede hacer en Mathematica siguiendo la secuencia de comandos que se lista a continuación.

```
In[1]:= (* señal de entrada *)
        x[n_] := (1 / 4)^n UnitStep[n] - UnitStep[-n - 1];
        (* señal de salida *)
        y[n_] := (1 / 2)^n UnitStep[n] - 2^n UnitStep[-n - 1];


        (* respuesta impulsiva no causal, no estable *)
        h1[n_] := (1 / 2) DiscreteDelta[n] + (1 / 2)^n UnitStep[n] +
            (9 / 11) (5 / 8)^n UnitStep[-n - 1] - (7 / 22) 2^n UnitStep[-n - 1];
        (* convolución de x[n] con h1[n] *)
        yc1 = Sum[x[k] h1[n - k], {k, -Infinity, Infinity}];
        (* comparación de y[n] con yc1 para -10 ≤ n ≤ 10 *)
        Table[yc1 - y[n], {n, -10, 10}]
Out[5]= {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}


        (* respuesta impulsiva no causal, estable *)
        h2[n_] := (1 / 2) DiscreteDelta[n] + (1 / 2)^n UnitStep[n] -
            (9 / 11) (5 / 8)^n UnitStep[n] - (7 / 22) 2^n UnitStep[-n - 1];
        (* convolución de x[n] con h2[n] *)
        yc2 = Sum[x[k] h2[n - k], {k, -Infinity, Infinity}];
        (* comparación de y[n] con yc1 para -10 ≤ n ≤ 10 *)
        Table[yc2 - y[n], {n, -10, 10}]
Out[8]= {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Para verificar que $y_{c1}[n] = x[n] * h_{\mathsf{RdC2}}[n]$ coincide con $y[n]$ se calculan los valores de ambas respuestas para $-10 \leq n \leq 10$ usando el comando `Table[ ]`. Lo mismo se hace con la respuesta $y_{c2}[n] = x[n] * h_{\mathsf{RdC3}}[n]$. Las respuestas impulsivas $h_{\mathsf{RdC2}}[n]$, $h_{\mathsf{RdC3}}[n]$ se representan en la Fig. 6.12(a) y (b), respectivamente. □

6.7. Referencias

Churchill, R. V., Brown, J. W. *Variable compleja y aplicaciones*, 5ta. ed., McGraw-Hill, Madrid, 1992.

Mathews J. H., Howell, R. W., *The complex analysis project*,
`http://math.fullerton.edu.mathews/c2003/ComplexPowerSeriesMod.html`

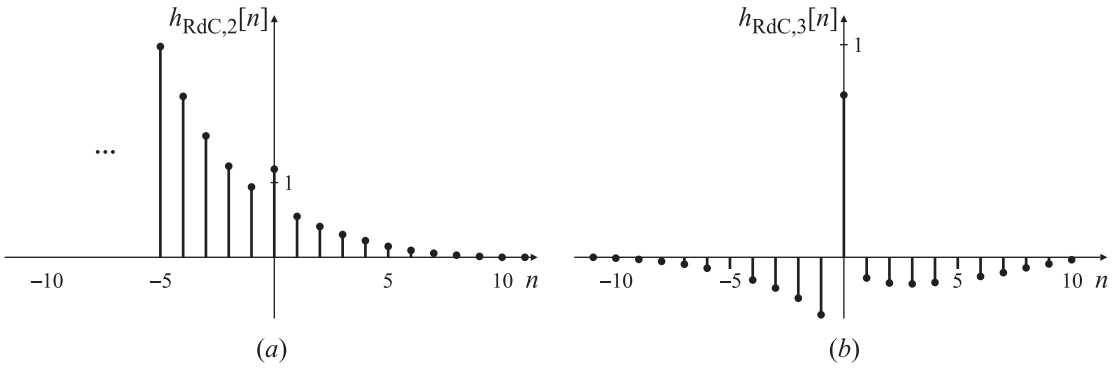


Fig. 6.12. Respuestas impulsivas no causal e inestable (a) y no causal y estable (b) compatibles con la entrada $x[n]$ y la salidas $y[n]$ del sistema del Ejemplo 6.23.

6.8. Tabla de transformadas $\mathcal{Z}$

	sucesión	transformada	RdC
1.	$\delta[n]$	1	todo el plano z
2.	$\delta[n-m]$	z^{-m}	todo z salvo 0 (si $m>0$) o ∞ (si $m<0$)
3.	$a^n(u[n]-u[n-N])$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$
4.	$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
5.	$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6.	$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
7.	$(n+1)\,a^n u[n]$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8.	$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
9.	$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
10.	$\cos(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{1-\cos\omega_0\, z^{-1}}{1-2\cos\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11.	$\operatorname{sen}(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{\operatorname{sen}\omega_0\, z^{-1}}{1-2\cos\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
12.	$\operatorname{sen}(\omega_0 n+\phi)\,u[n]$	$\dfrac{\operatorname{sen}\phi+\operatorname{sen}(\omega_0-\phi)\, z^{-1}}{1-2\cos\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
13.	$r^n\cos(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{1-r\cos\omega_0\, z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0\, z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
14.	$r^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{r\operatorname{sen}\omega_0\, z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0\, z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
15.	$\cosh(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{1-\cosh\omega_0\, z^{-1}}{1-2\cosh\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
16.	$\operatorname{senh}(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{\operatorname{senh}\omega_0\, z^{-1}}{1-2\cosh\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$

	sucesión	transformada	RdC
17.	$\frac{1}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
18.	$\frac{1-a^n}{n}u[n]$	$\ln\left(\frac{a^{-1}-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
19.	$\frac{\cos(\omega_0 n)}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
20.	$\frac{(-1)^n\cos(\omega_0 n)}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\cos\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
21.	$\frac{\operatorname{sen}(\omega_0 n)}{n}u[n]$	$\omega_0 + \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\omega_0\, z^{-1}}{1-\cos\omega_0 z^{-1}}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
22.	$\frac{(-1)^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)}{n}u[n]$	$\omega_0 + \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\omega_0\, z^{-1}}{1+\cos\omega_0 z^{-1}}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
23.	$\frac{\cos(\omega_0 n)}{n!}u[n]$	$e^{\cos\omega_0 z^{-1}}\cos(\operatorname{sen}\omega_0\, z^{-1})$	$\lvert z\rvert > 1$
24.	$\frac{\operatorname{sen}(\omega_0 n)}{n!}u[n]$	$e^{\cos\omega_0 z^{-1}}\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\omega_0\, z^{-1})$	$\lvert z\rvert > 1$
25.	$\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)u[n+1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}\ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
26.	$\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\right)u[n]$	$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}e^{z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
27.	$\frac{1+(-1)^n}{2}a^n u[n]$	$\frac{1}{1-a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
28.	$\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$	$\frac{\pi}{2}+\arctan(z^{-1})$	$\lvert z\rvert > 1$
29.	$a^n\cos(\pi n)u[n]$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
30.	$a^n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$	$\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

6.8.1. Transformadas de sucesiones $n^r a^n u[n]$ o $-n^r a^n u[n]$

	sucesión	transformada
1.	$\left.\begin{array}{ll} na^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -na^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
2.	$\left.\begin{array}{ll} n^2a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^2a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^3}(1+az^{-1})$
3.	$\left.\begin{array}{ll} n^3a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^3a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^4}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})$
4.	$\left.\begin{array}{ll} n^4a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^4a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^5}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})$
5.	$\left.\begin{array}{ll} n^5a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^5a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^6}(1+26az^{-1}+66a^2z^{-2}+26a^3z^{-3}+a^4z^{-4})$
6.	$\left.\begin{array}{ll} n^6a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^6a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^7}(1+57az^{-1}+302a^2z^{-2}$ $+302a^3z^{-3}+57a^4z^{-4}+a^5z^{-5})$
7.	$\left.\begin{array}{ll} n^7a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^7a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^8}(1+120az^{-1}+1191a^2z^{-2}+2416a^3z^{-3}$ $+1191a^4z^{-4}+120a^5z^{-5}+a^6z^{-6})$
8.	$\left.\begin{array}{ll} n^8a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^8a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^9}(1+247az^{-1}+4293a^2z^{-2}+15619a^3z^{-3}$ $+15619a^4z^{-4}+4293a^5z^{-5}+247a^6z^{-6}+a^7z^{-7})$
9.	$\left.\begin{array}{ll} n^9a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^9a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{10}}(1+502az^{-1}+14608a^2z^{-2}+88234a^3z^{-3}$ $+156190a^4z^{-4}+88234a^5z^{-5}+14608a^6z^{-6}$ $+502a^7z^{-7}+a^8z^{-8})$
10.	$\left.\begin{array}{ll} n^{10}a^n u[n], & \lvert z\rvert > \lvert a\rvert \\ -n^{10}a^n u[-n-1], & \lvert z\rvert < \lvert a\rvert \end{array}\right\}$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{11}}(1+1013az^{-1}+47\,840a^2z^{-2}$ $+455\,192a^3z^{-3}+1\,310\,354a^4z^{-4}+1\,310\,354a^5z^{-5}$ $+455\,192a^6z^{-6}+47\,840a^7z^{-7}+1013a^8z^{-8}+a^9z^{-9})$

6.8.2. Transformadas inversas de polos múltiples

	transformada	RdC	sucesión
1.	$\frac{1}{(1-az^{-1})}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$a^n u[n]$
2.		$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$-a^n u[-n-1]$
3.	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$(n+1)\,a^n u[n]$
4.		$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$-(n+1)\,a^n u[-n-1]$
5.	$\frac{1}{(1-az^{-1})^3}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\,a^n u[n]$
6.		$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$-\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\,a^n u[-n-1]$
7.	$\frac{1}{(1-az^{-1})^4}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$-\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)\,a^n u[n]$
8.		$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)\,a^n u[-n-1]$
9.	$\frac{1}{(1-az^{-1})^N}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$\frac{1}{(N-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+N-1)\,a^n u[n]$
10.		$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$-\frac{1}{(N-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+N-1)\,a^n u[-n-1]$

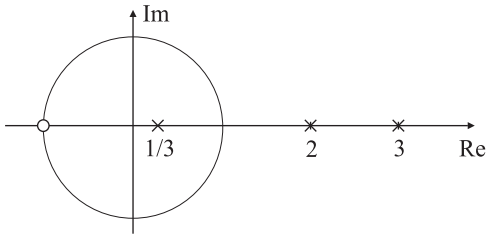
6.9. Ejercicios

Ejercicio 1. Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ y la región de convergencia de cada una de las siguientes sucesiones, usando la definición.

1. $(1/2)^n u[n]$.
2. $(1/2)^n (u[n] - u[n-10])$.
3. $-(1/2)^n u[-n-1]$.
4. $\delta[n+1]$.
5. $(1/2)^n u[-n]$.
6. $a^n u[n] + b^n u[-n-1]$.

Ejercicio 2. Si los polos y ceros de $X(z)$ están distribuidos como se muestra en la figura,

1. Especifique la región de convergencia de $X(z)$ si se sabe que existe la transformada de Fourier. Para este caso, determine si la sucesión es derecha, izquierda o bilátera.
2. ¿Cuántas sucesiones biláteras se pueden asociar al diagrama de polos y ceros?
3. ¿Es posible que la gráfica de polos y ceros esté asociada a una sucesión que sea estable y causal? En caso afirmativo, indique cuál es la región de convergencia.



Ejercicio 3. Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ de las siguientes señales aplicando propiedades. Resuelva también el inciso (3) aplicando la definición, y compare las regiones de convergencia que se obtienen en cada caso.

1. $x[n] = [3(2^n) - 4(3^n)]\, u[n]$.
2. $x[n] = (a^n \cos \omega_0 n)\, u[n]$.
3. $x[n] = u[n] - u[n-N]$.
4. $x[n] = u[-n]$.
5. $x[n] = n\, a^n u[n]$.

Ejercicio 4. Encuentre la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de las siguientes funciones, empleando el método de la serie de potencias o la expansión en fracciones parciales.

1. $X(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$.
2. $X(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$.
3. $X(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}{1 + \frac{1}{4} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$.
4. $X(z) = \dfrac{1 - a\, z^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > \frac{1}{a}$.

Ejercicio 5. Demuestre que si $X(z)$ es la transformada $\mathcal{Z}$ de $x[n]$, entonces:

1. $z^{n_0} X(z) \leftrightarrow x[n + n_0]$.
2. $X\left(a^{-1} z\right) \leftrightarrow a^n x[n]$.
3. $-z X'(z) \leftrightarrow n\, x[n]$.

Ejercicio 6. Si $x[n]$ es una sucesión causal ($x[n] = 0$ si $n < 0$), y $x[0] \neq 0$, demuestre que:

1. $X(z)$ no tienen polos ni ceros en $z = \infty$: el $\lim_{z\to\infty} X(z)$ es no nulo y finito.
2. hay el mismo número de polos y de ceros en el plano $\mathcal{Z}$ (excluído $z = \infty$).

Ejercicio 7. Especifique las regiones de convergencia de las siguientes funciones, y calcule todas las transformadas $\mathcal{Z}$ inversas posibles.

1. $X(z) = \dfrac{z+1}{z^2\,(z-1)}$.
2. $X(z) = \dfrac{z^3+2z^2+z+1}{(z-2)^2\,(z+3)}$.

Ejercicio 8. Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de las siguientes funciones, aplicando los métodos sugeridos.

1. $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$, (división larga, $x[n]$ es una sucesión derecha.)
2. $X(z) = \dfrac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$, (fracciones parciales, $x[n]$ es estable.)
3. $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{4}$, (división larga.)
4. $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$, $|z| < \frac{1}{4}$, (división larga.)
5. $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$, $|z| > \frac{1}{2}$, (por tablas.)

Ejercicio 9. Resuelva las siguientes transformadas $\mathcal{Z}$ inversas.

1. $X(z) = \dfrac{3z^{-3}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}$, $x[n]$ es izquierda.
2. $X(z) = \log(1+az^{-1}), |z| > |a|$.
3. $X(z) = \operatorname{sen}(z)$.
4. $X(z) = \dfrac{z^7-2}{1-z^{-7}}$, $|z| > 1$.

Ejercicio 10. Para cada una de las siguientes sucesiones, calcule la transformada $\mathcal{Z}$ y la región de convergencia. Esboce el diagrama de polos y ceros.

1. $x[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1]$, $|a| < |b| < |c|$.
2. $x[n] = n^2 a^n u[n]$.
3. $x[n] = e^{n^4}\left(\cos\frac{\pi}{12}n\right)u[n] - e^{n^4}\left(\cos\frac{\pi}{12}n\right)u[n-1]$.

Ejercicio 11. Determine cuál de las siguientes transformadas $\mathcal{Z}$ no corresponde a una sucesión causal.

1. $X(z) = \dfrac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^4}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^3}$ 2. $X(z) = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$ 3. $X(z) = \dfrac{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^3}$

Ejercicio 12. Dentro de un reactor nuclear interactúan dos tipos de partículas. Cada segundo, una partícula α se divide en ocho partículas β, y una partícula β se divide en una partícula α y dos partículas β.

1. Verifique que en el n-ésimo instante de tiempo el número de partículas es

$$\begin{aligned} \alpha[n] &= \beta[n-1], \\ \beta[n] &= 2\beta[n-1] + 8\beta[n-2] + 8\delta[n-1],\ n \geq 1. \end{aligned}$$

2. Si en el tiempo inicial $t = 0$ hay en el reactor una única partícula α, ¿cuántas partículas α y cuántas partículas β hay en $t = 100$?

Ejercicio 13. Un préstamo de $p = 100000$ \$ se debe amortizar en 360 cuotas mensuales de c pesos. El interés, acumulado mensualmente, se computa a razón de $\rho = 10\,\%$ por año sobre el saldo deudor: por ejemplo, después del primer mes (y justo antes del primer pago), la deuda total es $y[1] = 100000 + \frac{0{,}10}{12}100000$.

1. Verifique que el balance en el n-ésimo mes es

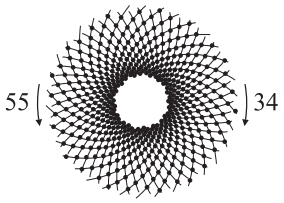
$$y[n] = (1 + \beta)y[n-1] - cu[n-1] + p\delta[n],\ n \geq 1.$$

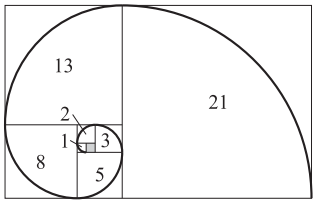
2. Calcule el monto p de la cuota de manera de cancelar la deuda en 30 años, dejando un balance neto nulo.

Ejercicio 14. La sucesión de Fibonacci generalizada satisface la ecuación a diferencias

$$x[n+2] = x[n+1] + x[n],\ n \geq 0,$$

es decir, que el valor actual es la suma de los dos valores previos. La sucesión clásica se cita por vez primera en el *Liber abaci*, publicado en 1202 por el comerciante y matemático italiano Leonardo de Pisa, o Fibonacci (*figlio dei Bonacci*), y se obtiene cuando las condiciones iniciales son $x[0] = 0$ y $x[1] = 1$. Esta sucesión aparece en un sinnúmero de problemas aparentemente no relacionados, como la impedancia de entrada de una red resistiva en escalera, la separación de los brotes en las ramas de los árboles, el número de pétalos de las flores (las lilas tienen 3, los ranúnculos 5, las caléndulas 13, los ásteres 21, y la mayoría de las margaritas 34, 55, u 89; las semillas de girasol están dispuestas sobre dos familias de espirales entrelazadas, 34 en sentido horario y 55 en sentido antihorario, como se muestra en la figura, aunque según la familia pueden ser 34 y 55, 55 y 89 u 89 y 144), etc. La espiral equiangular, formada por cuartos de círculos cuyos radios crecen según la serie de Fibonacci reproduce el aspecto de los caracoles.

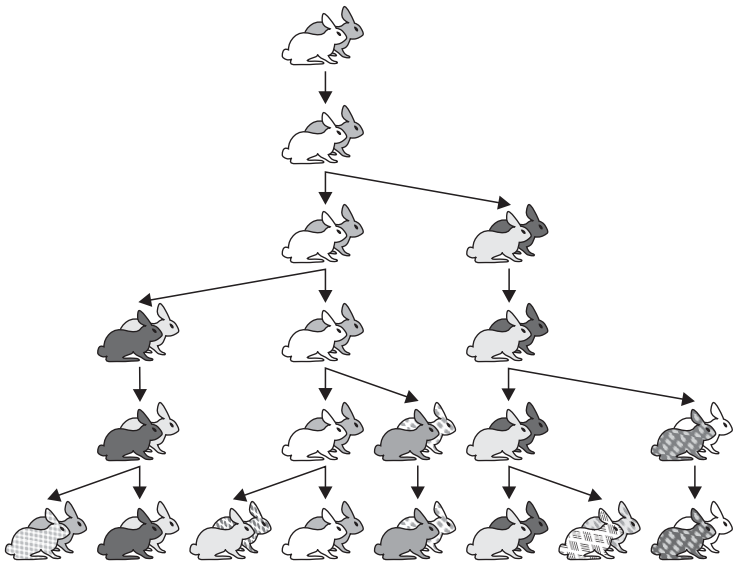






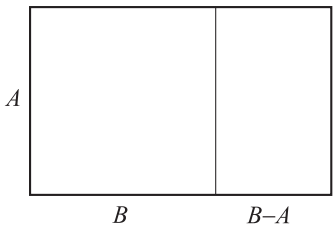
Sin duda el ejemplo más conocido, aunque más inexacto, es el cálculo del número total de parejas de conejos en un determinado número de meses, sabiendo que cada pareja pare una nueva pareja cada mes, que la pareja nueva puede tener descendencia a partir de los dos meses de edad, y que ningún conejo muere. De esta forma,

- Al finalizar el primer mes, la pareja se aparea (pero todavía no tiene descendencia).
- Al fin del segundo mes, la hembra parió una nueva pareja, de modo que hay dos parejas.
- Al final del tercer mes, la primera hembra tiene otra camada, de modo que hay 3 parejas.
- Al finalizar el cuarto mes, la primera hembra tiene su segunda cría, y la segunda tiene su primera descendencia, totalizando 5 parejas.
- etc.

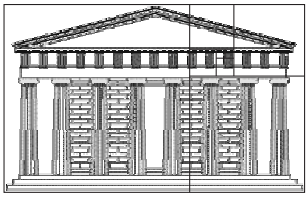


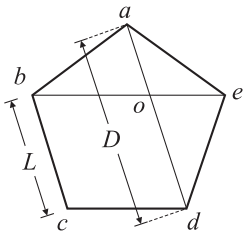
mes	parejas
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8

1. Encuentre una expresión en forma cerrada para $x[n]$.
2. Demuestre que la relación $x[n]/x[n+1]$ tiende al límite $\phi = 2/(1+\sqrt{5})$ cuando $n \to \infty$. Este número se conoce como *sección dorada, divina proporción*, o *proporción áurea* y según los griegos era la relación entre los lados del rectángulo de aspecto más agradable (la altura, ancho y largo del Partenon siguen esta proporción). La figura muestra otras construcciones geométricas donde aparece la sección dorada: en un pentágono regular, el cociente entre la longitud de las diagonales y los lados, o el cociente entre los segmentos en que se forman en una diagonal al ser cortada por otra es igual a ϕ. Se verifica que $1/\phi = \phi - 1$. (La elección de ϕ -phi- como nombre de esta constante es en homenaje a Fidias, escultor y arquitecto griego)



$$\phi \doteq \frac{B}{A} = \frac{A}{B-A}$$





$$\phi \doteq \frac{D}{L} = \frac{be}{bo}$$

3. Muestre que la sucesión de Fibonacci satisface las siguientes propiedades:
   a) $(x[n])^2 + (x[n+1])^2 = x[2n+1]$.
   b) $(x[n+2])^2 - (x[n+1])^2 = x[n]x[n+3]$.

Referencias:

La Fibonacci Association (`http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/`) fue fundada en California en 1962 para incentivar el interés en los números de Fibonacci y tópicos relacionados, y publica desde 1963 *The Fibonacci Quaterly*. Otros artículos de interés sobre los números de Fibonacci y la sección áurea son:

1. Bubnicki, Z., "Input Impedance and Transfer Function of a Ladder Network," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 10, No. 2, Jun 1963, pp. 286-287.

2. Hill Jr., F., "Gentle diversions: Phi–A precious jewel," *IEEE Communications Magazine*, Vol. 16, No. 5, Sep 1978, pp.35-37.

3. Mack, D. R., "The magical Fibonacci number," *IEEE Potentials*, Vol. 9, No. 3, Oct 1990, pp. 34-35.

4. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Daisy, Daisy, give me your answer, do", *Scientific American*, Vol. 272, No. 1, January 1995, pp. 76-79.

5. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Fibonacci Forgeries", *Scientific American*, Vol. 272, No. 5, May 1995, pp. 82-85.

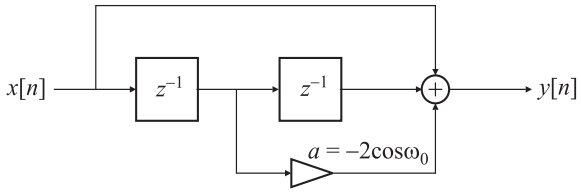
6. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Tales of a neglected number", *Scientific American*, Vol. 274, No. 6, June 1996, pp. 92-93.



6.10. Análisis de sistemas LIT en el campo transformado

Ejercicio 1. Para el filtro digital de la figura,

1. Determine la relación entrada/salida y la respuesta impulsiva $h[n]$.
2. Calcule y grafique la magnitud $|H(e^{j\omega})|$ y la fase $\angle H(e^{j\omega})$ del filtro, y encuentre qué frecuencias son completamente bloqueadas por el filtro.
3. Cuando $\omega_0 = \pi/2$, calcule la salida $y[n]$ si $x[n] = \cos(\pi/3n + \pi/6)$, $-\infty < n < \infty$.



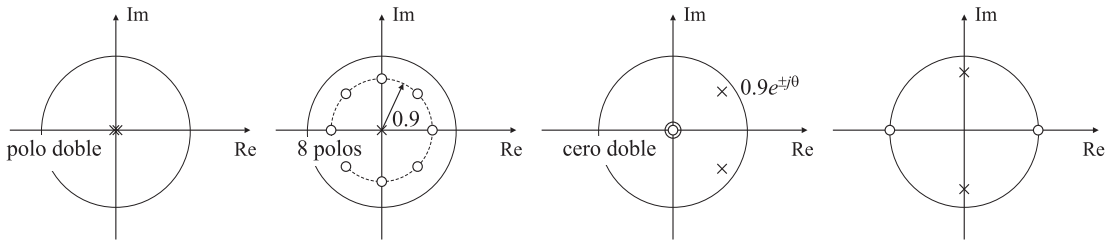
Ejercicio 2. Para el sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n] = (1/4)^n \cos(\pi n/4)\, u[n]$,

1. Calcule la función de sistema $H(z)$.
2. ¿Es posible implementar este sistema utilizando un número finito de multiplicadores y retardos unitarios? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo lo haría?
3. Esboce la respuesta en frecuencia $|H(e^{j\omega})|$ en base al diagrama de polos y ceros.
4. Calcule la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = (1/4)^n\, u[n]$.

Ejercicio 3. Para el sistema descripto por la ecuación a diferencias $y[n] = (1/2)\, y[n-1] + x[n] + (1/2)\, x[n-1]$,

1. Determine la respuesta impulsiva.
2. Calcule la respuesta en frecuencia.
3. Calcule la salida si la entrada es $x[n] = \cos(\pi/2n + \pi/4)$.

Ejercicio 4. Esboce aproximadamente la magnitud de la respuesta $|X(e^{j\omega})|$ de los siguientes diagramas de polos y ceros.



Ejercicio 5. La función de sistema de un filtro de primer orden es

$$H(z) = k\frac{1 + a\,z^{-1}}{1 - a\,z^{-1}}, \quad a, k \text{ reales.}$$

1. ¿Para qué rango de valores de a el filtro es un pasabajos estable? Esboce $|H(e^{j\omega})|$.
2. Calcule k para que la ganancia del filtro sea unitaria en $\omega = 0$.
3. Compute la respuesta impulsiva $h[n]$ del filtro.
4. Determine el rango de valores de a en el cual el filtro es un *pasaaltos* estable.

Ejercicio 6. El filtro con ecuación a diferencias $y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$ se llama *filtro promediador*, porque su salida es el promedio de las M muestras anteriores de la entrada. La función de sistema (para $M = 9$) es:

$$H(z) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}z^{-1} + \cdots + \frac{1}{9}z^{-8}.$$

1. Calcule y grafique la respuesta al escalón del sistema.
2. Calcule la respuesta en frecuencia (magnitud y fase).
3. Si la frecuencia de muestreo es $f_s = 1$ kHz, determine las frecuencias (analógicas) de las señales que serán bloqueadas por el filtro.

Ejercicio 7. La ecuación diferencial de un diferenciador analógico es $y(t) = dx(t)/dt$, donde $x(t)$ es la señal de entrada e $y(t)$ la señal de salida.

1. Determine la respuesta en frecuencia $H_c(j\Omega)$.
2. El diferenciador discreto ideal se define como $H(e^{j\omega}) = j\omega,\ |\omega| \leq \pi$. Justifique esta definición comparando las respuestas en frecuencia $|H(e^{j\omega})|$ y $\angle H(e^{j\omega})$ con las del inciso anterior.
3. Muestre que el sistema discreto $y[n] = x[n] - x[n-1]$ es una buena aproximación al diferenciador del inciso 2, al menos para bajas frecuencias.
4. Calcule la respuesta del sistema del inciso 3 a una entrada $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta)$, $-\infty < n < \infty$, para ω_0 pequeño.

Ejercicio 8. Un SLIT causal está definido por la ecuación a diferencias

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1].$$

1. Determine la función de sistema $H(z) = Y(z)/X(z)$. Dibuje los polos y ceros de $H(z)$ indicando la región de convergencia.
2. Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema.

3. Si el sistema es inestable, encuentre una respuesta al impulso estable (no causal) que sastifaga la ecuación a diferencias.

Ejercicio 9. La función de sistema de un SLIT causal es

$$X(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - a\,z^{-1}}, \quad a \text{ real.}$$

1. Determine para qué valores de a el sistema es estable.
2. Si $0 < a < 1$, dibuje el diagrama de polos y ceros. Indique la región de convergencia.
3. Demuestre que el sistema es un pasatodo (el módulo de la respuesta en frecuencia $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ es constante para todo ω).

Ejercicio 10. Si el sistema $y[n] = 0{,}2y[n-1] + x[n] - 0{,}3x[n-1] + 0{,}02x[n-2]$ y el sistema $y[n] = x[n] - 0{,}1x[n-1]$ se excitan con la misma señal de entrada, se obtiene una salida idéntica en ambos casos. ¿Es posible? ¿Por qué?

Ejercicio 11. Cuando la entrada a un sistema lineal e invariante en el tiempo es $x[n] = (1/2)^n\,u[n] + (2)^n u[-n-1]$, la salida es $y[n] = 6\,(1/2)^n\,u[n] - 6\,(3/4)^n\,u[n]$.

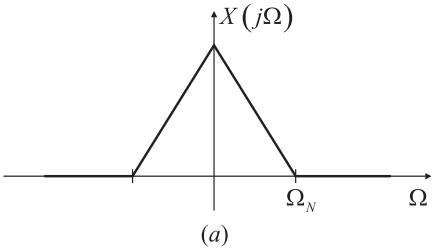
1. Encuentre la función de sistema $H(z)$. Grafique los polos y los ceros de $H(z)$ e indique la región de convergencia.
2. Calcule la respuesta impulsiva del sistema $h[n]$.
3. Escriba la ecuación a diferencias que caracteriza el sistema.
4. Determine si el sistema es
   a) estable;
   b) causal.

(I) **Ejercicio 12.** Una sucesión $x[n]$ tiene transformada-z $X(z) = P(z)/Q(z)$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios en z. Si $x[n]$ es absolutamente sumable, y si todas las raíces de $Q(z)$ están dentro del círculo unidad, ¿puede afirmar que $x[n]$ es causal?. Si la respuesta es afirmativa, explique detalladamente. Si la respuesta es negativa, dé un contraejemplo.

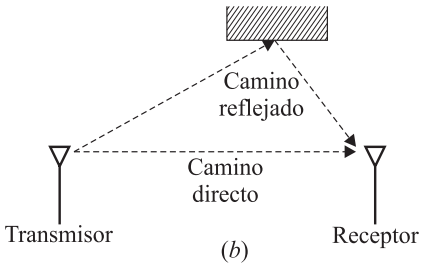
Ejercicio 13. Un transmisor emite una señal $x\,(t)$ con espectro $X(j\Omega)$ como se muestra en la Fig. (*a*). Debido a los rebotes en el camino de propagación, el receptor recibe una señal $y\,(t) = x\,(t) + \alpha x\,(t - T_R)$, con $\alpha < 1$ [Fig. (*b*)]. En el receptor esta señal se muestrea cada $T = T_R/N$ segundos, $y[n] = y(nT)$.

1. Calcule el espectro $Y(j\Omega)$ de la señal $y\,(t)$ en función del espectro de la señal $X(j\Omega)$.
2. Dibuje el espectro $Y\left(e^{j\omega}\right)$ de $y[n]$, indicando las escalas de amplitud y tiempo.

3. Calcule $H(z) = Y(z)/X(z)$, y dibuje el diagrama de polos y ceros.
4. Calcule *analíticamente* la respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\omega}\right)$ y exprésela de la forma más sencilla posible.
5. Dibuje el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia, indicando los puntos singulares de los diagramas.
6. Determine y justifique si el sistema es
   a) causal;
   b) estable;
   c) invariante en el tiempo.
7. Calcule la función de sistema de un compensador $G(z)$, un sistema que conectado a la salida del receptor permita recuperar $x[n]$. Note que $H(z)G(z) = 1$.
8. Encuentre todas las respuestas impulsivas $g[n]$ tales que $y[n] = h[n] * g[n] = x[n]$.
9. Para las respuestas impulsivas del inciso anterior demuestre –evaluando explícitamente la convolución– que si $x[n] = \delta[n]$, entonces $y[n] = \delta[n]$.
10. Especifique la región de convergencia de $G(z)$ según los resultados del inciso (6).
11. Determine (justificando su respuesta) si el sistema $G(z)$ es
    a) causal;
    b) estable.
12. Este método de compensación, ¿puede aplicarse en un sistema real? ¿Por qué?



(*a*)



(*b*)

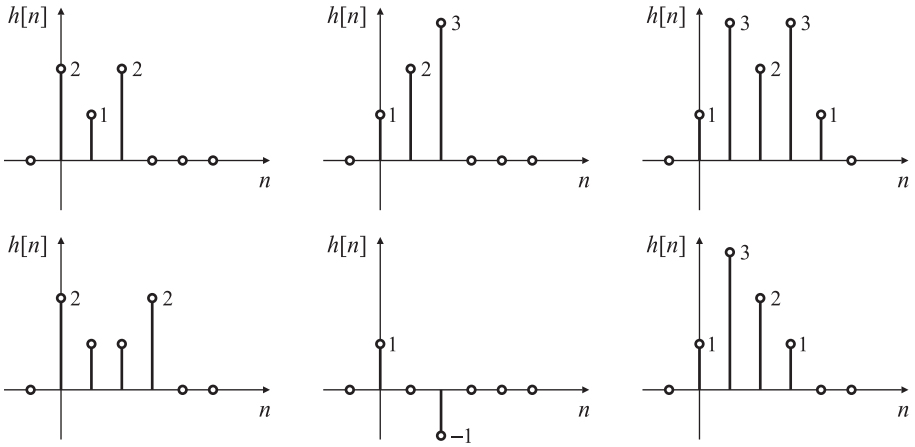
Ejercicio 14. Para cada una de las siguientes funciones de sistema, determine y justifique si corresponden o no a sistemas de mínima fase.

$$(a)\quad H_1(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \qquad (b)\quad H_2(z) = \frac{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{2}{3}z^{-1})(1+\frac{2}{3}z^{-1})},$$

$$(c)\quad H_3(z) = \frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\frac{j}{2}z^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})}, \qquad (d)\quad H_4(z) = \frac{z^{-1}(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\frac{j}{2}z^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})}.$$

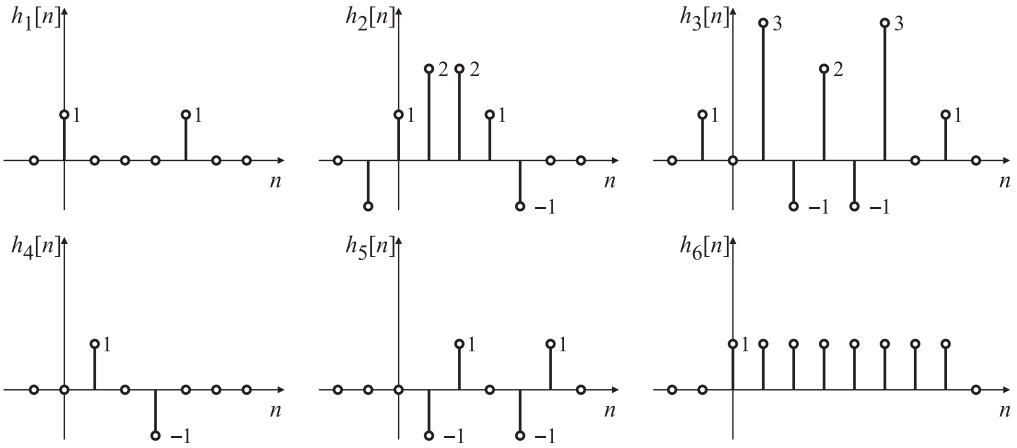
Ejercicio 15. Un filtro de fase lineal es aquel cuya respuesta en frecuencia puede expresarse como $H\left(e^{j\omega}\right) = A(\omega)e^{-j\omega\alpha}$, donde $A(\omega)$ es una función real y no negativa de ω, y α es una constante real.

1. Determine si cada cada una de las respuestas impulsivas de la figura corresponden a sistemas de fase lineal generalizada. Si la respuesta es afirmativa, calcule $A(\omega)$, α y β.
2. Para los filtros con fase lineal generalizada determine si cumplen con la condición más exigente de ser de fase lineal.



(I) **Ejercicio 16.** ¿Es posible que un filtro FIR de fase mínima tenga respuesta de fase lineal generalizada? Dé un ejemplo en caso afirmativo, y justifique en caso contrario.

Ejercicio 17. Para las respuestas impulsivas de la figura correspondientes a sistemas de fase lineal generalizada, encuentre el retardo de grupo asociado con cada sistema.



(I) **Ejercicio 18.** Una señal $x[n]$ con transformada z $X(z)$ es tal que:

1. $x[n]$ es real, y de fase mínima.
2. $x[n]$ es nula fuera del intervalo $0 \leq n \leq 4$.
3. $X(z)$ tiene un cero en $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ y un cero en $z = \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}$.

En base a esta información, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Es $X(z)$ una función racional? Justifique.
2. Grafique el diagrama de polos y ceros de $X(z)$ y especifique su región de convergencia.
3. Si $x[n] * y[n] = \delta[n]$, e $y[n]$ es una sucesión derecha, dibuje el diagrama de polos y ceros de $Y(z)$ y determine su región de convergencia

Ejercicio 19. Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ y $H_2\left(e^{j\omega}\right)$ son sistemas con fase lineal generalizada. Determine si las siguientes combinaciones de dichos sistemas son sistemas de fase lineal generalizada:

1. $G_1\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right) + H_2\left(e^{j\omega}\right)$
2. $G_2\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right) H_2\left(e^{j\omega}\right)$
3. $G_3\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1\left(e^{j\theta}\right) H_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$

Ejercicio 20. La función de sistema de un SLIT causal es

$$H\left(z\right) = \frac{(1-0{,}5z^{-1})(1+4z^{-1})}{(1-0{,}64z^{-2})}.$$

1. Encuentre expresiones para un sistema de mínima fase $H_1(z)$ y un sistema pasatodos $H_{pt}(z)$ tal que $H(z) = H_1(z)H_{pt}(z)$.
2. Derive expresiones para un sistema de fase mínima $H_2(z)$, distinto de $H_1(z)$ y un sistema FIR de fase lineal generalizada $H_{lin}(z)$ tal que $H(z) = H_2(z)H_{lin}(z)$.

Ejercicio 21. Para el SLIT con función de sistema

$$H\left(z\right) = (1-0{,}9e^{j0{,}6\pi}z^{-1})(1-0{,}9e^{-j0{,}6\pi}z^{-1})(1-1{,}25e^{j0{,}8\pi}z^{-1})(1-1{,}25e^{-j0{,}8\pi}z^{-1}).$$

1. Encuentre todas las funciones de sistema causales que tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia que $H(z)$, y cuya respuesta impulsiva es real y de la misma longitud que la respuesta impulsiva $h[n]$ de $H(z)$ (son cuatro). Identifique cuál de esos sistemas es de mínima fase.
2. Calcule las respuestas impulsivas de cada una de las funciones de sistema halladas en el inciso previo.
3. Para cada una de las respuestas del inciso anterior, calcule y grafique la *energía parcial* $E[n] = \sum_{m=0}^{n}(h[n])^2$, para $0 \leq n \leq 5$. Indique qué gráfica corresponde al sistema de mínima fase.

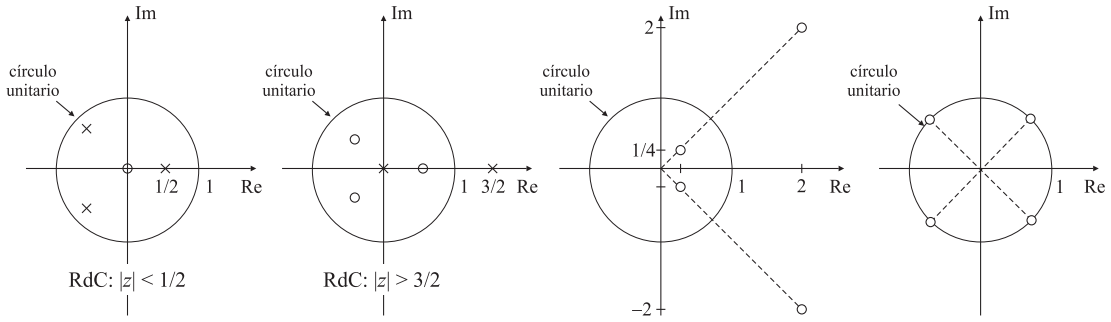
Ejercicio 22. Sea $x[n]$ una sucesión que se anula para $n < 0$ y $n > 5$. Si la transformada z de $x[n]$ es

$$X(z) = 3\left(1 - \tfrac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}z^{-1} + \tfrac{4}{5}z^{-2}\right)\left(1 + \tfrac{2}{5}z^{-1} - \tfrac{1}{2}z^{-2}\right)$$

¿cuántas otras sucesiones, que también se anulan para $n < 0$ y $n > 5$ y que tienen el mismo valor inicial que $x[n]$ tienen la misma fase?

Ejercicio 23. Cada uno de los diagramas de polos y ceros de la figura, junto con la especificación de la región de convergencia, describen un sistema lineal e invariante en el tiempo con función de sistema $H(z)$. Responda si los siguientes postulados son verdaderos o no.

1. El sistema tiene fase nula.
2. El sistema tiene fase lineal generalizada.
3. El sistema tiene una inversa $H_i(z)$ estable.

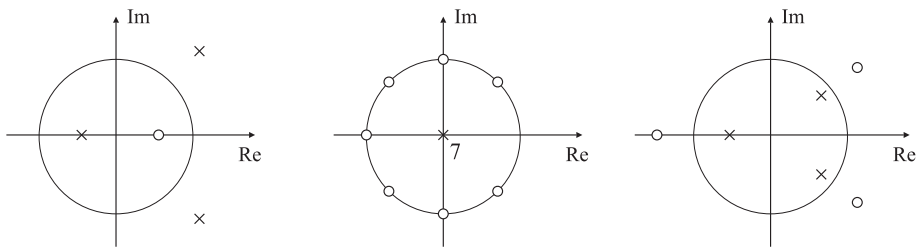


Ejercicio 24. Encuentre un sistema de fase mínima que tenga la misma magnitud de la respuesta en frecuencia que el sistema

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{\frac{5}{4} - \cos\omega}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos\omega}.$$

Ejercicio 25. La sucesión compleja $x[n]$ es nula para $n < 0$ y $n > N - 1$. Determine el número de sucesiones diferentes de longitud N, y con el mismo valor de la muestra inicial, que tienen el mismo módulo de la transformada de Fourier que $x[n]$.

Ejercicio 26. La figura muestra el diagrama de polos y ceros de tres SLIT causales con respuestas impulsivas $h[n]$ reales. Determine si cada uno de ellos satisface las siguientes propiedades: estable, FIR, IIR, fase mínima, pasatodos, fase lineal generalizada, retardo de grupo positivo para todo ω.



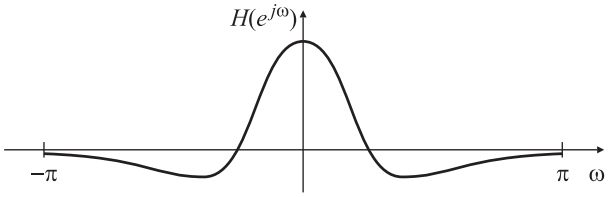
Ejercicio 27. Si $H(z)$ y $G(z)$ son funciones de sistema racionales que son de mínima fase, explicar si (*i*) $H(z)G(z)$ y (*ii*) $H(z) + G(z)$ también son de mínima fase.

Ejercicio 28. Una sucesión causal de fase no mínima tiene transformada z

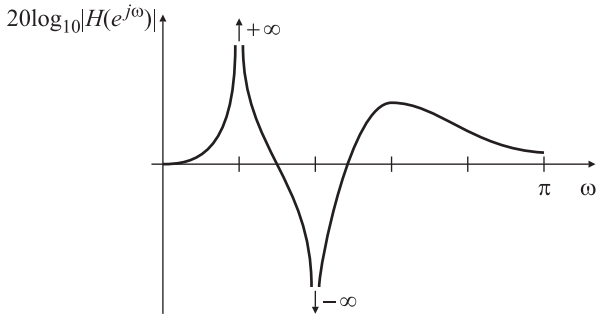
$$X(z) = \frac{\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{5}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)^2\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}.$$

¿Para qué valores de α la sucesión $y[n] = \alpha^n x[n]$ es de fase mínima?

(I) **Ejercicio 29.** Un SLIT estable tiene la transformada de Fourier con parte imaginaria nula que se muestra en la figura. ¿El sistema puede tener una inversa estable?



(I) **Ejercicio 30.** Un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo con función de sistema $H(z)$ y respuesta impulsiva real, tiene la respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\omega}\right) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ que se muestra en la figura.



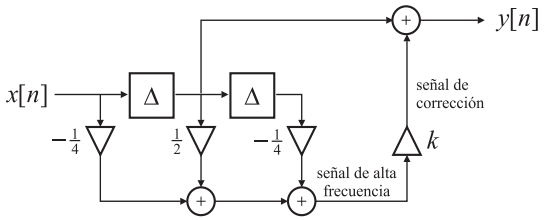
1. Dibuje el diagrama de polos y ceros de $H(z)$, mostrando toda la información posible acerca de la ubicación de los polos y los ceros que puede inferirse a partir de la figura.
2. El sistema ¿es FIR o IIR? Justifique.
3. El sistema ¿tiene fase lineal? ¿Por qué?
4. ¿El sistema es estable? Justifique.

Ejercicio 31. Si $h[n]$ y $H(z)$ son la respuesta impulsiva y la función de sistema de un SLIT estable tipo pasatodos, y $h_i[n]$ la respuesta impulsiva del sistema inverso (también LIT y estable), muestre que $h_i[n] = h[-n]$. Suponga que $h[n]$ es real.

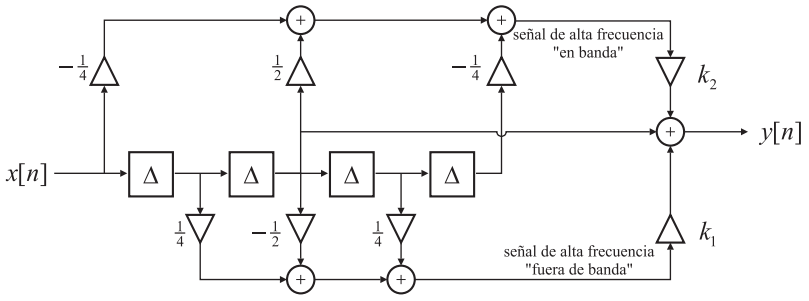
Ejercicio 32. ¿Es cierto que un sistema no puede tener fase lineal generalizada si la función de sistema $H(z)$ tiene polos en cualquier lugar del plano z excepto en $z = 0$ o en $z = \infty$? Justifique si la respuesta es verdadera, y dé un contraejemplo si es falsa.

Ejercicio 33. Determine la función de sistema $H(z)$ de un filtro pasatodos que posea fase lineal generalizada.

Ejercicio 34. El filtro FIR de la figura compensa las pérdidas de alta frecuencia en receptores de TV (*corrección de apertura*). Se conectan en cascada dos de estos circuitos, uno para corregir la apertura horizontal y otro para corregir la apertura vertical. En el primer caso el retardo Δ es la duración de una línea, mientras que en el segundo es de 70 ns (según el estándar CCIR). La ganancia k permite ajustar la cantidad de corrección. Calcule la función transferencia y grafique el módulo de la respuesta en frecuencia para diferentes valores de k.



Ejercicio 35. La figura muestra un circuito mejorado de corrección de apertura. El retardo es de 70 ns (estándar CCIR) y las dos ganancias $k_1 > 0$ y $k_2 < 0$ permiten ajustar la cantidad de corrección. Determine la función de sistema de este circuito y grafique el módulo de la respuesta en frecuencia para diferentes valores de k_1 y k_2.

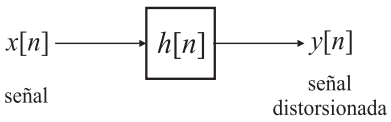


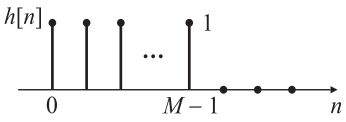
Ejercicio 36. La señal $y[n]$ está formada por una señal primaria $x[n]$ y dos ecos de la misma:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n - n_d] + \frac{1}{4}x[n - n_d].$$

Calcule un filtro realizable que permita recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$.

Ejercicio 37. En muchas aplicaciones es necesario recuperar una señal que ha sido distorsionada por un proceso de convolución. Este fenómeno puede modelarse como un filtrado lineal, donde la señal deseada $x[n]$ es "distorsionada" por un filtro con respuesta impulsiva $h[n]$, dando lugar a la señal "corrupta" $y[n]$. Suponga que $h[n] = 1$ para $0 \leq n \leq M-1$, y que vale cero para cualquier otro valor de n.





1. Una manera de recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$ es usando un *filtro inverso*: la señal $y[n]$ se filtra por un sistema cuya respuesta en frecuencia es $H_i\left(e^{j\omega}\right) = \left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]^{-1}$, donde $H\left(e^{j\omega}\right)$ es la transformada de Fourier de $h[n]$. Para la respuesta impulsiva especificada, discuta los problemas que presenta la implementación del filtro inverso.

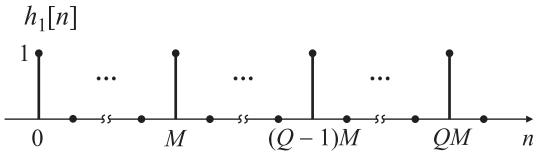
2. Debido a las dificultades del filtrado inverso, una solución habitual es procesar la señal corrupta $y[n]$ con el sistema que muestra la figura, cuya salida $w[n]$ permite extraer una réplica mejorada de $x[n]$.

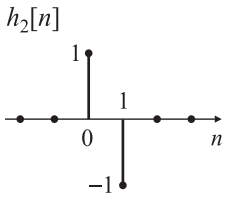


Las respuestas impulsivas de los sistemas son

$$h_1[n] = \sum_{k=0}^{Q} \delta[n - kM], \qquad h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

Explique en detalle el funcionamiento de este sistema, y en particular, en qué condiciones se puede recuperar *exactamente* $x[n]$ de $w[n]$. **Ayuda:** considere la respuesta impulsiva del sistema completo (desde $x[n]$ a $w[n]$).





Este procesamiento se utiliza para restaurar imágenes "movidas" (*blurred* en ingles) –por ejemplo, las fotografías tomadas desde un automóvil que se desplaza con cierta velocidad, o las fotografias de la corteza terrestre tomadas por los satélites– y se conoce como *deblurring*.

Ejercicio 38. No es posible diseñar un compensador perfecto (un sistema inverso causal y estable) para un sistema de *no mínima fase*. Una forma de compensar la *magnitud* de la respuesta en frecuencia se estudia en este problema. El sistema SLIT estable de no mínima fase con función de sistema racional $H(z)$ se conecta en cascada con un sistema compensador $H_c(z)$. La función de sistema $G(z)$ de la cascada es $G(z) = H(z)H_c(z)$.

1. ¿Cómo debe elegirse $H_c(z)$ para que sea estable y causal y tal que $\left|G(e^{j\omega})\right| = 1$? (Recuerde que $H(z)$ siempre puede representarse como $H(z) = H_{pt}(z)H_{\text{mín}}(z)$.)

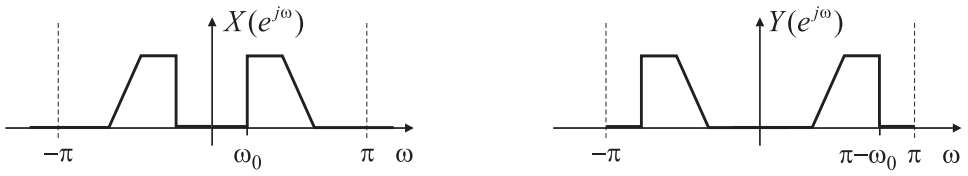
2. Caracterice las funciones de sistema $H_c(z)$ y $G(z)$.

3. Suponga que

$$H(z) = (1 - 0{,}8e^{j0{,}3\pi}z^{-1})(1 - 0{,}8e^{-j0{,}3\pi}z^{-1})(1 - 1{,}2e^{j0{,}7\pi}z^{-1})(1 - 1{,}2e^{-j0{,}7\pi}z^{-1}).$$

Encuentre $H_{\text{mín}}(z)$, $H_{pt}(z)$, $H_c(z)$ y $G(z)$ para este caso, y grafique los diagramas de polos y ceros de cada función de sistema.

Ejercicio 39. Los *inversores de frecuencia* han sido utilizados durante mucho tiempo como una manera sencilla de enmascarar la voz, ya que una señal vocal se vuelve casi ininteligible si su espectro se invierte, tal como se ve en la figura.



1. Determine cómo se puede efectuar la inversión de frecuencia en el dominio tiempo. **Nota:** las operaciones requeridas son muy sencillas, y se pueden efectuar fácilmente en tiempo real.

2. Diseñe un desenmascarador.

3. Usando las funciones de sonido de MATLAB, pruebe a leer un archivo *.WAV cualquiera, enmascárelo, y reprodúzcalo.

Ⓜ **Ejercicio 40. Ecos y reverberaciones**

Se puede generar una señal $y[n]$ formada por ecos y reverberaciones "sintéticos" de una señal $x[n]$ sumando réplicas retardadas y escaladas de la misma

$$y[n] = \sum_{i=1}^{\infty} g_i\, x[n - i\,D], \tag{6.74}$$

donde D es un entero positivo, y $|g_k| > |g_{k+1}|$.

1. Muestre que el filtro "peine"

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-D}}$$

puede ser utilizado como un reverberador, calculando la respuesta al impulso, y comparándola con la respuesta impulsiva del sistema (6.74).

2. Para construir reverberadores digitales se colocan en cascada de tres a cinco filtros "peine" pasatodo, cuya función tranferencia es

$$H(z) = \frac{z^{-D} - a}{1 - az^{-D}},$$

eligiendo adecuadamente los parámetros a y D. Calcule (con MATLAB, utilizando la función `impz`) y grafique la respuesta impulsiva de dos de tales reverberadores, obtenido cada uno de ellos al colocar en cascada tres secciones con los siguientes parámetros:

Reverberador "A"		
Sección	D	a
1	50	0,70000
2	40	0,66500
3	32	0,63175

Reverberador "B"		
Sección	D	a
1	37	0,70000
2	17	0,77000
3	11	0,84700

3. Grafique la función transferencia (módulo y fase) de los reverberadores "A" y "B" utilizando el comando `freqz`, y comente sobre ellas.

4. Analice la respuesta impulsiva $h[n]$ de los reverberadores en los dos casos que se detallan a continuación.
   a) los retardos D_1, D_2 y D_3 no son primos (similar al caso del Reverberador "A");
   b) los retardos D_1, D_2 y D_3 son números primos (como en el Reverberador "B").

5. La diferencia entre el eco y la reverberación es que con el eco se producen repeticiones claras de la señal a intervalos de tiempo uniformes. La reverberación, en cambio, puede pensarse como un sinfín de ecos de diferente duración interactuando entre sí. ¿Cuál de los prototipos es mejor reverberador?

Más detalles acerca de esta aplicación pueden econtrarse en J. A. Moorer, "Signal processing aspects of computer music: a survey", *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, No. 8, Agosto de 1977, pp. 1108-1137.

7

Diseño de filtros digitales

La mayoría de los textos sobre procesamiento digital de señales dedican un espacio sustancial a la teoría de diseño de filtros –incluyendo especialmente los métodos de aproximación tipo Butterworth, Chebyshev, elíptico, Cauer, etc.– lo que refleja no sólo el formidable esfuerzo de investigación destinado a desarrollar métodos útiles para el cálculo de los coeficientes de los filtros, sino también los avances significativos que se han logrado en este campo. En este capítulo, basado en (Ifeachor y Jarvis, 1993) se presenta un panorama global del proceso de diseño, postergando los aspectos teóricos a los capítulos siguientes. Se describe paso a paso el proceso de diseño de filtros desde las especificaciones hasta la implementación, y se detallan las opciones de que dispone el diseñador, y los factores que pueden influir en sus decisiones.

7.1. Filtrado digital de señales

Un filtro es un sistema o una red que cambia selectivamente la forma de onda, o las características amplitud-frecuencia o fase-frecuencia de una manera deseada. Los objetivos comunes del proceso de filtrado son mejorar la calidad de la señal, por ejemplo removiendo o atenuando el nivel de ruido, extrayendo información de dos o más señales previamente combinadas para hacer uso eficiente de un canal de comunicación, etc.

Un filtro digital es un algoritmo implementado en hardware y/o software que opera sobre una señal de entrada digital (discreta en tiempo y cuantizada en amplitud) y genera una señal digital de salida, con la finalidad de efectuar un proceso de filtrado. El término "filtro digital" se refiere al hardware o software específico que ejecuta el algoritmo. Los filtros digitales trabajan sobre valores numéricos asociados a muestras de esas señales analógicas previamente digitalizadas por conversores A/D o simplemente sobre un conjunto de números almacenados en la memoria de una computadora o microprocesador.

En la Fig. 7.1 se muestra un diagrama bloque simplificado de un filtro digital que opera en tiempo real, con entradas y salidas analógicas. La señal de entrada, limitada en banda, se muestrea periódicamente y se convierte en una serie de muestras $x[n]$, $n = 0, 1, ...$ El procesador digital convierte la sucesión de entrada $x[n]$ en una sucesión de salida $y[n]$ de acuerdo al algoritmo de cómputo. El conversor digital-analógico convierte la salida



Fig. 7.1. Diagrama bloque simplificado de un filtro digital.

digital $y[n]$ a valores continuos en tiempo que son procesados por un filtro analógico para suavizar la forma de onda y remover componentes no deseadas de alta frecuencia.

Los filtros digitales juegan un papel muy importante en el procesamiento digital de señales. En gran número de aplicaciones, como compresión de datos, procesamiento de señales biomédicas, procesamiento de señales de voz, procesamiento de imágenes, transmisión de datos, audio digital, cancelamiento de ecos telefónicos, se prefieren por sobre los filtros analógicos por uno o más de los siguientes motivos:

- Los filtros digitales pueden tener características que son imposibles de conseguir con filtros analógicos, como por ejemplo una respuesta de fase *exactamente* lineal.
- El desempeño de los filtros digitales no varía con las condiciones ambientales (temperatura, humedad, etc.) como sí ocurre con los filtros analógicos, lo que elimina la necesidad de calibrarlos periódicamente.
- Si el filtro se implementa utilizando un procesador programable la respuesta en frecuencia de un filtro digital puede ajustarse a voluntad (filtrado adaptivo).
- El mismo filtro puede procesar varias señales o canales de entrada sin necesidad de replicar el hardware.
- Las señales filtradas y sin filtrar pueden almacenarse para uso o análisis posterior.
- Los avances en las técnicas de integración VLSI hacen que sea posible fabricar filtros digitales pequeños, de bajo consumo, y de muy bajo costo.
- La precisión con que un filtro digital verifica las especificaciones de diseño está limitada solamente por la longitud de palabra (bits) utilizada para representar los coeficientes del filtro y ejecutar las operaciones aritméticas; con los filtros analógicos es difícil lograr atenuaciones que excedan los 60 o 70 dB en la banda de rechazo (utilizando componentes convencionales).
- El desempeño de los filtros digitales es repetible de unidad a unidad.
- Los filtros digitales pueden utilizarse a muy bajas frecuencias, como las que se encuentran en aplicaciones biomédicas, donde el empleo de filtros analógicos es poco práctico por los valores muy elevados de los componentes pasivos involucrados (capacitores, inductancias). Además, los filtros digitales pueden trabajar sobre un amplio rango de frecuencias simplemente cambiando la frecuencia de muestreo.

Sin embargo, los filtros digitales también presentan una serie de desventajas respecto a los filtros analógicos:

- *Limitación de frecuencia*. La frecuencia de Nyquist –que fija el ancho de banda útil que el filtro puede procesar– queda definida por el proceso de conversión (tiempos

de conversión del conversor A/D y D/A), velocidad del procesador, cantidad de operaciones a ejecutar por unidad de tiempo, etc. Este último término se incrementa a medida que aumenta la exigencia de las características de respuesta del filtro (filtros muy abruptos).

- *Efectos de longitud finita de palabra*. En general, los coeficientes del filtro implementado serán distintos de los calculados teóricamente si la representación numérica que se utiliza para implementar el filtro no es de *precisión infinita* (punto flotante). No sólo influye la cuantización de los coeficientes del filtro, sino también el redondeo de las operaciones numéricas, la cuantización del conversor A/D y D/A, la truncación que ocurre al almacenar los contenidos del acumulador en memoria, etc. Estos efectos, que se modelan como fuentes de ruido de distribución uniforme, pueden limitar seriamente el desempeño de los filtros digitales: variaciones de ganancia en la banda de paso, menor atenuación en la banda de rechazo, y hasta pueden conducir a la inestabilidad en filtros recursivos de orden elevado.
- *Tiempos de diseño y desarrollo prolongados.* Los tiempos de diseño y desarrollo de un filtro digital, en especial el diseño del hardware puede ser muy superior al necesario para el diseño de un filtro analógico. Sin embargo, una vez que se dispone del hardware o el software necesario, la misma plataforma puede utilizarse para muchas otras tareas de filtrado o procesamiento digital de señales con poca o ninguna modificación. Además, el desarrollo de herramientas de CAD avanzadas hacen que el diseño de filtros sea una tarea agradable y sencilla, aunque aún así es necesaria cierta experiencia para aprovecharlas íntegramente.

7.2. Filtros FIR e IIR

Los filtros digitales lineales e invariantes en el tiempo pueden clasificarse de acuerdo a la longitud de su respuesta impulsiva $h[n]$ como IIR, cuando la respuesta tiene duración infinita o FIR, si su duración es finita. Esta respuesta impulsiva $h[n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ caracteriza completamente el filtro, a punto tal que las señales de entrada y salida están relacionadas por la suma de convolución, que para filtros IIR toma la forma

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k], \tag{7.1}$$

y para filtros FIR es

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]. \tag{7.2}$$

Del análisis de estas dos ecuaciones es evidente que, mientras que la suma convolución puede ser una forma apropiada para implementar un filtro FIR, no es adecuada para los filtros IIR debido a que la respuesta impulsiva es muy larga (en teoría, infinitamente larga). Por ello, los filtros IIR se implementan con ecuaciones a diferencia que permiten calcular las muestras de salida en forma recursiva

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \tag{7.3}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots, y[-1] = 0$. El número N es el orden del filtro, y fija la cantidad de modos de la respuesta impulsiva. La relación entre los coeficientes a_i y b_i se obtiene aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ a (7.3) y antitransformando. En la ecuación (7.3) la salida $y[n]$ es función de los valores actuales y pasados de la entrada, y de valores pasados de la salida (de ahí el nombre *recursivo*): el filtro IIR es sistema realimentado. En cambio, en el filtro FIR la salida $y[n]$ sólo depende de los valores pasados de la entrada $x[n]$. Es evidente que, si en la ecuación (7.3) de los filtros IIR los coeficientes a_i son nulos, se obtiene la suma convolución (7.2) de los filtros FIR, pues hacer $a_i = 0$ anula los efectos de realimentación de las salidas pasadas. Las ecuaciones (7.2) y (7.3) son las ecuaciones a diferencias que se utilizan para implementar filtros FIR e IIR, respectivamente. Estas ecuaciones, y en particular el valor de los coeficientes $h[n]$ para los filtros FIR y a_i, b_i para los filtros IIR, son los objetivos del problema de diseño de filtros digitales.

Las funciones de sistema están dadas por

$$H_{\text{FIR}}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] z^{-k} \qquad \text{y} \qquad H_{\text{IIR}}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

para filtros FIR e IIR, respectivamente, y resultan convenientes para el análisis de estabilidad, respuesta en frecuencia, etc.

Los factores que influencian la elección entre distintas alternativas en cada etapa del diseño de filtro tienen mucho que ver con que el filtro sea FIR o IIR. Por ello resulta importante apreciar las diferencias entre ambos tipos de filtros, las características peculiares de cada uno, y, lo más importante, cómo elegir entre uno y otro.

7.3. Comparación entre filtros FIR e IIR

La elección entre una implementación FIR e IIR depende de las ventajas relativas de cada uno de estos dos tipos de filtros.

1. Los filtros FIR se pueden diseñar para tener una respuesta de fase estrictamente lineal (distorsión de fase nula), lo que es importante en muchas aplicaciones, como transmisión de datos, audio digital y procesamiento de imágenes. La respuesta de fase de filtros IIR no es lineal, en especial en cercanías de la zona de transición.

2. Los filtros FIR implementados de forma no recursiva, por ejemplo aplicando (7.2), son inherentemente estables. En cambio, la estabilidad de los filtros IIR siempre debe comprobarse, ya que son sistemas realimentados.

3. Los efectos causados por la implementación con aritmética de punto fijo, tales como los errores de cuantización de los coeficientes y los errores por redondeo en las operaciones aritméticas, son mucho más severos en los filtros IIR que en los FIR.

4. Para satisfacer unas especificaciones dadas los filtros FIR necesitan un mayor número de coeficientes que los filtros IIR, sobre todo si las bandas de transición son estrechas. En consecuencia, los requerimientos de memoria, el número de operaciones y los tiempos de procesamiento son mayores para los FIR que para los IIR. Sin embargo, la posibilidad de implementar los FIR mediante la técnica de convolución rápida usando FFT y también el empleo de técnicas *multirate* permiten aumentar significativamente la eficiencia de las implementaciones.

5. Un filtro analógico convencional puede convertirse en un filtro digital IIR equivalente que satisfaga las especificaciones de diseño de manera sencilla. Esto no es posible con filtros FIR pues no tienen una contraparte analógica. Sin embargo es más sencillo sintetizar filtros con respuestas en frecuencia arbitrarias utilizando filtros FIR.

De las características detalladas arriba puede esbozarse una guía tentativa para elegir entre una implementación FIR o IIR:

- Si los únicos requerimientos importantes son bandas de transición estrechas (filtros con cortes muy abruptos) y eficiencia de cómputo, se prefieren filtros IIR pues necesitan un número de coeficientes mucho menor que un filtro FIR equivalente (especialmente si se eligen características frecuenciales elípticas o de Cauer).
- Si el número de coeficientes del filtro no es muy elevado (por ejemplo, si las bandas de transición no son muy abruptas), y en particular, si se desea muy poca o ninguna distorsión de fase, se suele elegir filtros FIR. Los procesadores digitales modernos (DSP) están optimizados para implementar este tipo de filtros, y algunos se han diseñado específicamente con esa finalidad (por ejemplo, el DSP56200 de Motorola, o el INMOS A100). Sin embargo, en un campo tan dinámico como éste la capacidad y el desempeño de los componentes varía rápidamente.

EJEMPLO **7.1. Comparación de las características de filtros FIR e IIR**

Se desea diseñar un filtro que cumpla con las siguientes especificaciones:

banda de paso:	0 a $3\pi/5$,
banda de rechazo:	$4\pi/5$ a π,
ganancia en la banda de paso:	$1 \pm 0{,}06$,
ganancia en la banda de rechazo:	$< 0{,}2$.

Los requisitos de diseño se pueden satisfacer tanto como un filtro IIR o FIR:

- **Filtro 1 (IIR):**

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \tag{7.4}$$

con $a_1 = -0{,}6744878$, $a_2 = -0{,}3633482$, $b_0 = 0{,}4981819$, $b_1 = 0{,}9274777$, $b_2 = 0{,}4981819$. La Fig. 7.2 muestra el diagrama bloque de una posible implementación del filtro, cuyas ecuaciones a diferencia son

$$\begin{aligned} w[n] &= x[n] - a_1 w[n-1] - a_2 w[n-2], \\ y[n] &= b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2]. \end{aligned}$$

En la Fig. 7.3 se grafica la respuesta en frecuencia (en módulo y fase),y el retardo de grupo, comprobándose que se satisfacen las especificaciones de diseño.

- **Filtro 2 (FIR):**

$$H(z) = \sum_{k=0}^{11} h[k] z^{-k}$$

con

$$\begin{aligned} h[0] &= h[11] = +0{,}5460328 \times 10^{-2}, \\ h[1] &= h[10] = -0{,}4506875 \times 10^{-1}, \\ h[2] &= h[9] = +0{,}6916942 \times 10^{-1}, \\ h[3] &= h[8] = -0{,}5538437 \times 10^{-1}, \\ h[4] &= h[7] = -0{,}6342841 \times 10^{-1}, \\ h[5] &= h[6] = +0{,}5789240 \times 10^{0}, \end{aligned}$$

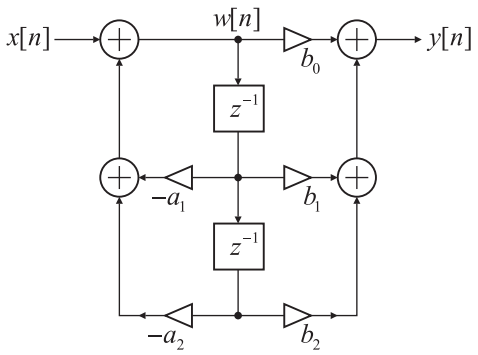


Fig. 7.2. Representación en diagrama bloque del filtro IIR del Ejemplo 7.1.

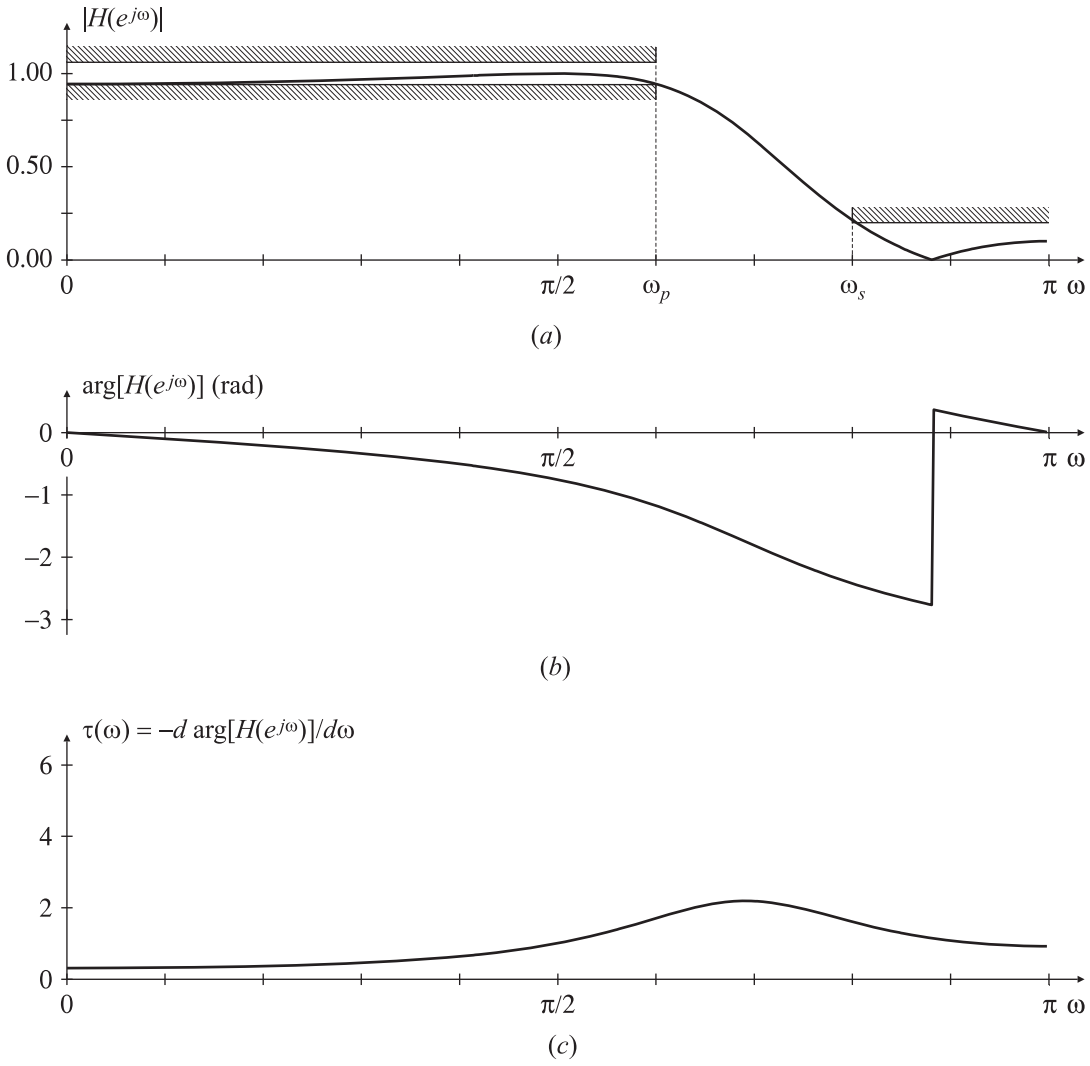


Fig. 7.3. Respuesta en frecuencia del filtro IIR (7.4): módulo (a), fase (b) y retardo de grupo (c).

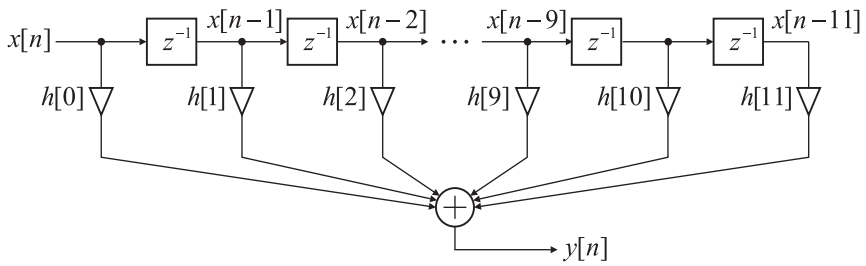


Fig. 7.4. Representación en diagrama bloque del filtro FIR del Ejemplo 7.1.

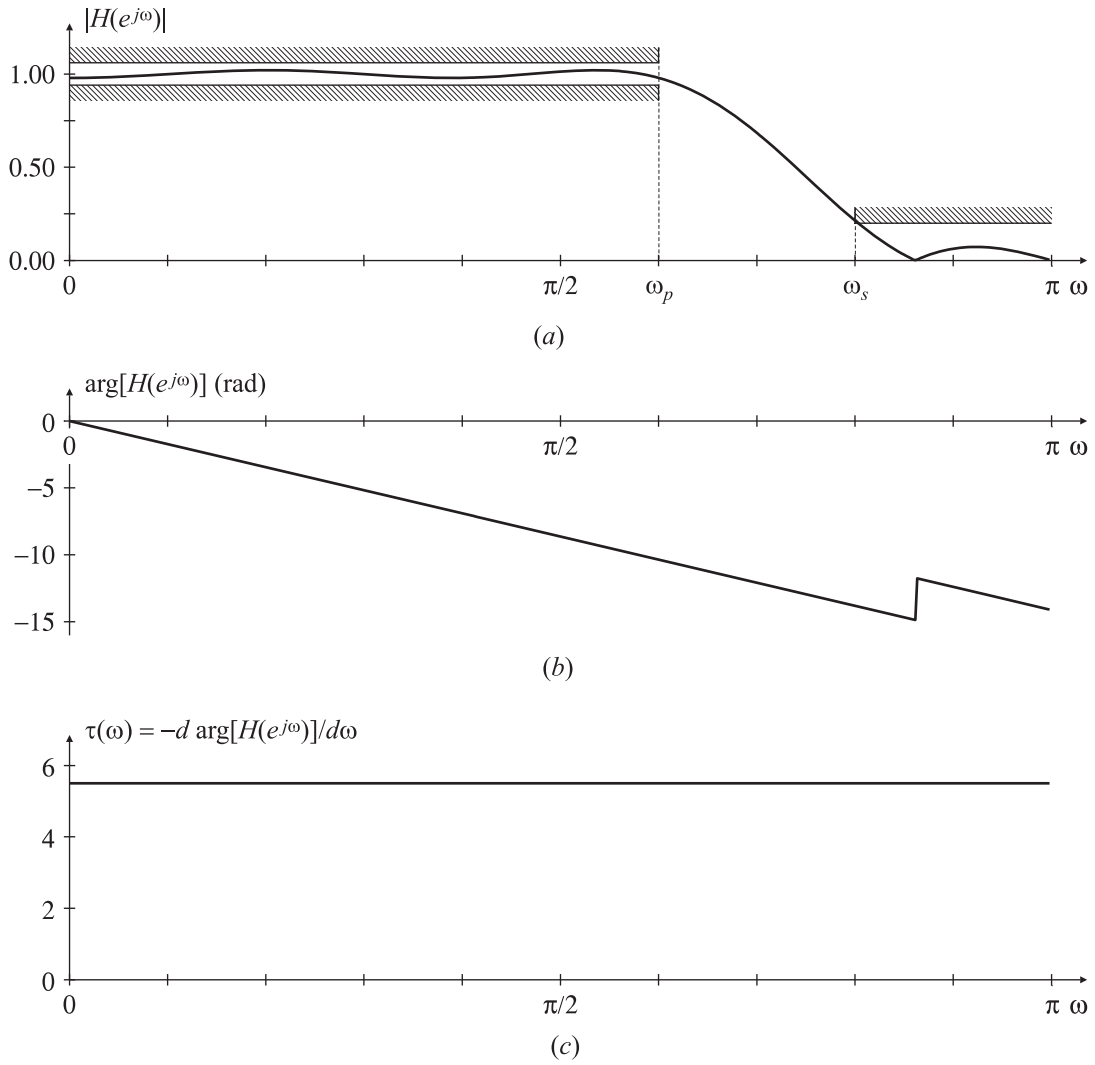


Fig. 7.5. Respuesta en frecuencia del filtro FIR (7.5): módulo (a) , fase (b) y retardo de grupo (c) .

La Fig. 7.4 muestra el esquema de una posible implementación, cuya ecuación a diferencias es

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots + h[10]x[n-10] + h[11]x[n-11]. \quad (7.5)$$

La respuesta en frecuencia (módulo, fase y retardo de grupo) se ilustra en la Fig. 7.5. □

Del examen de ambas implementaciones se observa que los requerimientos de cómputo y de lugares de almacenamiento para los dos filtros son:

	FIR	IIR
Número de multiplicaciones:	12	5
Número de sumas:	11	4
Lugares de memoria (coeficientes y datos):	24	8

Es evidente que el filtro IIR es más "económico" en la cantidad de operaciones y de lugares de almacenamiento necesarios que el filtro FIR. Se podría haber explotado la simetría de los coeficientes del filtro FIR para reducir a la mitad la cantidad de memoria necesaria, a costa de dificultar ligeramente la implementación. En este caso el número de coeficientes del filtro FIR ($N = 12$) es aproximadamente 6 veces el orden (la mayor potencia de z^{-1} en el denominador) de la función transferencia del IIR ($N = 2$).

En los dos casos el módulo de la respuesta en frecuencia satisface las especificaciones, pero las respuestas de fase de los dos filtros son muy diferentes. Mientras que la respuesta de fase del filtro IIR no es lineal (Fig. 7.3), la del filtro FIR (Fig. 7.5) es perfectamente lineal, excepto por un salto de $\pm\pi$ debido al cero en la banda de rechazo. El retardo de fase, que es la derivada negativa de la curva de fase $\left(\phi = -d \arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] / d\omega\right)$, es constante para todo el rango de frecuencia en el caso del filtro FIR. Para el filtro IIR varía en función de la frecuencia de la señal: la respuesta de fase es razonablemente lineal para bajas frecuencias, pero se aparta de la linealidad para la frecuencias próximas a la de corte. El retardo del filtro IIR es mucho menor que el del FIR, como se observa en la Fig. 7.3 y en la Fig. 7.5 (1/2 muestra vs. 5.5 muestras, respectivamente).

7.4. La comparación FIR-IIR en el 2007

Las características generales de los filtros recursivos (IIR) y no recursivos (FIR) han variado desde la década del 70 hasta la actualidad, como muestra la Tabla 7.1. En 1970 la aplicación fundamental era el filtrado selectivo en frecuencia y los filtros IIR ofrecían mayores ventajas, sobre todo porque se habían obtenido métodos de diseño analíticos, óptimos, en forma cerrada.

Cuando la aplicación de los filtros digitales se extendió a otros campos (filtros acoplados y filtros adaptivos) el diseño óptimo de los IIR dejó de ser práctico, y los FIR se volvieron una elección natural, en especial porque la teoría y las técnicas de diseño de los filtros adaptivos están bien desarrolladas solamente para filtros FIR. También aparecieron nuevas aplicaciones en las que era necesario preservar la forma de onda de la señal de salida, lo que impone que el filtro tenga una respuesta de fase lineal. Este requisito se satisface más fácilmente usando filtros FIR. En general, los factores que contribuyeron a la mayor utilización de filtros no recursivos fueron:

- nuevas aplicaciones de filtrado;

Tabla 7.1: Comparación entre filtros recursivos (IIR) y no recursivos (FIR) a lo largo del tiempo. Las zonas grisadas indican las áreas donde una de las implementaciones es superior a la otra.

Propiedad	1970		1980		1990	
	FIR	IIR	FIR	IIR	FIR	IIR
métodos de diseño	subóptimo usando ventanas	óptimo, analítico, forma cerrada	óptimo usando métodos iterativos	óptimo, analítico, forma cerrada	óptimo usando métodos iterativos	óptimo, analítico, forma cerrada
lugares de memoria-multiplicaciones necesarias	muchos	pocos	más	menos	más	menos
¿pasatodos exactos?	no	sí	no	sí	no	sí
¿inestables?	no	si polos p_i ($\|p_i\| > 1$)	no	si polos p_i ($\|p_i\| > 1$)	no	no
¿zona muerta?	no	sí	no	sí	no	no
¿fase lineal?	sí	no	sí	no	sí	sí
¿transformador de Hilbert?	poco eficiente	no causal	poco eficiente	no causal	poco eficiente	eficiente
¿adaptivo?	sí	no	sí	difícil o imposible	sí	difícil o imposible
¿posibilidad de paralelismo?			muchas	pocas	muchas	muchas

- requerimientos de fase lineal;
- la disponibilidad de los primeros métodos de optimización: los FIR seguían necesitando más operaciones por muestra que los IIR, pero la diferencia de eficiencia entre ambos era menor;
- aparición de técnicas para trabajar con filtros FIR con respuesta impulsiva de gran longitud (método de convolución rápida, propuesto por Stockham en 1966);
- la disminución del costo de la memoria y la disponibilidad de multiplicadores por hardware;
- la posibilidad de efectuar cómputos en paralelo: si bien ambos tipos de filtros se pueden adaptar para el cálculo en paralelo, el paralelismo es más limitado para los IIR si no se puede efectuar un producto en el intervalo de tiempo entre dos muestras.

Como resultado de esta evolución, para 1980 las preferencias se habían volcado hacia los filtros no recursivos (FIR). Pero como muestra la Tabla 7.1, algunas de las características que favorecieron a los FIR durante 1980 se neutralizaron en la década del 90. Lo que cambió para los IIR es que en la actualidad se pueden diseñar para ser siempre estables y también para tener una respuesta de fase lineal. Las implementaciones recientes son

más adecuadas para la paralelización. Según algunos autores (Rader, 2006) muchos de los "problemas" de los IIR en la actualidad están sobrestimados.

7.4.1. Los filtros recursivos en la actualidad

En alguna literatura se considera que los filtros IIR tienen problemas de inestabilidad, respuesta de fase no lineal, paralelismo limitado, y que son inapropiados para ciertas aplicaciones. Sin embargo, la mayoría de estas limitaciones pueden salvarse si se efectúa procesamiento por bloques, y se acepta el error despreciable de truncar la respuesta impulsiva. Un filtro recursivo puede aproximar una respuesta impulsiva deseada con error arbitrariamente pequeño. En teoría, la respuesta impulsiva de un filtro recursivo es infinitamente larga (de ahí el nombre IIR), pero en la práctica la respuesta decae exponencialmente rápido a cero y se la puede truncar después de algunos cientos de muestras cuando ha decaído a valores insignificantes, manteniendo la cota de error. El comportamiento es equivalente a filtrar la señal con un filtro FIR de orden elevado, pero con muchas menos operaciones por muestra que las que serían necesarias para un filtro FIR de la misma longitud.

La señal de entrada se parte en bloques de longitud L, mucho mayor que la longitud P de la respuesta impulsiva (truncada) del filtro. Cada bloque de entrada se filtra usando la ecuación a diferencias recursiva, y el resultado se trunca a longitud $L+P-1$. Los bloques de salida sucesivos se concatenan como en el método *overlap-add* solapando las primeras $P-1$ muestras de la etapa actual con las últimas $P-1$ muestras de la etapa anterior. La eficiencia computacional aumenta, pues mientras que el cálculo de cada muestra de salida necesita P operaciones en un FIR de longitud P, la aproximación de su respuesta impulsiva con un filtro IIR de orden N se consigue con $N \ll P$. De esta forma el cálculo de cada muestra de salida necesita a lo sumo $2N \ll P$ operaciones.

El procesamiento por bloques permite además solucionar otro tipo de problemas:

1. **Estabilidad:** El procesamiento por bloques permite que los filtros no sean necesariamente causales. En los filtros causales, los polos fuera del círculo unitario representan inestabilidad, pero si cada bloque de salida se computa iterando la ecuación a diferencias hacia atrás en el tiempo, los polos que están fuera del círculo no implican inestabilidad. De esta forma se pueden tener filtros recursivos con polos en cualquier lugar del plano complejo, excepto sobre el círculo unitario.

2. **Fase lineal:** Si $H(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de un filtro cualquiera, se puede obtener un filtro de fase lineal (de hecho, de fase nula) con respuesta en frecuencia $|H(e^{j\omega})|^2$ si el bloque de entrada se filtra dos veces, una de ellas hacia atrás en el tiempo, como se estudió en el Capítulo anterior. Esta idea fue propuesta por Powell y Chau en 1990, pero en su momento no recibió mucha atención.

3. **Paralelismo:** cada bloque puede procesarse en diferentes instancias de hardware.

El procesamiento por bloques permite implementar transformadores de Hilbert muy eficientes (Rader, 1984). Siguiendo la idea de los filtros de fase nula, se utiliza un par de filtros IIR cuya respuesta de fase difiere en $\pi/2$ radianes. Esta implementación es mucho más eficiente que un diseño FIR óptimo, necesitando de 5 a 10 veces menos multiplicaciones para las mismas especificaciones. Otros filtros, como los adaptivos, todavía no se

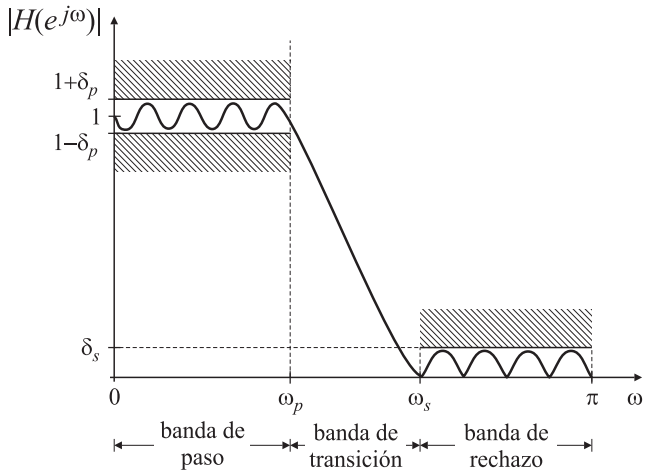


Fig. 7.6. Bandas de tolerancia para un filtro pasabajos.

pueden implementar fácilmente como IIR aún usando el esquema de filtrado por bloques.

7.5. Diseño de filtros

El diseño de un filtro digital involucra los siguientes pasos:

- especificación de los requerimientos del filtro;
- elección de una aproximación conveniente y cálculo de los coeficientes;
- representación del filtro utilizando una estructura adecuada (realización);
- análisis de los efectos de la longitud finita de palabra en el desempeño;
- implementación en hardware o software.

Estos cinco pasos no son necesariamente independientes, ni necesitan seguirse en el orden descrito; actualmente, las técnicas de diseño disponibles combinan el segundo y parte del tercero y cuarto. Para lograr un filtro eficiente es necesario iterar entre las distintas etapas, especialmente si, como es habitual, las especificaciones de diseño dejan cierto grado de libertad al diseñador, o si se desean explorar otras alternativas de diseño.

7.5.1. Especificaciones de diseño

Los requerimientos incluyen la especificación de

1. las características de las señales: tipo de fuente de señal, interfaz de entrada-salida, velocidad de procesamiento, ancho de palabra, la mayor frecuencia de interés;
2. las características del filtro: la respuesta en módulo y/o fase deseadas y sus tolerancias, la velocidad de operación, el modo de filtrado (en línea o fuera de línea);

3. la forma de implementación: como una rutina de alto nivel en una computadora, o un programa específico para un DSP;

4. otras restricciones al diseño, como por ejemplo el costo del filtro.

Es posible que inicialmente el diseñador no cuente con toda la información necesaria para especificar completamente el filtro, pero cuanto más detalles se conozcan más sencillo será el proceso de diseño.

Aunque algunos de los requerimientos discutidos arriba son dependientes de la aplicación, es necesario resaltar los aspectos referidos a las *características* del filtro. Frecuentemente, los requisitos del filtro digital se especifican en el dominio frecuencial, y para el caso de los filtros selectivos en frecuencia, estas especificaciones toman la forma de bandas de tolerancia, como muestra la Fig. 7.6 para el caso de un filtro pasabajos. Las zonas grisadas indican los límites de tolerancia. En la banda de paso, el módulo de la respuesta admite una variación máxima de $\pm\delta_p$, y en la banda de rechazo se pretende que la ganancia no exceda δ_s. Es frecuente especificar estas cotas en dB.

El ancho de la zona de transición determina qué tan abrupto es el filtro. En esta región se espera que el módulo de la respuesta en frecuencia decrezca monótonamente desde la banda de paso a la banda de rechazo. Los principales parámetros de interés son

$$\begin{array}{ll} \text{desviación en la banda de paso:} & \delta_p, \\ \text{desviación en la banda de rechazo:} & \delta_s, \\ \text{frecuencia de corte de la banda de paso:} & \omega_p, \\ \text{frecuencia de corte de la banda de rechazo:} & \omega_s. \end{array}$$

Las frecuencias esquina se suelen normalizar a la frecuencia de muestreo ($\omega_i = 2\pi f_i / f_s$), pero también son frecuentes las especificaciones en unidades típicas como Hz, kHz, y a menudo son mucho más significativas. Las desviaciones con respecto a la respuesta deseada tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo pueden expresarse en valores absolutos o en decibeles (dB), indicando la ondulación máxima ("*ripple*") tolerada en la banda de paso, y la atenuación mínima exigida en la banda de rechazo:

$$\begin{array}{ll} A_s \text{ (atenuación en la banda de rechazo):} & -20\log_{10}\delta_s, \\ A_p \text{ (ondulación en la banda de paso):} & 20\log_{10}\left(1+\delta_p\right). \end{array}$$

En general, la respuesta de *fase* un filtro no se especifica tan detalladamente como el módulo de la respuesta en frecuencia. En muchos casos es suficiente indicar que importa la distorsión de fase, o que se pretende una respuesta de fase lineal. Sólo es necesario detallar la respuesta en fase deseada en aquellas aplicaciones donde los filtros se utilizan para compensar o ecualizar la respuesta en fase de un sistema.

EJEMPLO **7.2. Especificaciones de diseño de un filtro pasabanda**

Se desea diseñar un filtro FIR pasabanda cuya respuesta en frecuencia satisfaga las siguientes especificaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{banda de paso:} & 0{,}18\times 2\pi \text{ a } 0{,}33\times 2\pi, \\ \text{ancho de la zona de transición:} & 0{,}04\times 2\pi, \\ \text{ganancia en la banda de paso:} & 1\pm 0{,}05 \ (A_p = 0{,}42 \text{ dB}), \\ \text{ganancia en la banda de rechazo:} & < 0{,}001 \ (A_s = 60 \text{ dB}). \end{array}$$

En la Fig. 7.7 se muestra el esquema de bandas de tolerancias del filtro. La atenuación en la banda de rechazo debe ser mayor que $A_s = -20\log_{10}\delta_s = 60$ dB, y la ondulación máxima tolerada en la banda de paso es de $A_p = 20\log_{10}(1+\delta_p) = 0{,}42$ dB. □

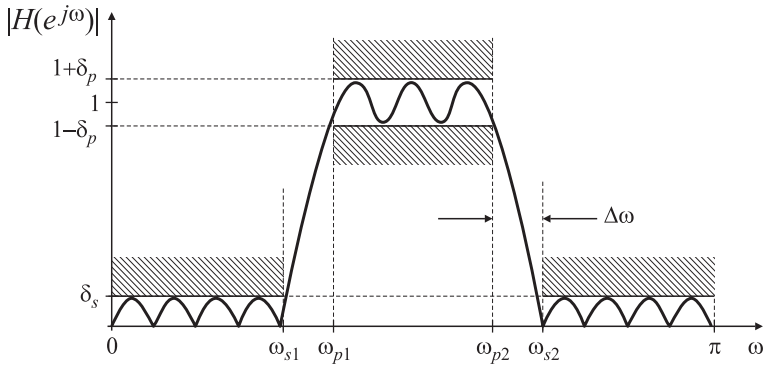


Fig. 7.7. Bandas de tolerancia para el filtro pasabanda del Ejemplo 7.2.

7.5.2. Elección de la aproximación y cálculo de los coeficientes

En esta etapa se elige alguno de los métodos de aproximación (Butterworth, Chebyshev, elíptico, etc. si el filtro es IIR, o equirriple, óptimo, con ventanas, etc. si es FIR) y se calculan los valores de los coeficientes $h[n]$ del filtro FIR, o a_k y b_k del filtro IIR, de modo de satisfacer las especificaciones (Sección 7.5.1). El método empleado para determinar los coeficientes es distinto según el filtro sea IIR o FIR.

Tradicionalmente, el cálculo de los coeficientes de los filtros IIR se basa en la transformación de las funciones de sistema de filtros analógicos en filtros discretos. Los dos métodos clásicos son el de *invariación al impulso* y el de *transformación bilineal*. Con la técnica de la invariación al impulso la respuesta impulsiva del filtro digital está formada por las muestras de la respuesta impulsiva del filtro analógico. Sin embargo, el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro discreto es diferente, en general, de la del filtro continuo. Debido a fenómenos de aliasing, el método no es apropiado para el diseño de filtros pasaaltos o filtros eliminabanda, o cualquier tipo de filtro cuya respuesta en frecuencia no sea aproximadamente nula por encima de cierta frecuencia f_H.

Por otra parte, el método de la transformada bilineal produce filtros muy eficientes, y es apropiado para el diseño de cualquier tipo de filtro con ganancia constante en la banda de paso. Permite el diseño de filtros con características frecuenciales clásicas como Butterworth, Chebyshev, elípticos, etc. Los filtros digitales calculados en base a la transformada bilineal preservan la característica de respuesta en frecuencia, pero no las propiedades temporales. En la actualidad se cuenta con programas de cálculo que permiten obtener los coeficientes del filtro digital directamente a partir de las especificaciones usando el método de la transformada bilineal o la técnica analítica desarrollada por Rader y Gold (1967) para filtros recursivos equirriple.

Los filtros con respuestas sencillas, como los resonadores, "notch", filtros peine, osciladores digitales, etc., se pueden diseñar ubicando directamente los polos y los ceros en el plano complejo; sin embargo, si las especificaciones son exigentes, es conveniente utilizar las técnicas de diseño clásicas.

Los coeficientes de los filtros FIR pueden calcularse con varios métodos. Entre ellos merecen destacarse el diseño por ventanas, la técnica de suavizado de las bandas de transición, el método de muestreo en frecuencia, y los métodos óptimos (el algoritmo de Parks y McClellan o el algoritmo de Remez). El método de diseño utilizando ventanas es sen-

Tabla 7.2: Métodos típicos para el diseño de filtros IIR y FIR.

IIR	FIR
invariación al impulso	ventanas
transformada bilineal	bandas de transición suaves
ubicación directa de polos y ceros	muestreo en frecuencia
óptimos	óptimos

cillo y flexible pero no permite un control muy preciso sobre los parámetros del filtro. La técnica de las bandas de transición suaves permite atenuar el efecto Gibbs, a costa de una pequeña complejidad adicional. El método de muestreo en frecuencia permite una implementación particularmente eficiente (y recursiva) de filtros FIR, pero puede tener problemas cuando se usa aritmética de punto fijo. Con la disponibilidad de programas de diseño eficientes y con buena interfaz con el usuario, los métodos óptimos son ampliamente utilizados hoy en día, y para la mayoría de las aplicaciones permiten obtener rápidamente el filtro FIR deseado.

Los métodos típicos para el cálculo de los coeficientes de los filtros se resumen en la Tabla 7.2. El método de diseño se elige de acuerdo a la aplicación en particular. Si bien influyen varios factores, el más importante es qué tan críticas son las especificaciones. La decisión "difícil" es optar entre FIR o IIR. En aquellos casos en que las propiedades de los FIR (respuesta de fase estrictamente lineal, estabilidad inherente) son imprescindibles, la mejor elección puede ser el diseño por métodos óptimos, o usando ventanas (generalmente la de Kaiser). Si, en cambio, son deseables las características de los IIR (menor cantidad de coeficientes para especificaciones similares) el método de la transformada bilineal es apropiado para la mayoría de los casos.

7.5.3. Realización

Por *realización* se entiende convertir una función de sistema $H(z)$ en un conjunto de ecuaciones a diferencias que se ejecutarán como un algoritmo en un procesador. El conjunto de ecuaciones también se conoce como la *estructura* del filtro. Existen infinitas formas de escribir la ecuación a diferencias, de modo que existen infinitos tipos de estructuras. Matemáticamente las distintas realizaciones producen el mismo resultado sobre la señal a filtrar; sin embargo en el momento de la implementación la sensibilidad a la variación de los coeficientes, propagación del ruido de redondeo o de truncación, organización y/o requerimientos de memoria en un procesador en particular, etc., suelen decidir la elección de una estructura particular. Cada realización se asocia a un diagrama bloque como los de las Figs. 7.2 y 7.4, que revela la cantidad de lugares de memoria necesarios para el almacenamiento de los datos y los coeficientes, número de operaciones requeridas, etc.

Es frecuente utilizar distintas estructuras para implementar filtros IIR o FIR. Para filtros IIR, las tres estructuras típicas son las *formas directa*, *cascada* y *paralelo*; el diagrama bloque de una *forma directa*, denominada de "tipo II" es la que se muestra en la Fig. 7.2 para un sistema de segundo orden. En este caso, la función transferencia (9.4) se implementa con el conjunto de ecuaciones a diferencia (9.5); la Fig. 7.2 muestra que se necesitan dos lugares de memoria para almacenar la historia del filtro (los cuadrados señalados con z^{-1})

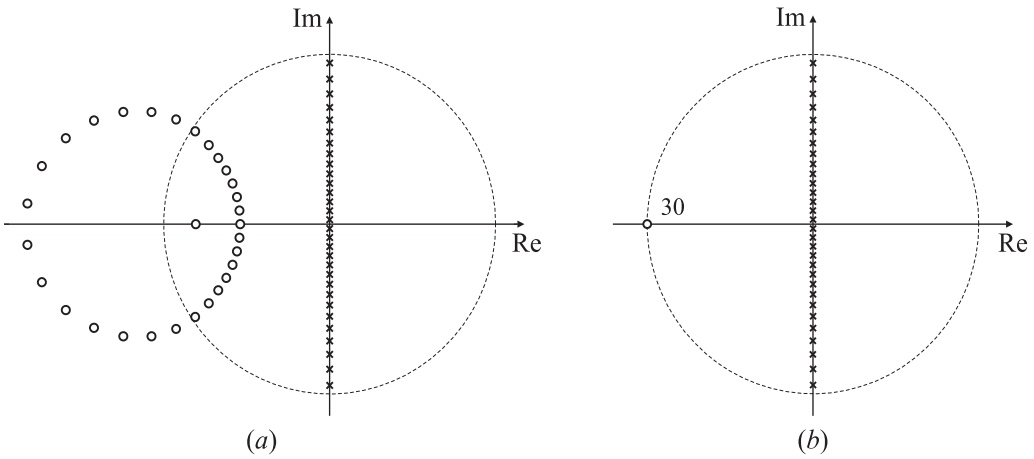


Fig. 7.8. Comparación de los patrones de polos y ceros de una implementación en *forma directa I* (a) y en *secciones de segundo orden*, cada una de ellas en forma directa I (b).

y cinco lugares de memoria para almacenar los coeficientes $(a_1, a_2, b_0, b_1, b_2)$ Sin embargo, las estructuras cascada y paralelo, que se estudiarán en el Capítulo 13, son las más utilizadas para la implementación de filtros IIR pues son mucho más insensibles a los efectos de cuantización de coeficientes que la estructura directa. Ésta presenta una alta sensibilidad a la variación de los coeficientes, especialmente para filtros de alto orden, como se muestra en el siguiente EJEMPLO.

EJEMPLO **7.3. Influencia de la estructura con coeficientes de precisión "infinita"**

Aún cuando los coeficientes se implementen con muy alta precisión, como cuando se usa MATLAB, la estructura directa es inadecuada para realizar filtros de alto orden. Por ejemplo, un filtro tipo Butterworth discreto de orden $N = 30$ con frecuencia de corte en $\omega_c = \pi/2$ se caracteriza por tener 30 ceros en $z = -1$. La implementación en forma directa, utilizando los comandos

```
[n, d] = butter(30,0.5);
zplane(n,d);
```

da resultados muy diferentes, como se puede ver en la Fig. 7.8(a). Por efecto de los (pequeños) errores numéricos, los 30 ceros que deberían estar ubicados en $z = -1$, se esparcen en un entorno, no necesariamente pequeño, de este punto. La implementación como secciones de segundo orden, que se diseña con los comandos

```
[z,p,k] = butter(30,0.5);
[sos,g] = zp2sos(z,p,k);
hsos = dfilt.df1sos(sos,g);
zplane(hsos);
```

tiene la distribución de polos y ceros prevista por la teoría, como se observa en la Fig. 7.8(b). □

Para los filtros FIR (7.2) la forma más utilizada es la directa, Fig. 7.4, porque es sencilla de implementar y aprovecha al máximo la arquitectura del hardware de la mayoría de los procesadores digitales de señales (DSP). Esta estructura también se conoce como filtro transversal o "línea de retardo" (*tappered delay line*) pues almacena los valores pasados de las muestras de la señal de entrada. Como se estudiará más adelante, esta implementación es mucho menos sensible a la cuantización de los coeficientes que la forma directa de los filtros IIR. Otras estructuras de uso frecuente son las de muestreo en frecuencia y la de convolución rápida, que se estudiarán en el Capítulo 13.

Sintetizando, para un filtro dado la elección de la estructura depende:

- del tipo de filtro (IIR o FIR);
- de la facilidad de implementación;
- de la sensibilidad de la estructura a los efectos de la longitud finita de palabra.

7.5.4. Efectos de la longitud de palabra finita

Los pasos de diseño referidos a la aproximación y a la realización suponen que las operaciones que especifican los algoritmos se realizan con precisión infinita, o al menos muy alta. Sin embargo, en muchas aplicaciones donde el bajo costo es decisivo, es necesario representar los coeficientes del filtro utilizando un número finito de bits (típicamente 8, 16 o más), y realizar las operaciones indicadas por las ecuaciones a diferencia utilizando aritmética de precisión finita.

El uso de un número finito de bits degrada el desempeño del filtro, y en algunos casos puede inutilizarlo por completo. El diseñador debe tener en cuenta estos efectos, y elegir longitudes de palabra apropiados para los coeficientes del filtro, las variables de entrada y salida, y las operaciones aritméticas. En general, el ancho en bits de las palabras de entrada y salida (que se leen o se escriben en los conversores A/D y D/A, respectivamente) son mucho menores que la longitud de palabra utilizado para los coeficientes y los cómputos (10 o 16 bits, frente a 25 o 32 bits).

Las principales causas de la disminución del desempeño en los filtros digitales debido a la longitud finita de palabra son:

- *Cuantización de las señales de entrada y salida*, debido a la resolución finita de los conversores A/D y D/A. Este efecto se suele modelar como un fenómeno aleatorio (ruido), tal como se estudió en el Capítulo 7.
- *Cuantización de los coeficientes*, lo que conduce a variaciones de la respuesta en frecuencia de filtros FIR e IIR, y posiblemente a inestabilidades en los filtros IIR.
- *Errores aritméticos por redondeo*. Los procesadores con longitud de palabra finita tienen un acumulador con bits adicionales para mantener la precisión (por ejemplo, el resultado de la multiplicación de dos números de B bits es un número de $2B$ bits). Cuando estos resultados se almacenan en memoria se truncan a la longitud de palabra adoptada. El error resultante, denominado *ruido de redondeo*, altera la respuesta del filtro. En los filtros IIR puede causar inestabilidad, y también dar lugar oscilaciones de pequeña amplitud de la salida aún con entrada nula.
- *Desborde* (*overflow*), que ocurre cuando el resultado de una suma excede el ancho de palabra adoptado, resultando en errores de las muestras de salida, que pueden causar inestabilidad, u oscilaciones de gran amplitud en los filtros IIR.

La degradación del desempeño depende de:

- la longitud de palabra y tipo de aritmética utilizada para efectuar los cálculos;
- el método adoptado para cuantizar las variables y los coeficientes del filtro a la longitud de palabra elegida;

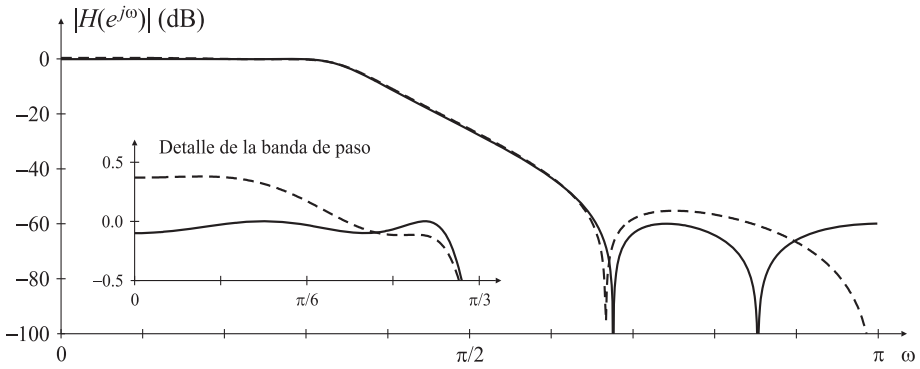


Fig. 7.9. Respuesta en frecuencia del filtro del EJEMPLO 7.4 implementado con una estructura tipo forma directa II. (—) filtro prototipo; (- -) filtro con coeficientes cuantizados.

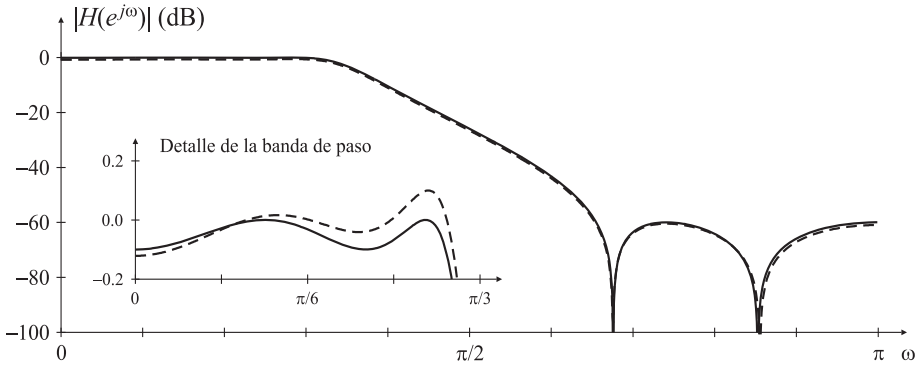


Fig. 7.10. Respuesta en frecuencia del filtro del EJEMPLO 7.4 implementado con una cascada de dos bloques de segundo orden. (—) filtro prototipo; (- -) filtro con coeficientes cuantizados.

- la estructura del filtro.

Conociendo estos factores, el diseñador puede analizar los efectos de la longitud de palabra finita en el desempeño del filtro, y efectuar las correcciones que sean necesarias.

EJEMPLO **7.4. Efectos de cuantización en un filtro IIR**

Un filtro IIR elíptico de cuarto orden con frecuencia de corte en $\omega_c = 0{,}3\pi$, 0,1 dB de ondulación en la banda de paso, y 60 dB de atenuación en la banda de rechazo está caracterizado por la función de sistema

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}},$$

donde

$$\begin{aligned} b_0 &= 0{,}01588232577583, & a_0 &= 0{,}57816706294199, \\ b_1 &= 0{,}04509870267465, & a_1 &= -1{,}00000000000000, \\ b_2 &= 0{,}06160127928264, & a_2 &= 0{,}98785160189871, \\ b_3 &= 0{,}04509870267465, & a_3 &= -0{,}49030269551500, \\ b_4 &= 0{,}01588232577583, & a_4 &= 0{,}10997293011303. \end{aligned}$$

El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro se muestra con línea de trazo continuo en la Fig. 7.9. Si el filtro se implementa en un procesador de 8 bits, utilizando una estructura tipo forma directa II se deben truncar los coeficientes, que resultan

$$\begin{aligned} b_0 &= 0{,}0156250, & a_0 &= \ \ 0{,}5781250, \\ b_1 &= 0{,}0468750, & a_1 &= -1{,}0000000, \\ b_2 &= 0{,}0625000, & a_2 &= \ \ 0{,}9843750, \\ b_3 &= 0{,}0468750, & a_3 &= -0{,}4921875, \\ b_4 &= 0{,}0156250, & a_4 &= \ \ 0{,}1093750. \end{aligned}$$

El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro con los coeficientes cuantizados, graficada con línea de trazos en Fig. 7.9, revela que se violan las especificaciones de diseño. Sin embargo, la elección de una estructura diferente puede solucionar el problema. En la Fig. 7.10 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia del mismo filtro, implementado como una cascada de dos secciones de segundo orden, con ganancia $C = 0{,}0274701$, y cuyos coeficientes cuantizados a 8 bits son

$$\begin{aligned} b_{01} &= 0{,}5000000, & a_{01} &= \ \ 0{,}5000000, \\ b_{11} &= 0{,}8984375, & a_{11} &= -0{,}4531250, \\ b_{21} &= 0{,}5000000, & a_{21} &= \ \ 0{,}1406250, \\ b_{02} &= 0{,}5000000, & a_{02} &= \ \ 0{,}5000000, \\ b_{12} &= 0{,}5234375, & a_{12} &= -0{,}4140625, \\ b_{22} &= 0{,}5000000, & b_{22} &= \ \ 0{,}3437500. \end{aligned}$$

La figura revela que los requisitos de diseño se satisfacen sin necesidad de cambiar la resolución en bits de los coeficientes. □

El ejemplo anterior muestra que los efectos de la cuantización de los coeficientes pueden atenuarse cambiando la estructura del filtro. Dependiendo de la implementación, algunos de los errores mencionados pueden ser insignificantes. Por ejemplo, si el filtro se calcula en un lenguaje de alto nivel que se ejecuta en computadoras más o menos modernas, por ejemplo con MATLAB en una PC, los errores de cuantización de coeficientes y redondeo no siempre son importantes. En aplicaciones de tiempo real las señales de entrada y salida se cuantizan a 8, 12 o 16 bits, según el tipo de conversor A/D y D/A utilizado. Si el ancho de palabra elegido para efectuar la operaciones y el redondeo es de esta magnitud, es casi obligatorio analizar los efectos de la cuantización en las características del filtro.

7.5.5. Implementación

Una vez que se han calculado los coeficientes del filtro, elegido una estructura adecuada, y verificado que las especificaciones se satisfacen después de considerar la degradación causada por la cuantización de coeficientes y de las variables a la longitud de palabra elegida, la ecuación a diferencias debe implementarse como una rutina de software o en hardware. Cualquiera sea el método de implementación, cada muestra de la salida $y[n]$ del filtro debe calcularse de acuerdo a la ecuación a diferencias que involucra multiplicaciones, sumas y restas, y retardos. De modo que para implementar un filtro se necesitan los siguientes bloques básicos:

- memoria (ROM o RAM) para almacenar los coeficientes del filtro;

- memoria RAM para almacenar las muestras actuales y pasadas de la entrada $x[n]$, $x[n-1]$, ..., $x[n-M]$, y la salida $y[n]$, $y[n-1]$, ..., $y[n-N]$;
- multiplicadores en hardware o rutinas de multiplicación (bibliotecas de software);
- sumador o unidad aritmético-lógica.

La manera en que se configuran estos bloques depende fuertemente según el procesamiento sea en tiempo real o fuera de línea. Cuando se procesa fuera de línea, los datos o señal de entrada están disponibles en algún medio de almacenamiento (cinta, CD, memoria, etc.) Tal es el caso del registro de datos experimentales para el análisis posterior. En estos casos el filtro se implementa utilizando un lenguaje de alto nivel, y se ejecuta en una computadora de propósito general. Por ello las implementaciones fuera de línea suelen ser programas. En algunas aplicaciones, por ejemplo el procesamiento de imágenes, se agrega hardware adicional dedicado para acelerar la velocidad de procesamiento.

En el procesamiento en tiempo real se requiere que el filtro genere una muestra de la señal de salida ante cada muestra de la señal de entrada, lo que implica que el cómputo completo de la ecuación a diferencias debe completarse en el intervalo de tiempo entre una y otra muestra de la señal de entrada, o bien operar sobre *bloques* de datos utilizando las técnicas tipo *overlap-add* u *overlap-save*. El procesamiento en tiempo real necesita de hardware dedicado cuando la frecuencia de muestreo es muy alta, o cuando el filtro es de alto orden. Este hardware se nuclea alrededor de un procesador digital de señales, o DSP, que en la actualidad es producido por varios fabricantes, como Motorola, Texas Instruments, Analog Devices, Burr Brown, etc. Cada DSP incluye memoria RAM y ROM o FLASH, multiplicadores rápidos, unidades aritmético lógicas flexibles, métodos de direccionamiento poderosos, etc. y algunas unidades incluyen los conversores A/D y D/A necesarios para procesar señales del mundo exterior.

7.6. Referencias

Ifeachor, E., Jervis, B. (1993) *Digital Signal Processing: a practical approach*, Addison-Wesley Longman Ltd, Edingburg Gate, Harlow, England.

Powell, S. R., Chau, P. M. (1990) "The reversed filtering in real time", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Systems*, May 1990, Vol. 2, pp. 1239-1243.

Rader, C. M., Gold, B. (1967) "Digital filter design in the frequency domain", *Proc. IEEE*, Vol. 55, No. 2, pp. 149-171.

Rader, C. M. (1984) "A simple method for sampling in-phase and quadrature components", *IEEE Trans. Aerospace Electr. Syst.*,Vol. AES 20, No. 6, pp. 821-824.

Rader, C. M. (2006) "The rise and fall of recursive digital filters", *IEEE Signal Proc. Magazine*, Vol. 23, No. 6, pp. 46-49.

Stockham, T. G. (1966) "High speed convolution and correlation", *Proc. AFIPS*, No. 28, pp. 229-233.

8

Diseño de filtros sencillos

Si bien es posible diseñar filtros que satisfagan casi cualquier especificación de diseño, en muchas aplicaciones basta con una acción de filtrado sencilla, que insuma pocas operaciones por cada muestra de salida, y que no requiera de gran cuidado en su implementación. Con secciones FIR o IIR de segundo orden se pueden implementar una gran variedad de filtros que satisfacen estas condiciones.

8.1. Filtros Pasatodo

Un filtro pasatodo tiene una respuesta en frecuencia de magnitud constante para todas las frecuencias,

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \pi.$$

El filtro pasatodo más sencillo es un retardo puro de n_0 muestras, $n_0 \in \mathbb{Z}$, cuya función de sistema

$$H(z) = z^{-n_0}$$

se caracteriza por tener n_0 polos en el origen si $n_0 > 0$ (que es la situación usual). Este sistema deja pasar todas las señales sin atenuación, salvo por un retardo de n_0 muestras $y[n] = x[n - x_0]$: es un pasatodos trivial con una respuesta de fase lineal $\arg[H(e^{j\omega})] = -n_0\omega$.

Un filtro pasatodos más interesante es el que tiene como función de sistema

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{N-1}z^{-N+1} + a_N z^{-N}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_k, $0 \leq k \leq N$, son reales, y frecuentemente $a_0 = 1$. Si se define el polinomio $A(z)$ como

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k},$$

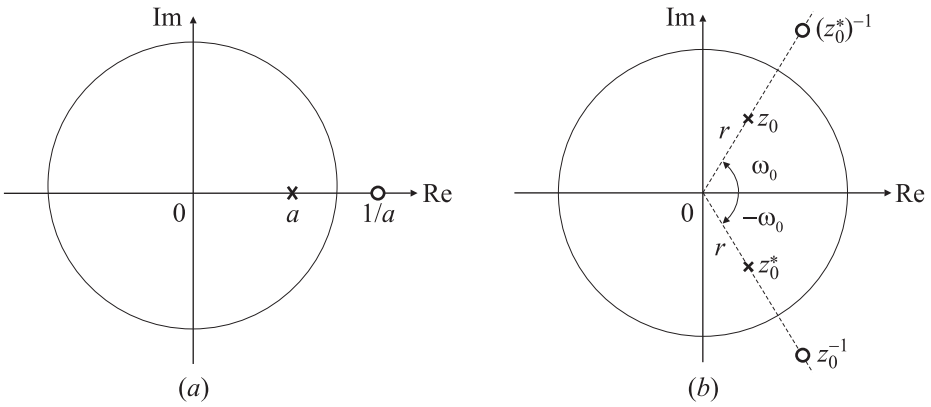


Fig. 8.1. Diagrama de polos y ceros de pasatodos de primer (a) y segundo (b) orden.

la función de sistema puede expresarse como[1]

$$H(z) = z^{-N}\frac{A(z^{-1})}{A(z)}. \tag{8.1}$$

Como $|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = 1$, el sistema (8.1) es un pasatodo. Mas aún, si p_0 es un polo de $H(z)$, entonces $c_0 = 1/p_0$ es un cero de $H(z)$: los ceros del sistema son los recíprocos de los polos. El diagrama de polos y ceros típicos de filtros pasatodo de primer y segundo orden se muestran en la Fig. 8.1(a)-(b), respectivamente.

La forma general de la función de sistema del filtro pasatodo (8.1) con coeficientes a_k reales es

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_R}\frac{z^{-1}-\alpha_k}{1-\alpha_k z^{-1}}\prod_{k=1}^{N_c}\frac{(z^{-1}-\beta_k^*)}{(1-\beta_k z^{-1})}\frac{(z^{-1}-\beta_k)}{(1-\beta_k^* z^{-1})}, \tag{8.2}$$

con N_R polos y ceros reales ($p_k = \alpha_k$, $c_k = \alpha_k^{-1}$) y N_C pares de polos y ceros complejos conjugados [$p_k = \beta_k$, $c_k = (\beta_k^*)^{-1}$]. Para que el sistema sea causal y estable es necesario que $|\alpha_k| < 1$, $|\beta_k| < 1$.

Es interesante estudiar la respuesta de fase y el retardo de grupo de estos filtros. Un examen de (8.2) revela que

$$\begin{aligned}\arg[H(z)]|_{z=1} &= \arg[H(e^{j\omega})]\Big|_{\omega=0} = 0,\\ \arg[H(z)]|_{z=-1} &= \arg[H(e^{j\omega})]\Big|_{\omega=\pi} = -(N_R+2N_C)\,\pi,\end{aligned}$$

de modo que cada sección de primer orden contribuye con un desfasaje total de π rad, y cada sección de segundo orden con un desfasaje total de 2π rad. El retardo de grupo se puede estudiar analizando la función de sistema de cada una de las unidades de primer orden que forman el filtro pasatodos (8.2),

$$H_k(z) = \frac{z^{-1}-\beta_k^*}{1-\beta_k z^{-1}} = \frac{z^{-1}-r_k e^{-j\omega_k}}{1-r_k e^{j\omega_k}z^{-1}}, \tag{8.3}$$

[1] $H(z)$ también puede escribirse como $H(z) = z^{-N}A^*(1/z^*)/A(z)$ si se permite que $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \le k \le N$.

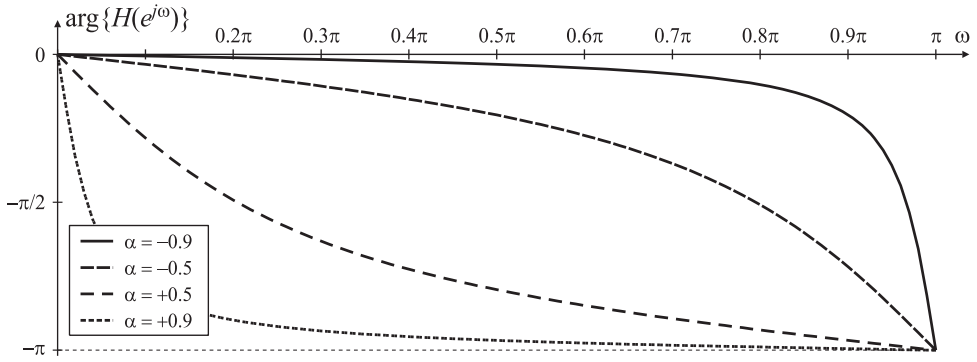


Fig. 8.2. Respuesta en módulo y fase de distintos filtros pasatodos de primer orden.

donde $\beta_k = r_k e^{j\omega_k}$, y r_k, ω_k son el módulo y la fase de los polos, respectivamente (Fig. 8.1). La respuesta en fase y el retardo de cada unidad están dadas por

$$\begin{aligned} \arg[H(e^{j\omega})] &= -\omega - 2\tan^{-1}\frac{r_k \operatorname{sen}(\omega-\omega_k)}{1-r_k\cos(\omega-\omega_k)}, \\ \tau_k(\omega) &= -\frac{d\,\arg[H(e^{j\omega})]}{d\,\omega} = \frac{1-r_k^2}{1+r_k^2-2r_k\cos(\omega-\omega_k)}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

y como $r_k < 1$ para asegurar la estabilidad del sistema, resulta

$$\tau_k(\omega) \geq 0, \quad 0 \leq \omega < \pi.$$

Por lo tanto, el retardo de grupo del filtro pasatodo (8.2), formado por la suma de los retardos de grupo de secciones como (8.3), siempre es positivo.

EJEMPLO **8.1. Respuesta en frecuencia de pasatodos de primer orden**
La Fig. 8.2 muestran las respuesta de fase de filtros pasatodos de primer orden

$$H(z) = \frac{z^{-1}-\alpha_0}{1-\alpha_0 z^{-1}}$$

para distintos valores de $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Si bien el módulo de la respuesta en frecuencia es constante e igual a la unidad, la fase, en cambio, varía según el parámetro α_0. En particular la figura muestra que la fase tiende más rápidamente a π cuando $\alpha_0 > 0$ que cuando $\alpha_0 < 0$. □

Un filtro pasatodo de orden $N = N_R + 2N_C$ permite especificar la fase o el retardo deseados en N frecuencias de interés. El cálculo es sencillo si el orden N es bajo pero el diseño se complica para órdenes superiores. En estos casos es conveniente utilizar herramientas de diseño de filtros más avanzadas, como las que se estudiarán en los Capítulos 11 y12.

8.1.1. Especificación de fase/retardo en un pasatodos de primer orden

En un pasatodos de primer orden la especificación de la fase deseada $\phi_0 = \arg[H(e^{j\omega})]$, $-\pi < \phi_0 < 0$, a una frecuencia $\omega = \omega_0$ determina de manera única la ubicación del polo:

$$\alpha_0 = \frac{\operatorname{sen}[(\phi_0+\omega_0)/2]}{\operatorname{sen}[(\phi_0-\omega_0)/2]}.$$

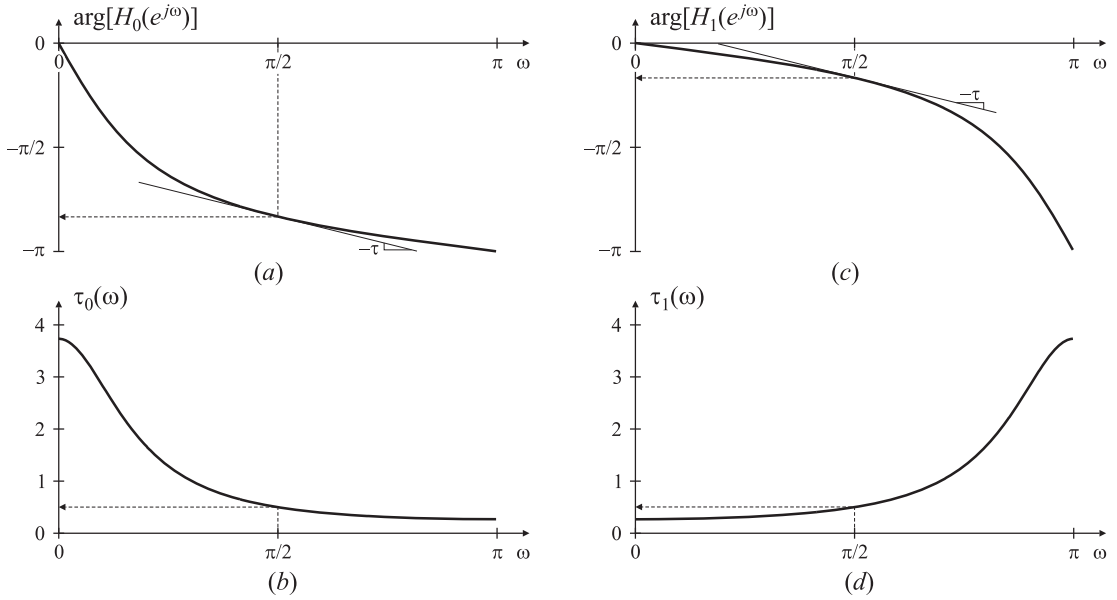


Fig. 8.3. Respuestas de filtros pasatodo con retardo $\tau(\omega) = 1/2$ en $\omega = \pi/2$. Respuesta de fase (a) y retardo de grupo (b) para el pasatodos con polo en $\alpha_0 = 1/\sqrt{3}$. Respuesta de fase (c) y retardo de grupo (d) para el pasatodo con polo en $\alpha_0 = -1/\sqrt{3}$.

Sin embargo, si se especifica el retardo τ_0 deseado a una frecuencia $\omega = \omega_0$, puede haber más de un polo que satisfaga estos requisitos.. De acuerdo con (8.4) el retardo de un pasatodo de primer orden es

$$\tau(\omega) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}. \tag{8.5}$$

El máximo retardo se alcanza en $\omega = 0$ si $\alpha > 0$ o en $\omega = \pi$ si $\alpha < 0$, y su valor es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1+|a|}{1-|a|}.$$

De modo que para tener un retardo $\tau_0 < \tau_{\text{máx}}$ en una frecuencia $\omega = \omega_0$ el polo α debe estar ubicado en

$$\alpha_{0,1} = \frac{\tau_0\cos\omega_0}{1+\tau_0} \pm \frac{\sqrt{1-\tau_0^2(\operatorname{sen}\omega_0)^2}}{1+\tau_0}. \tag{8.6}$$

Las dos posibles soluciones corresponden a polos con parte real positiva o negativa que resultan en respuestas de fase como las ilustradas en la Fig. 8.2; la especificación de la pendiente (el retardo) no determina unívocamente la curva de fase, como revela el siguiente EJEMPLO.

EJEMPLO **8.2. Especificación de retardo en un pasatodos de primer orden**
Se desea que el filtro pasatodo tenga un retardo $\tau_0 = 1/2$ en $\omega = \pi/2$. Aplicando (8.6) se encuentra que

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong +0{,}5774, \qquad \alpha_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cong -0{,}0{,}5774$$

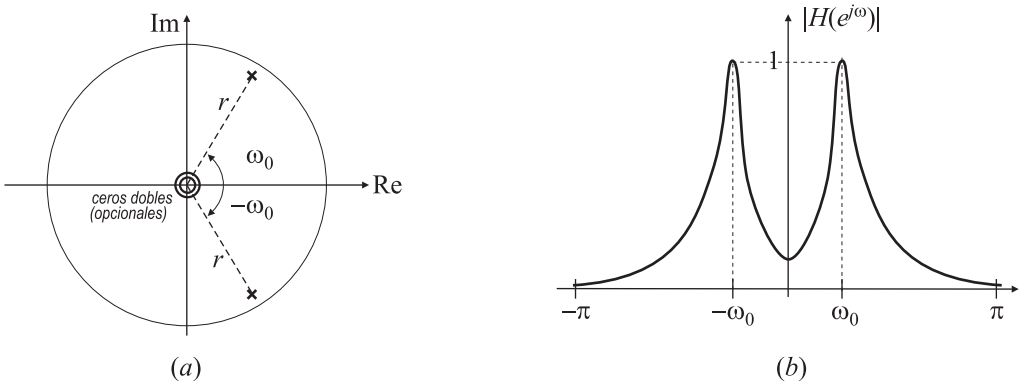


Fig. 8.4. Diagrama de polos y ceros (a) y respuesta en frecuencia (b) de un resonador.

En este caso el retardo máximo es el mismo para cualquiera de los polos: $\tau_{\text{máx}} = (\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}-1) \cong 3{,}73$. La Fig. 8.3($a$) muestra la fase y la Fig. 8.3(b) el retardo de grupo del pasatodos con polo en α_0, mientras que las Figs. 8.3(c) y 8.3(d) las mismas curvas para el pasatodo con polo en α_1. Ambos pasatodos satisfacen las especificaciones de retardo, pero el desfasaje introducido a la frecuencia de interés es mucho mayor para el pasatodos con polo en $\alpha_0 > 0$ que para el que tiene el polo en $\alpha_1 < 0$. □

Los filtros pasatodos encuentran aplicación como ecualizadores de fase. Al conectarse en cascada con otros filtros cuya respuesta de fase es pobre, los filtros pasatodo se diseñan para compensar la característica de fase del filtro, y producir un sistema con una respuesta de fase globalmente lineal.

8.2. Resonadores Digitales

Un resonador digital es un filtro pasabanda especial, con un par de polos complejos conjugados ubicados en la vecindad del círculo unitario, como se muestra en la Fig. 8.4(a); la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro se ilustra en la Fig. 8.4(b). La posición angular de los polos determina la frecuencia de resonancia del filtro. El nombre *resonador* se debe al hecho que el filtro tiene una gran ganancia ("resuena") para señales sinusoidales de frecuencia cercana a la de los polos. Los resonadores digitales son útiles en varias aplicaciones, incluyendo síntesis de voz y filtrado pasabanda sencillo.

Para el diseño de un resonador digital con un pico de resonancia en $\omega = \omega_0$, los polos complejos conjugados se ubican en

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0},\ 0 < r < 1.$$

Además, se pueden colocar hasta dos ceros. Aunque la ubicación de éstos es arbitraria, existen dos casos de interés. Una elección posible es ubicar los ceros en el origen. La otra es ubicar un cero en $z = 1$, y el otro en $z = -1$. Esta elección elimina completamente la respuesta del filtro a las frecuencias $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, y es útil en muchas aplicaciones.

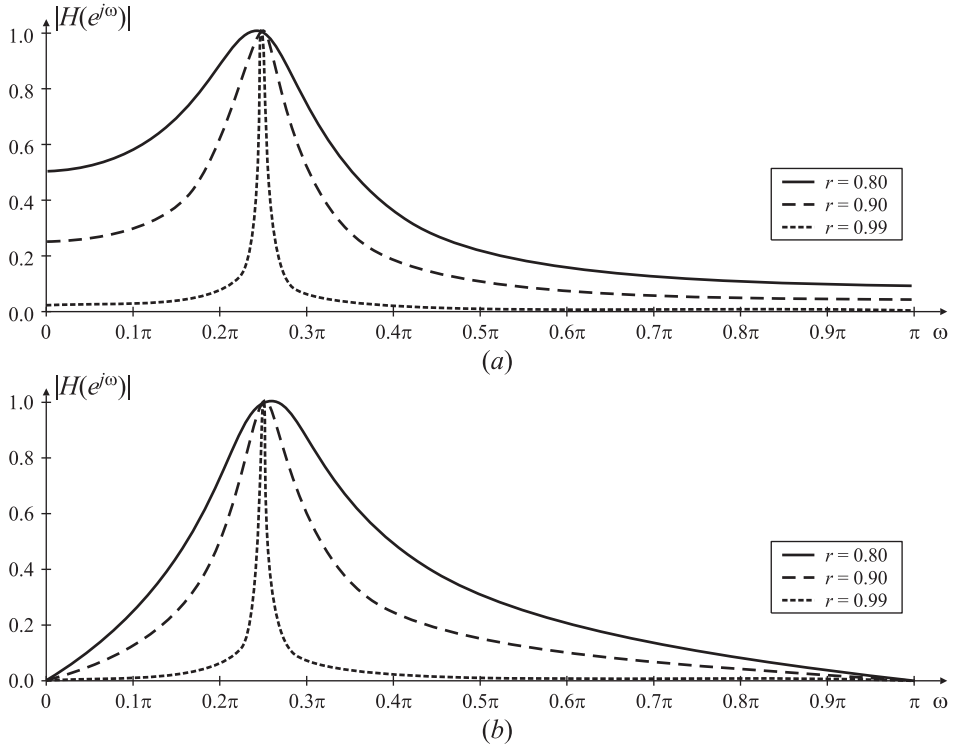


Fig. 8.5. Respuesta en frecuencia de un resonador con ceros en el origen (a); con ceros en $\omega = 0$, $\omega = \pi$ (b).

La función de sistema del resonador digital con ceros en el origen es

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})} \\ &= \frac{b_0}{1 - (2r\,\cos\,\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

La respuesta en frecuencia alcanza su máximo en

$$\omega_r = \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right),$$

que para valores de r próximos a la unidad se puede aproximar por

$$\omega_r = \omega_0 - \frac{(1-r)^2}{2\tan\omega_0} + \frac{(1-r)^3}{2\tan\omega_0} + \cdots$$

Si $r \cong 1$ resulta $\omega_r \cong \omega_0$, y como $|H(e^{j\omega})|$ alcanza su máximo cerca de ω_0, se elige el factor de ganancia b_0 de manera que $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| = 1$. Para este caso,

$$b_0 = (1-r)\,\sqrt{1 - 2\,r\,\cos 2\omega_0 + r^2}.$$

El ancho de banda del filtro es el intervalo de frecuencias donde la magnitud de la respuesta en frecuencia queda comprendida dentro de los ± 3 dB respecto del valor máximo. Cuando r es próximo a la unidad, el ancho de banda del resonador es aproximadamente

$$\Delta\omega \approx 2(1-r). \tag{8.8}$$

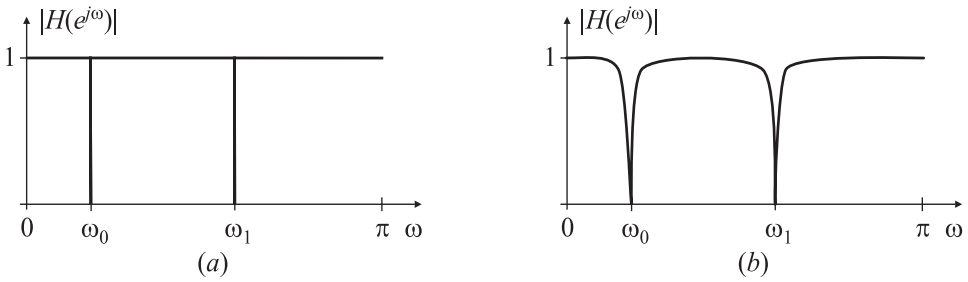


Fig. 8.6. Respuesta en frecuencia típica de un filtro notch ideal (a) y real (b).

EJEMPLO **8.3. Resonador con ceros en el origen con resonancia en $\omega_0 = \pi/4$**
En este ejemplo los polos se ubican en $z_0 = re^{\pm j(\pi/4)}$. La Fig. 8.5(a) muestra el módulo de la respuesta en frecuencia del resonador (8.7) para diferentes valores de r. A medida que r disminuye la frecuencia de resonancia del filtro se desplaza ligeramente hacia la izquierda de ω_0; además, el máximo del módulo de la respuesta en frecuencia es ligeramente mayor que la unidad. Esto se debe a que la frecuencia de resonancia real ω_r no es *exactamente* ω_0; sin embargo, el error es despreciable si $r \cong 1$. □

Si los ceros del resonador se ubican en $z = 1$ y $z = -1$, la función de sistema es

$$H(z) = \frac{b_0(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})} = \frac{b_0(1 - z^{-2})}{1 - (2r\,\cos\,\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}. \tag{8.9}$$

Nuevamente, el valor de b_0 se elige de manera que $\left|H(e^{j\omega_0})\right| = 1$,

$$b_0 = \frac{1 - r}{2\,\mathrm{sen}\,\omega_0}\sqrt{1 - 2\,r\,\cos 2\omega_0 + r^2}.$$

Los ceros en $z = \pm 1$ modifican la respuesta del resonador. Valores de r próximos a 1 permiten obtener filtros más selectivos; a medida que los polos se alejan del círculo unitario aumenta el ancho de banda del filtro y se desplaza ligeramente la frecuencia de resonancia ω_r respecto a la frecuencia de diseño ω_0, como se muestra en el siguiente EJEMPLO.

EJEMPLO **8.4. Resonador con ceros en $z = \pm 1$ con resonancia en $\omega_0 = \pi/4$**
En la Fig. 8.5(b) se muestra un diseño con especificaciones idénticas a las del EJEMPLO anterior, pero implementado con ceros en $\omega = 0$ y en $\omega = \pi$. La función de sistema es

$$H(z) = \frac{(1 - r)\sqrt{1 + r^2}}{\sqrt{2}}\,\frac{(1 - z^{-2})}{1 - r\sqrt{2}z^{-1} + r^2z^{-2}}.$$

A medida que r se aleja del círculo unitario la frecuencia de resonancia es mayor que ω_0, y aumenta el ancho de banda. □

8.3. Filtros Notch

Un filtro notch ideal elimina completamente un pequeño rango de frecuencias dejando inalterado el resto de la banda, como se muestra en la Fig. 8.6(a). En la practica su

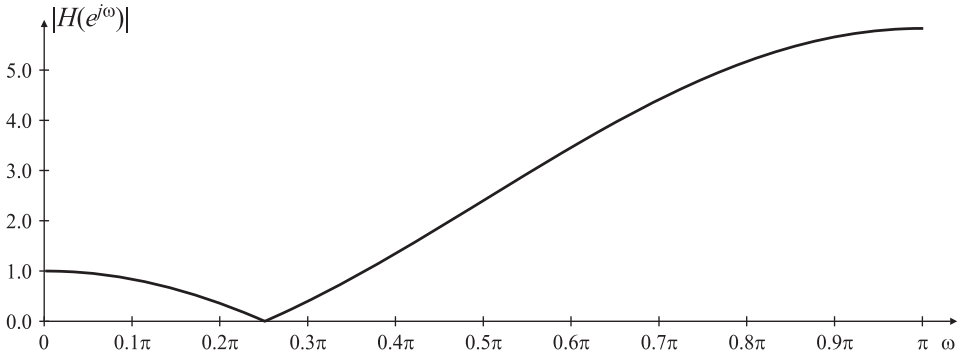


Fig. 8.7. Respuesta en frecuencia del filtro notch tipo FIR.

respuesta en frecuencia presenta uno o más valles profundos (idealmente, ceros perfectos). En la Fig. 8.6(b) se observa una respuesta típica de un filtro notch con ceros en ω_0 y ω_1. Los filtros notch son útiles en muchas aplicaciones donde deben eliminarse algunas frecuencias específicas, por ejemplo, las componentes de 50 ciclos (inducción de la frecuencia de línea) que contaminan señales de muy baja amplitud.

Para crear un cero en la respuesta a la frecuencia $\pm\omega_0$ basta con ubicar un par de ceros complejos conjugados sobre el círculo unitario cuya fase sea ω_0:

$$z_{0,1} = e^{\pm j\omega_0}.$$

Por lo tanto, la función de sistema para el filtro notch es

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 \left(1-e^{j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\omega_0}z^{-1}\right) \\ &= b_0 \left(1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}\right). \end{aligned} \tag{8.10}$$

El inconveniente con este filtro notch (tipo FIR) es que tiene un ancho de banda relativamente grande, lo que significa que no sólo se elimina la frecuencia de interés, sino que también se atenúan (severamente) otras componentes de frecuencias vecinas. Además la ganancia para $\omega = 0$ $(z = 1)$ es diferente de la ganancia en $\omega = \pi$ $(z = -1)$:

$$\begin{aligned} \left|H(e^{j\omega})\right|\Big|_{\omega=0} &= 2b_0(1-\cos\omega_0), \\ \left|H(e^{j\omega})\right|\Big|_{\omega=\pi} &= 2b_0(1+\cos\omega_0). \end{aligned}$$

La diferencia entre ambas puede ser muy grande si la frecuencia que se desea eliminar está cerca de $\omega = 0$ o de $\omega = \pi$. De todas maneras, usualmente el coeficiente b_0 se calcula para que la ganancia de continua sea unitaria, $|H(z)||_{z=1} = \left|H(e^{j\omega})\right|\Big|_{\omega=0} = 1$, de donde resulta que $b_0 = [2\,(1-\cos\omega_0)]^{-1}$.

EJEMPLO **8.5. Filtro notch tipo FIR**
La función de sistema de un filtro notch diseñado para cancelar la frecuencia $\omega_0 = \pi/4$, con ganancia unitaria en $\omega = 0$ es

$$H(z) = \frac{1}{(2-\sqrt{2})}\left(1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right).$$

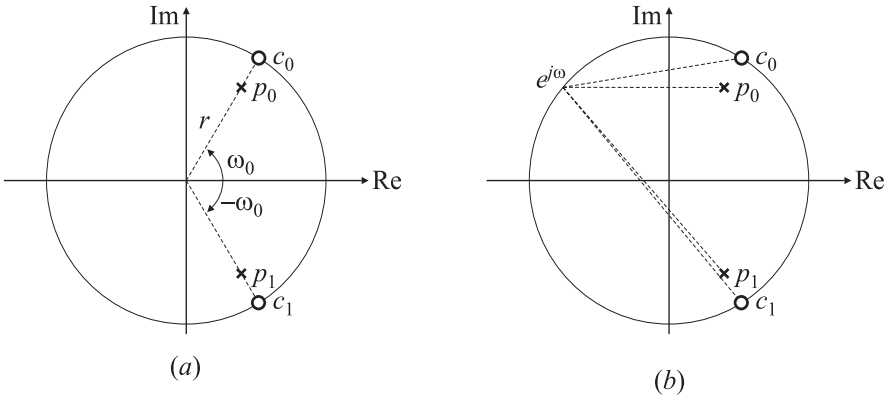


Fig. 8.8. Diagrama de polos y ceros del filtro notch IIR (a). Método del punto explorador (b).

La respuesta en frecuencia del filtro se representa en la Fig. 8.7. Si bien la ganancia es unitaria en $\omega = 0$, este valor crece hasta $(2+\sqrt{2})/(2-\sqrt{2}) \cong 5{,}82$ para $\omega = \pi$; la respuesta del filtro es muy diferente de la indicada en la Fig. 8.6. □

Para reducir el ancho de banda del notch se pueden incorporar polos complejos conjugados. El efecto ubicar un par de polos en $p_{0,1} = re^{\pm j\omega_0}$, como se muestra en la Fig. 8.8(a) es introducir resonancia en la vecindad de los ceros. La función de sistema para el filtro resultante (de tipo IIR) es

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\,\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\,\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \tag{8.11}$$

Nuevamente, el filtro no tiene el mismo valor de ganancia en $\omega = 0$ y en $\omega = \pi$,

$$\left|H(e^{j\omega})\right|\Big|_{\omega=0} = b_0 \frac{2(1-\cos\omega_0)}{1 + r^2 - 2r\cos\omega_0}, \qquad \left|H(e^{j\omega})\right|\Big|_{\omega=\pi} = b_0 \frac{2(1+\cos\omega_0)}{1 + r^2 + 2r\cos\omega_0},$$

pero son similares si r (el módulo de los polos) es cercano a la unidad. Esta propiedad puede corroborarse evaluando el módulo de la respuesta en frecuencia con el método del punto explorador como se ilustra en la Fig. 8.8(b). Para frecuencias ω alejadas de ω_0, $\left|e^{j\omega_0} - c_0\right| \approx \left|e^{j\omega_0} - p_0\right|$, y $\left|e^{j\omega_0} - c_1\right| \approx \left|e^{j\omega_0} - p_1\right|$, y entonces

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\left|e^{j\omega_0} - c_0\right|\,\left|e^{j\omega_0} - c_1\right|}{\left|e^{j\omega_0} - p_0\right|\,\left|e^{j\omega_0} - p_1\right|} \approx 1.$$

También es usual elegir b_0 para que la ganancia de continua sea unitaria, lo que resulta en

$$b_0 = \frac{1 - 2\,r\,\cos\omega_0 + r^2}{2\,(1 - \cos\omega_0)}.$$

La presencia de los polos puede introducir un pequeña ondulación en la banda de paso del filtro, debida a fenómenos de resonancia. Este efecto se puede reducir agregando polos y ceros adicionales. El problema con esta solución es que no existe una regla general para eliminar la ondulación, y el método se convierte en uno de prueba y error.

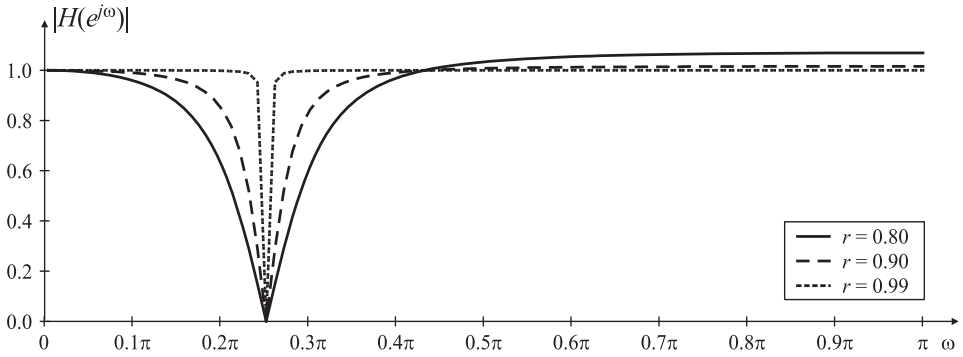


Fig. 8.9. Respuesta en frecuencia del filtro notch tipo IIR.

EJEMPLO **8.6. Filtro notch tipo IIR**
La función de sistema de un filtro notch tipo IIR (8.11) diseñado para bloquear componentes de frecuencia $\omega_0 = \pi/4$ es

$$H(z) = \frac{1 + r^2 - \sqrt{2}r}{2 - \sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - r\sqrt{2}z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

El par de polos complejos conjugados están ubicados en $p_{0,1} = re^{\pm j\omega_0}$. En la Fig. 8.9 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia para distintos valores de r. La selectividad del filtro mejora a medida que $r \to 1$, y su comportamiento similar al del prototipo ideal de la Fig. 8.6(a). □

8.3.1. Filtros notch basados en pasatodos

Una manera de obtener muy buenos filtros notch es utilizando filtros pasatodos. Como la fase de un pasatodo de segundo orden varía desde 0 hasta -2π a medida que la frecuencia ω varía desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \pi$, el filtro

$$H\,(z) = \frac{1}{2}\left[1 + H_{PT}(z)\right], \tag{8.12}$$

donde $H_{PT}(z)$ es un pasatodos de segundo orden, tiene un cero dentro de la banda de paso; precisamente, en la frecuencia ω_0 donde $H_{PT}(e^{j\omega_0}) = -1$, cuando la fase es de $(-\pi)$ radianes. Además, de (8.12) es evidente que

$$H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 1, \qquad H(e^{j\omega_0}) = 0,$$

Los filtros notch generados a partir de pasatodos tienen la ventaja que la ganancia es uniforme a cada lado de la frecuencia del cero, que es una mejora importante frente a la respuesta de los notch generados por ubicación directa de polos y ceros de la Sección 8.3. Si $H_{PT}\,(z) = (a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2})/(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$, $H(z)$ se puede expresar como

$$H\,(z) = \frac{1}{2}\frac{(1 + a_2) + 2a_1 z^{-1} + (1 + a_2)z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

que bajo la sustitución $a_2 = k_2$, $a_1 = k_1(1 + k_2)$ resulta

$$H\,(z) = \frac{(1 + k_2)}{2}\frac{1 + 2k_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + k_1(1 + k_2)z^{-1} + k_2 z^{-2}}. \tag{8.13}$$

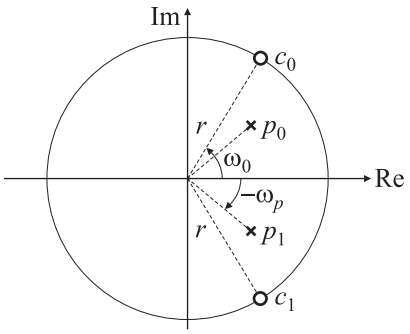


Fig. 8.10. Diagrama de polos y ceros del filtro notch basado en pasatodos.

Los coeficientes k_1 y k_2 se pueden relacionar directamente con parámetros frecuenciales significativos. Si ω_0 es la frecuencia del cero y $\Delta\omega_0$ el ancho de bada de -3 dB, se puede encontrar que

$$k_1 = -\cos\omega_0, \qquad k_2 = \frac{1-\tan(\Delta\omega_0/2)}{1+\tan(\Delta\omega_0/2)}. \tag{8.14}$$

Los ceros de (8.13) son $c_{0,1} = e^{\pm j\omega_0}$, bloqueando efectivamente las frecuencias indeseadas. Los polos de (8.13) se pueden expresar como $p_{0,1} = re^{\pm j\omega_p}$, con

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{k_2} = \sqrt{a_2}, \\ \omega_p &= \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right) \cong \cos\omega_0 - \frac{(1-r)^2}{2\tan\omega_0} + \frac{(1-r)^3}{2\tan\omega_0} + \cdots \end{aligned}$$

donde la última aproximación es válida para $r \cong 1$. Esta última expresión revela que los polos no tienen la misma fase que los ceros, sino que se encuentran ligeramente desplazados (Fig. 8.10).

EJEMPLO **8.7. Filtro notch basado en pasatodos**
Los parámetros de un filtro notch que bloquee completamente la frecuencia $\omega_0 = \pi/3$, y que tenga un ancho de banda de -3 dB de $\Delta\omega = 0{,}1\pi$ se derivan de (8.14):

$$k_1 = \cos(\pi/3) = 1/2, \qquad k_2 = \frac{1-\tan(0{,}05\pi)}{1+\tan(0{,}05\pi)} \cong 0{,}726543.$$

La función de sistema es

$$H(z) = 0{,}8633\frac{1-z^{-1}+z^{-2}}{1-0{,}8633z^{-1}+0{,}7265z^{-2}},$$

que tiene ceros en $c_{0,1} = e^{\pm j\pi/3}$, y polos en $p_{0,1} = 0{,}8524e^{\pm j0{,}3310\pi}$. Los ceros yacen sobre el círculo unitario, con fase $\pi/3$, bloqueando efectivamente la componente de frecuencia deseada. Los polos están dentro del círculo unitario, pero no tienen la misma fase de los ceros (es apenas menor que $\pi/3$). La Fig. 8.11 muestra la respuesta en frecuencia de este filtro y también la de otros con la misma frecuencia de rechazo $\omega_0 = \pi/3$ pero distintos anchos de banda ($\Delta\omega_0 = 0{,}2\pi$ y $\Delta\omega_0 = 0{,}3\pi$). La respuesta es mucho más parecida a la ideal de la Fig. 8.6(a). □

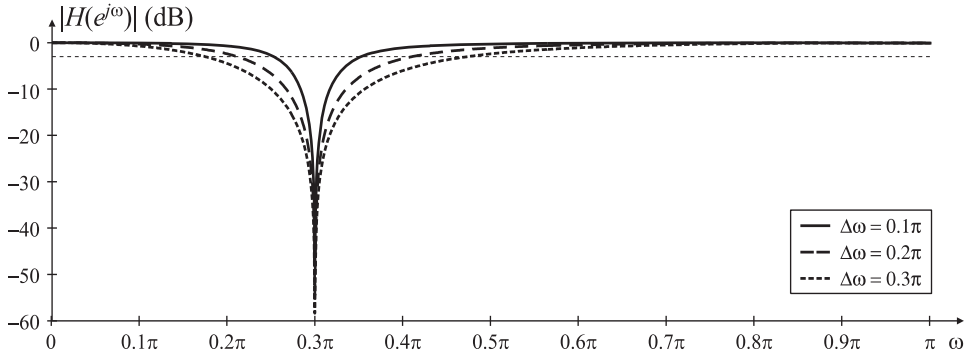


Fig. 8.11. Respuesta en frecuencia de filtros notch basados en pasatodos que bloquean la frecuencia $\omega_0 = 0{,}3\pi$ con diferentes anchos de banda: $\Delta\omega = 0{,}1\pi$, $0{,}2\pi$, $0{,}3\pi$.

8.4. Filtros Peine

Tradicionalmente, el "filtro peine" definía un filtro tipo notch en el cual los ceros se repetían periódicamente en la banda de frecuencias; de esta forma se podía cancelar una frecuencia no deseada y todas sus armónicas, dejando inalterada el resto de la banda. En la actualidad se denomina "filtro peine" a aquel cuya respuesta en frecuencia (no necesariamente un notch) se repite un número determinado de veces en el intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$. Los filtros peine se utilizan en gran cantidad de aplicaciones, como por ejemplo para eliminar armónicas de la frecuencia de línea, separar las componentes lunares y solares en las mediciones de concentración de electrones en la ionosfera, eliminar armónicas de la frecuencia de barrido horizontal en televisión, etc.

Un ejemplo de un filtro peine sencillo es el filtro FIR promediador

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k],$$

cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{N}\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-1}{z-1}, \tag{8.15}$$

y la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2}}{N}\frac{\operatorname{sen}(N\omega/2)}{\operatorname{sen}\omega/2}.$$

De (8.15) se observa que el filtro promediador tiene ceros sobre el círculo unidad ubicados en

$$c_k = e^{j2\pi k/N}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, N-1.$$

El polo en $z = 1$ se cancela con el cero en $z = 1$, por lo que el sistema sólo tiene $N-1$ polos en el origen, y $N-1$ ceros sobre el círculo unidad. La magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro con $N = 8$ se muestra en la Fig. 8.12. Los ceros están equiespaciados en el eje de frecuencias, lo que significa que el filtro anulará las componentes de frecuencia "indeseables" $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 1, \ldots, N-1$. Sin embargo, la ganancia para el resto de las frecuencias dista de ser uniforme.

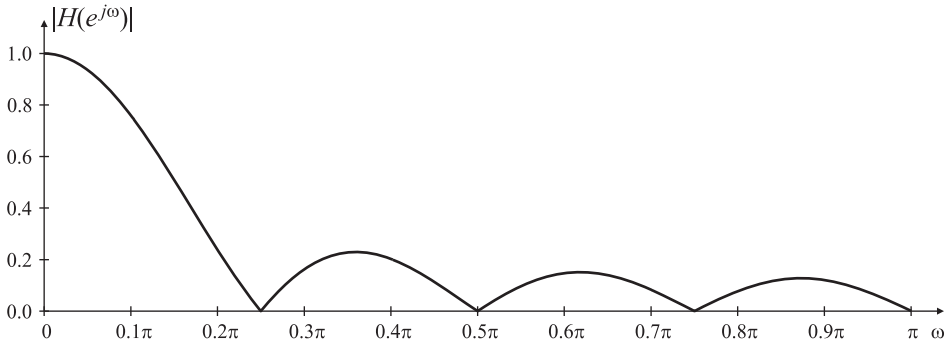


Fig. 8.12. Filtro peine: promediador con $N = 8$.

Un filtro peine generalizado puede generarse a partir de un filtro cualquiera, por ejemplo uno con función de sistema

$$H(z) = \sum_n h\,[n]\, z^{-n},$$

reemplazando z por z^L, donde L es un entero positivo. Esta sustitución corresponde a un *escalado en frecuencia*. El filtro peine tiene la función de sistema

$$H_L(z) = \sum_n h\,[n]\, z^{-nL}. \tag{8.16}$$

Si la respuesta en frecuencia del filtro original es $H(e^{j\omega})$, la respuesta en frecuencia del filtro peine es

$$H_L(e^{j\omega}) = \sum_n h\,[n]\, e^{-jnL\omega} = H(e^{j\omega L}).$$

En consecuencia, la respuesta en frecuencia de $H_L(e^{j\omega})$ es la respuesta $H(e^{j\omega})$ "comprimida" en frecuencia en un factor $(1/L)$ y repetida L veces en el intervalo $0 \leq \omega \leq 2\pi$. En la Fig. 8.13 se muestra la relación entre $H_L(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$ para $L = 5$.

Si el filtro FIR original con función de sistema $H(z)$ tiene un cero en una frecuencia ω_0, el filtro peine con función de sistema $H_L(z)$ tendrá L ceros espaciados periódicamente en $\omega_k = (\omega_0 + 2\pi k)/L, k = 0, 1, 2, ..., L-1$.

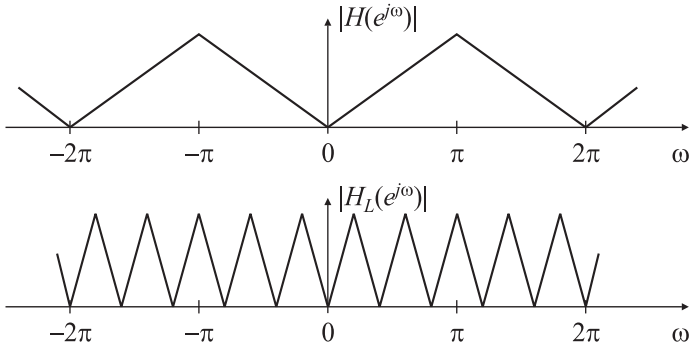


Fig. 8.13. Filtro peine diseñado por el método de escalado en frecuencia.

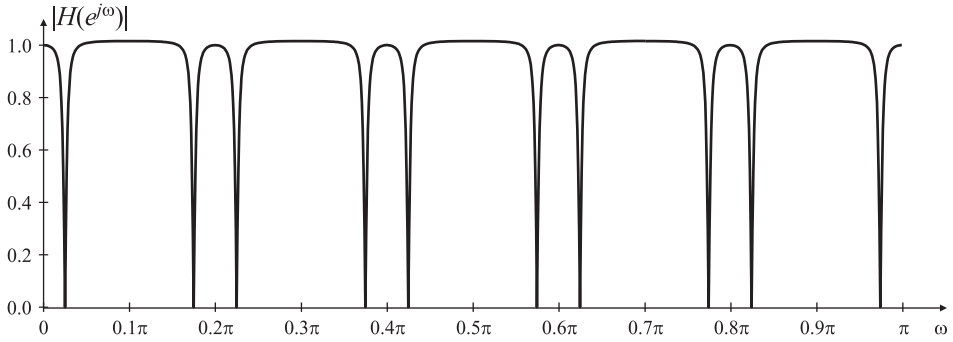


Fig. 8.14. Filtro peine diseñado por el método de escalado en frecuencia.

De la expresión (8.16) de $H_L(z)$ se deriva que la respuesta impulsiva del peine es

$$h_L[n] = \begin{cases} h[n/L], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } L, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En otras palabras, la respuesta impulsiva del peine está formada por la respuesta impulsiva del filtro prototipo a la cual se han intercalado $L-1$ ceros entre cada muestra. Se dice que $h_L[n]$ es la versión *sobremuestreada* por L de $h[n]$.

EJEMPLO **8.8. Filtros peine tipo notch**
En la Fig. 8.14 se muestra un filtro peine tipo notch diseñado con esta técnica, con $L = 10$. El filtro prototipo es el notch del EJEMPLO 8.6. La función de sistema es

$$H(z) = \frac{1 + r^2 - \sqrt{2}r}{2 - \sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{2}z^{-L} + z^{-2L}}{1 - r\sqrt{2}z^{-L} + r^2 z^{-2L}}.$$

Los ceros del notch original están ubicados en $\omega_0 = \pi/4$ (y por lo tanto también en $\omega_1 = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$); en el filtro peine esos ceros se mapean a $(\omega_0 + 2\pi k)/10$, $(\omega_1 + 2\pi k/10)$, $k = 1, 2, ..., 10$. □

EJEMPLO **8.9. Filtro peine tipo resonador**
En la Fig. 8.15 se muestra el filtro peine derivado del filtro resonador del EJEMPLO 8.4. La función de sistema para $r = 0{,}9$ es

$$H(z) = \frac{(1-r)\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{2}} \frac{(1 - z^{-2L})}{1 - r\sqrt{2}z^{-L} + r^2 z^{-2L}}$$ □

EJEMPLO **8.10. Filtros peine: aplicaciones en astronomía**
Una aplicación original de los filtros peine es la separación de las componentes espectrales debidas a los efectos de la luna y del sol en la medición de la concentración de electrones libres en la ionosfera. El período solar es de $T_s = 24$ horas, y resulta en una componente solar de un ciclo por día y sus armónicas. El período lunar es $T_L = 24{,}84$ horas, y genera líneas espectrales a $0{,}96618$ ($\cong 24/24{,}84$)ciclos por día y sus armónicas. La Fig. **??** (*a*) muestra el espectro de densidad de potencia de la concentración de electrones tal como ha sido medida (es decir, sin filtrar). Las débiles

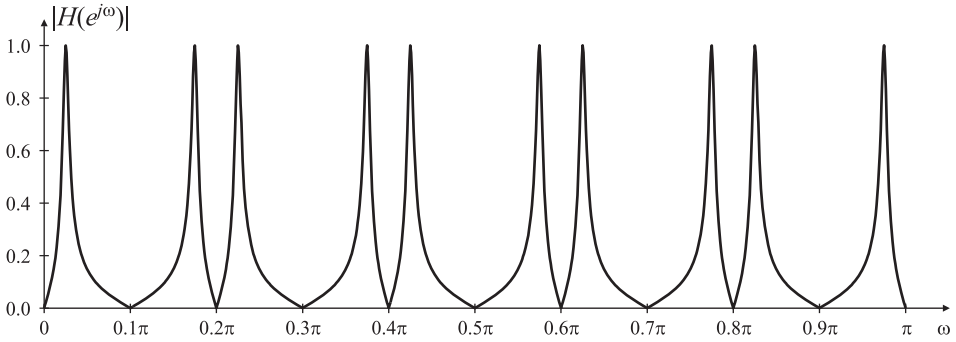


Fig. 8.15. Filtro peine tipo resonador.

componentes lunares están prácticamente enmascaradas por las fuertes componentes espectrales debidas al sol. Los dos conjuntos de componentes espectrales pueden separarse usando filtros peine construidos en base a filtros promediadores (8.15)

$$H_L(z) = \frac{1}{N}\frac{1-z^{-LN}}{1-z^{-L}}.$$

Para rescatar las componentes solares se debe usar un filtro con un ancho de banda muy angosto, con ceros ubicados en las frecuencias de un ciclo por día y sus armónicas. Para ello se elige L de manera que $F_s/L = 1$ ciclo por día, donde F_s es la frecuencia de muestreo (cada cuánto tiempo se efectúan las mediciones). Resulta entonces un filtro cuya respuesta en frecuencia tiene ceros a la frecuencia de un ciclo por día y sus múltiplos. Eligiendo el filtro promediador con $N = 59$, sus ceros se ubicarán en múltiplos de $(F_s/L)/N = 1/59$; en otras palabras, entre cada pico de ganancia unitaria del promediador quedan intercalados 58 ceros, que quedan próximos a la frecuencia de las componentes lunares, y por lo tanto resultan prácticamente eliminadas. La Fig. **??**(b) muestra el espectro de la densidad de potencia de la salida del filtro peine que rescata las componentes

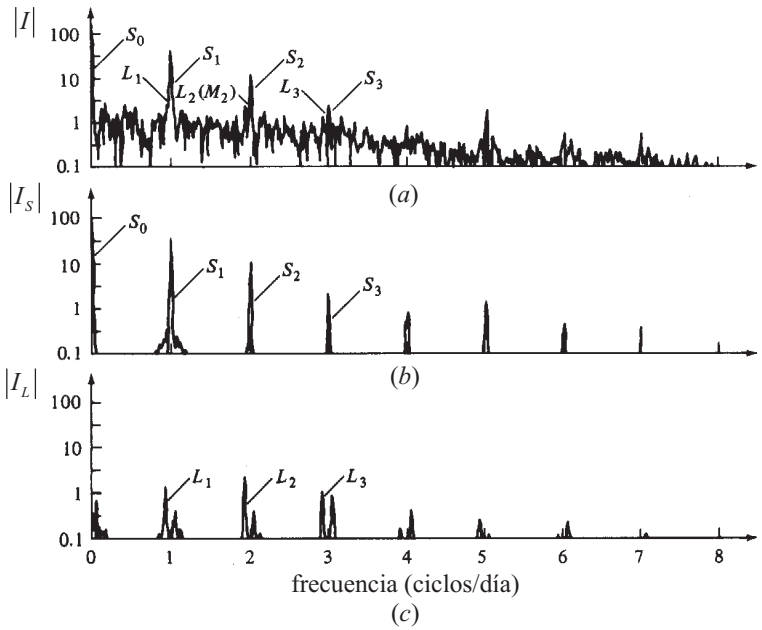


Fig. 8.16. Empleo de filtros peine para separar las componentes lunares y solares de la concentración de electrones libres en la ionosfera.

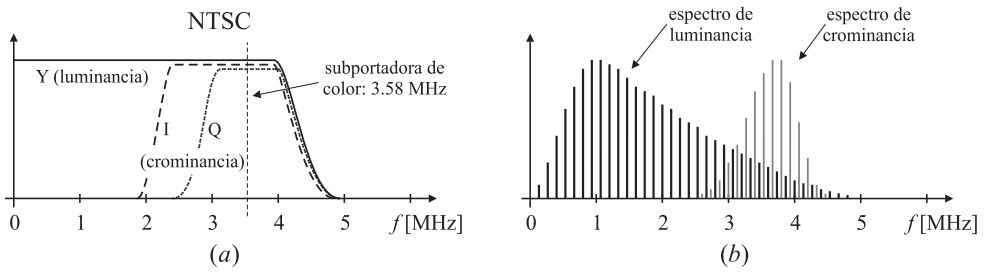


Fig. 8.17. Señal de video compuesto NSTC. (a) Anchos de banda de las señales de crominancia y luminancia. (b) Espectro de la señal de video compuesto.

solares. De forma similar puede diseñarse un filtro que rechace las componentes solares y rescate las componentes lunares; el espectro de la densidad de potencia de este filtro se muestra en la Fig. **??** (c). □

8.4.1. Aplicaciones de filtros peine en TV

Los filtros peine también encuentran aplicación en los receptores de televisión. La señal de video compuesto está formada por tres componentes:

- la señal de *luminancia*, que se extiende desde 0 Hz hasta 5.5 MHz, y que refleja los detalles de la imagen en blanco y negro;
- la información de color (señal de *crominancia*) modulada sobre una portadora de 3.58 MHz en NTSC (4.43 MHz en PAL);
- las señales de *sincronismo* horizontal y vertical.

La siguiente tabla detalla las relaciones entre las frecuencias de cuadro, de línea y de portadora de color para ambas normas.

Parámetro	NTSC	PAL
frecuencia de cuadro f_F	30 Hz	25 Hz
frecuencia de línea f_L	$525 f_F = 15{,}750$ kHz	$625 f_F = 15{,}625$ kHz
portadora de color f_c	$119\,437{,}5 f_F = 227{,}5 f_L$ $= 3{,}58$ MHz	$177\,187{,}5 f_F = 283{,}5 f_L$ $= 4{,}42$ MHz

Las tres componentes analógicas de la señal de video compuesto son suficientes para recomponer una imagen bidimensional en el tubo de rayos catódicos (TRC) del televisor.

La señal de luminancia representa el nivel de intensidad de la imagen. Es la que necesita mayor ancho de banda (5 MHz típico), y el brillo, el contraste y la nitidez dependen exclusivamente de ella. La información de color o crominancia se agregó en 1947, cuando se desarrolla la TV en colores, utilizando una ingeniosa técnica de modulación que permite mantener la compatibilidad con los receptores monocromáticos existentes.

A partir de la señal RGB de la cámara, se generan la señal de luminancia Y, y las señales de diferencia de color, denominadas I y Q en NTSC (U y V en PAL)

$$\begin{aligned} Y &= 0{,}299R + 0{,}587G + 0{,}114B, \\ I &= 0{,}596R - 0{,}275G - 0{,}321B, \\ Q &= 0{,}212R - 0{,}523G + 0{,}311B. \end{aligned}$$

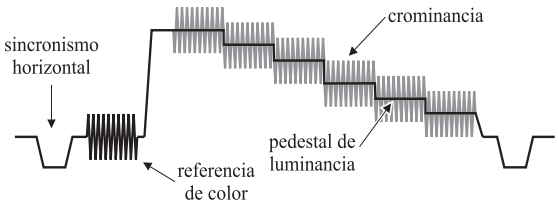


Fig. 8.18. Señal de línea típica de video compuesto.

La señal de crominancia se modula en cuadratura sobre la información de luminancia. La señales de diferencia de color (I/Q, U/V) ocupan un ancho de banda menor que la señal de luminancia Y [Fig. 8.17(a)] pues el ojo humano es más sensible a variaciones de iluminación que de color. En NTSC el ancho de banda de la información de color se restringe entre los 0.6 y 1.3 MHz, y se modula con una portadora f_c de 3.58 MHz,

$$C = I\cos(2\pi f_c t) + Q\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t).$$

En PAL el ancho de banda es el mismo para las dos señales U, V y la frecuencia de la portadora f_c es de 4.43 MHz. El espectro típico de las señales Y y C se muestra en la Fig. 8.17(b) .

La señal de video compuesto también lleva información de sincronismo, que ocupa una parte importante del rango de amplitud disponible para la señal de video. El sincronismo horizontal y el tono de referencia de color ocupan la primera parte de la señal de línea, como muestra la Fig. 8.18; el sincronismo vertical se agrega cada 262.5 líneas (cada 312.5 líneas en PAL).

Para recomponer la imagen, de la señal de video compuesto deben extraerse la señal de color C y la señal de luminancia Y, lo que no es sencillo pues comparten la porción del espectro entre los 2.5 y 5 MHz, aproximadamente, como se observa en la Fig. 8.17(b). Para lograr separar estas componentes se han propuesto diferentes técnicas a lo largo de los años, con mejor desempeño a medida que aumenta la complejidad de la solución.

La técnica más sencilla emplea un par de filtros como muestra la Fig. 8.19(a): la señal de luminancia se recupera a la salida de un filtro pasabajos con frecuencia de corte entre 2.0 y 2.5 MHz, y la de crominancia a la salida de un filtro pasabanda (conocida en la jerga como "trampa"), con banda de paso entre 2.5 MHz y 5 MHz. El problema con esta técnica es que se pierde información de detalle, porque se truncan las componentes de alta frecuencia de la señal de luminancia [Fig. 8.19(b)]: los bordes se vuelven difusos, y la imagen pierde nitidez. Otros problemas son una gran interacción entre luminancia y crominancia: una señal con colores fuertes altera el nivel de brillo. Aunque el método es de bajo costo, la calidad de video que se obtiene es baja, y en la actualidad se utiliza sólo en reproductores de video muy económicos.

Una mejora es utilizar un filtro *notch* [Fig. 8.19(c)] para recuperar la señal de luminancia, y un pasabanda o trampa para obtener la señal de color. Aunque se recupera en cierta manera el nivel de detalle, pues se rescatan algunas componentes de alta frecuencia de la señal de luminancia [Fig. 8.19(d)], el ancho de banda acotado del canal C limita la coloración de los detalles de la imagen. Además la señal de luminancia con componentes frecuenciales en la banda de paso del notch contamina la salida del filtro generando colores indeseados. Este efecto se más notable cuando las imágenes están compuestas por

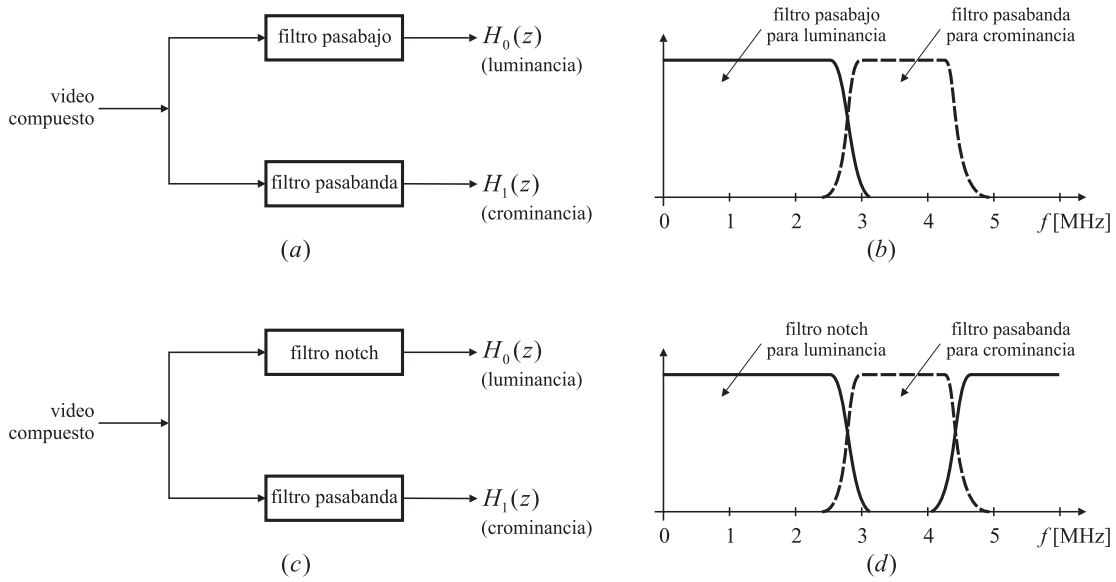


Fig. 8.19. Separación de las señales de luminancia y crominancia usando una "trampa" de color. (a, b) Esquema y respuesta en frecuencia del filtro pasabajos/pasabanda; (c, d) Diagrama bloque y respuesta en frecuencia del filtro notch/pasabanda.

tramas des líneas blancas y negras: las componentes de alta frecuencia de la luminancia producen un abanico de colores.

Tanto el decodificador basado en el filtro pasabajos como en el filtro notch tienen problemas con los gráficos superpuestos a la imagen de video (subtítulos, logos, etc.), que generalmente tienen alta intensidad de color, y debido a sus bordes bien definidos tienen altas componentes de frecuencia.

Un tercer método aprovecha las características espectrales de las señales Y y C. Para imágenes estáticas, las señales Y, I y Q tienen un espectro en frecuencia discreto. Sus componentes espectrales están separadas entre sí la frecuencia f_F de un cuadro ($f_F = 30$ Hz en NTSC, 25 Hz en PAL). Al modular las señales I, Q con la portadora f_c se centra su espectro alrededor de f_c. Esta frecuencia se elige de manera que caiga en medio de dos armónicos de la frecuencia de cuadro: f_c es exactamente 119 437,5 veces la frecuencia de cuadro f_F:

$$f_c = 119\,437{,}5 f_F = 3{,}583125\,\text{MHz}.$$

($f_c = 177187{,}5 f_F = 4{,}4296875$ MHz en PAL). Por lo tanto, las líneas espectrales de las componentes Y y C queden entrelazadas, y la diferencia entre ellas es de media frecuencia de cuadro, como se muestra en la Fig. 8.17(b).

En realidad hay dos niveles de periodicidad: una microestructura asociada a la frecuencia de cuadro $f_F = 30$ Hz ($f_F = 25$ Hz en PAL), y una macroestructura asociada a la frecuencia de línea f_L, que es 525 veces la frecuencia de cuadro (625 en PAL). La señal C está desplazada en $f_c = 119\,437{,}5 f_F = 227{,}5 f_L$ ($f_c = 177187{,}5 f_F = 283{,}5 f_L$ en PAL), y por lo tanto sus componentes frecuenciales yacen en medio de las líneas espectrales de la señal de luminancia. Como la frecuencia de línea f_L es un múltiplo exacto de la frecuencia de cuadro f_F, el espectro de la señal C tampoco se superpone sobre la microestructura de cuadro; en la Fig. 8.17(b) sólo se ha graficado la información de la macroestructura para

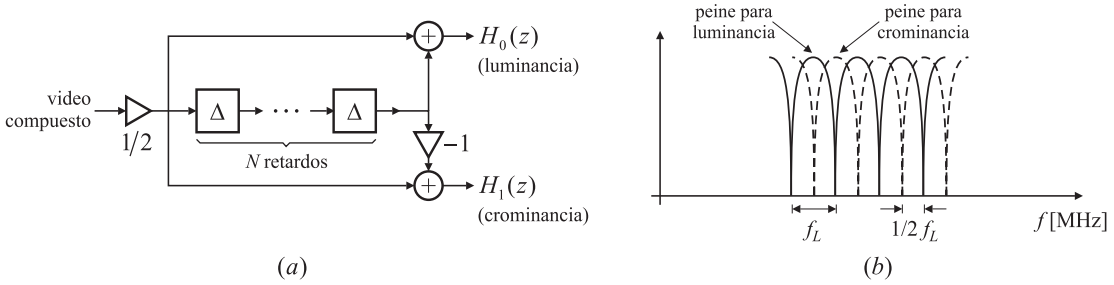


Fig. 8.20. Esquema de un filtro peine para TV (a). Respuesta en frecuencia del filtro. (b).

no complicar el gráfico.

La distribución espectral de las señales sugiere que ambas componentes pueden recuperarse filtrando la señal de video compuesta con un par de filtros peine, cuya estructura se muestra en la Fig. 8.20(a). Las funciones de sistema son

$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-N}),$$

con ceros en $c_k = e^{j\omega_k}$, $\omega_k = (2k+1)\pi/N$, $0 \leq k \leq N-1$, y

$$H_1(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-N}),$$

con ceros en $c_k = e^{j\omega_k}$, $\omega_k = 2k\pi/N$, $0 \leq k \leq N-1$. Los ceros de $H_0(z)$ y de $H_1(z)$ quedan entrelazados. La respuesta en frecuencia de ambos filtros se muestra en la Fig. 8.20(b) . La Fig. 8.21(a) muestra la eliminación de las componentes de crominancia, y la Fig. 8.21(b) la eliminación de las de luminancia.

La diferencia de calidad de cada una de las soluciones se ilustra en la Fig. 8.22. La Fig. 8.22(a) muestra la forma temporal de una línea de video generada por un generador patrón, y la Fig. 8.22(b) una imagen de la pantalla de TV de un cuadro formado por un conjunto de líneas idénticas a las de la Fig. 8.22(a). La abscisa (en MHz) indica la componente frecuencial dominante de la señal de luminancia en cada parte de la pantalla.

La Fig. 8.22(c) muestra la respuesta del filtro pasabajos/pasabanda de la Fig. 8.19(c) cuando se lo excita con la señal del generador de la Fig. 8.22(a). En la gráfica temporal se observa la atenuación de las frecuencias por encima de 2 MHz, y en la imagen [Fig. 8.22(d)] se nota la pérdida de definición de la trama de líneas finas a la derecha del gráfico.

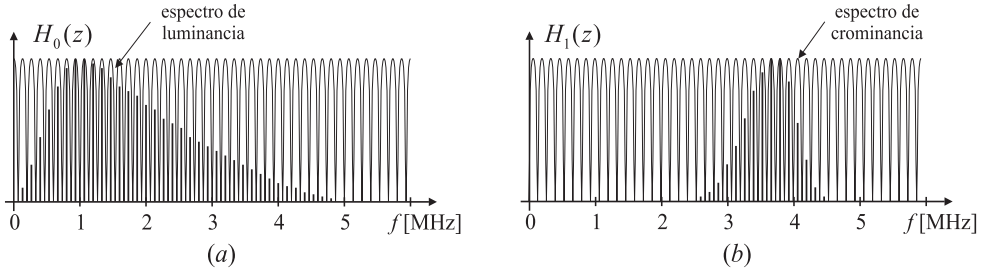


Fig. 8.21. Composición espectral de la salida de los filtros peine de la Fig. 8.20(a) .

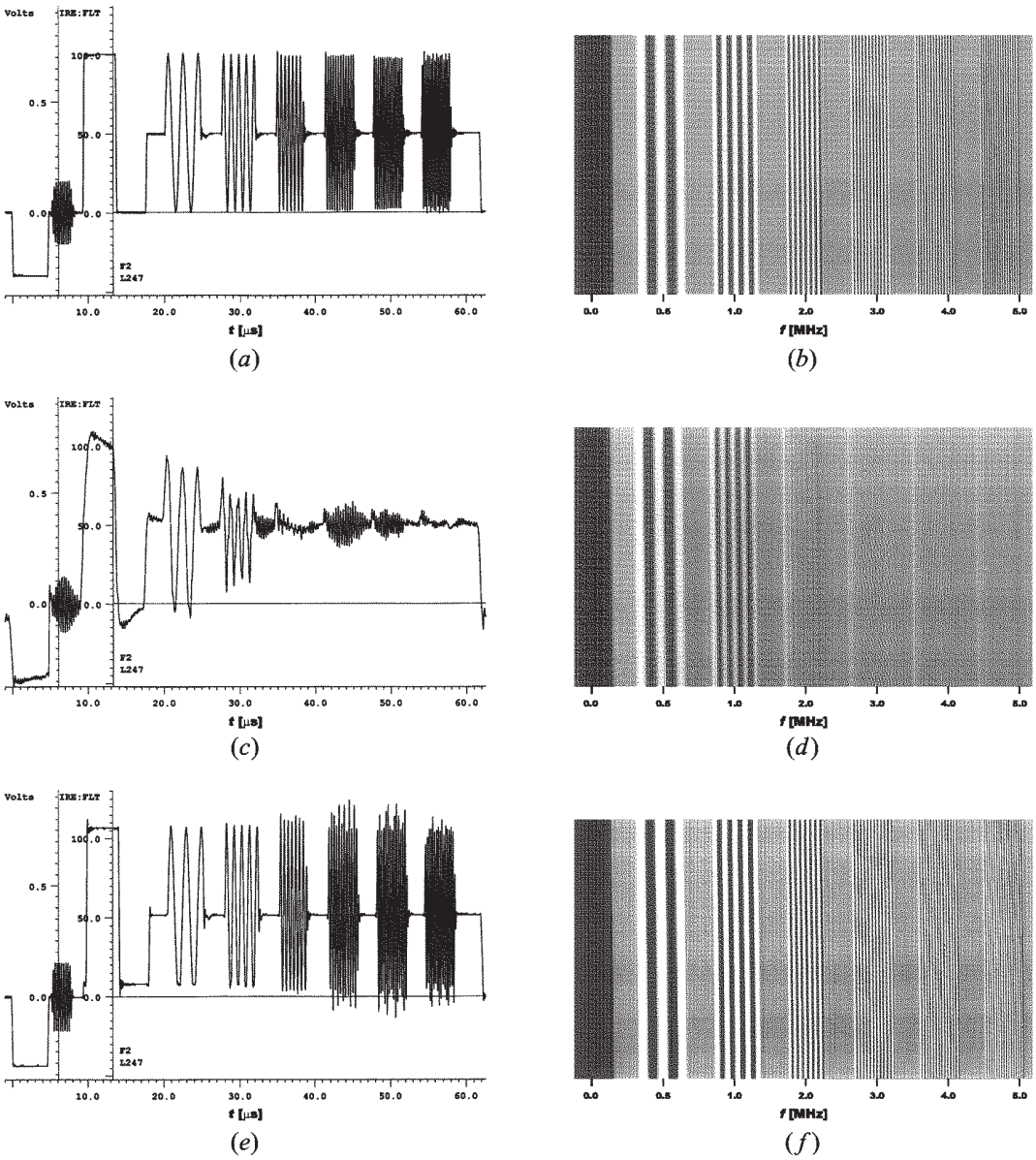


Fig. 8.22. Comparación de la respuesta de los decodificadores. Las figuras de la izquierda muestran las señales temporal de video compuesto, y las figuras de la derecha la imagen sobre la pantalla del TV. (a)-(b) Generador de video. (c)-(d) Separador con filtro pasabajo/pasabanda. (d)-(e) Separador con filtro peine de línea.

En la Fig. 8.22(e) se aprecia la señal a la salida del filtro peine de línea. Los pulsos se recuperan prácticamente sin distorsión, y la imagen muestra un nivel de definición similar al proporcionado por el generador [Fig. 8.22(f)].

La cantidad N de retardos puede igualar la duración de una *línea*, para remover el entrelazado de la macroestructura, o la duración de un *cuadro*, para eliminar el entrelazado de la microestructura. Esto da origen a dos tipos de filtros: el peine de línea y el peine de cuadro.

El efecto del filtro *peine de línea* es promediar un par de líneas consecutivas de la señal de video, y electrónicamente se implementa utilizando una línea de retardo analógica: el filtro $H_0(z)$ actúa como un filtro pasabajos para dos líneas horizontales consecutivas de la señal de video, "borroneando" la señal de luminancia. Como no elimina la microestructura asociada a la frecuencia de cuadro f_F, las señales con altos niveles de color y transiciones abruptas pueden hacer que la información de color sea mayor que la información de luminancia de alta frecuencia, dando lugar a la aparición una serie de puntos blancos horizontales ("crawl dots").

La separación entre ambas señales se puede mejorar si la cadena de retardos iguala la duración de un *cuadro* de la señal (525 líneas en el sistema NTSC, 625 en PAL). Temporalmente equivale a promediar cada punto de la imagen con su homólogo del cuadro previo, un proceso similar al que efectúa el ojo humano. Los inconvenientes son su elevado costo, y problemas con las imágenes que varían significativamente de un cuadro a otro.

Este problema se resuelve en equipamiento profesional utilizando filtros peine adaptivos, que conmutan entre un peine de cuadro o de línea cuando ocurre una abrupta variación vertical, pero es demasiado costoso para los equipos hogareños. Ello ha impulsado el formato S-video, donde las señales de luminancia y crominancia están disponibles de manera independiente, eliminando todos los efectos adversos de la modulación. La "*S*" se refiere, precisamente, a "*separated* luminance and chrominance analog signals". Evidentemente es un estándar analógico, y no satisface los requerimientos de calidad impuestos para las señales de video digital.

8.5. Osciladores sinusoidales digitales

Un oscilador digital sinusoidal puede pensarse como la forma límite de un resonador digital, donde los polos yacen sobre el círculo unitario. La función de sistema del resonador de dos polos es

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - (2r\,\cos\,\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

Este filtro tiene polos complejos conjugados en $p_{0,1} = re^{\pm j\omega_0}$, y respuesta impulsiva

$$h[n] = \frac{b_0 r^n}{\operatorname{sen}\omega_0} \operatorname{sen}(n+1)\omega_0\; u[n].$$

Si los polos se ubican sobre el círculo unitario ($r = 1$), y $b_0 = A\operatorname{sen}\omega_0$,

$$h[n] = A\operatorname{sen}(n+1)\omega_0\; u[n].$$

Entonces la respuesta impulsiva de un sistema de segundo orden con polos complejos conjugados sobre el círculo unitario es una sinusoide, y el sistema se denomina *oscilador sinusoidal*. Es un elemento clave en los generadores de frecuencia sintetizados.

En la Fig. 8.23 se muestra el diagrama en bloques del oscilador. La ecuación a diferencias para este sistema es

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - y[n-2] + b_0\delta[n], \tag{8.17}$$

donde los parámetros son $a_1 = -2\cos\omega_0$, $b_0 = A\operatorname{sen}\omega_0$, y las condiciones iniciales son $y[-1] = y[-2] = 0$. La aplicación del impulso en $n = 0$ tiene por objeto iniciar la

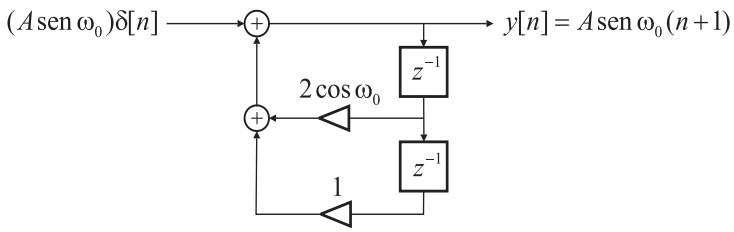


Fig. 8.23. Esquema de un oscilador sinusoidal digital.

oscilación. De allí en más, la oscilación es automantenida, ya que el sistema tiene amortiguamiento nulo ($r = 0$). La oscilación del sistema también puede lograrse anulando la entrada, y ajustando las condiciones iniciales. La respuesta ante una entrada nula del sistema de segundo orden descrito por la ecuación a diferencias homogénea

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - y[n-2], \tag{8.18}$$

con condiciones iniciales $y[-1] = 0$, $y[-2] = -A\,\mathrm{sen}\,\omega_0$, es exactamente la misma que la respuesta del sistema (8.17) ante una excitación impulsiva. En realidad, la ecuación a diferencias (8.18) se puede obtener a partir de la identidad trigonométrica

$$\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2},$$

haciendo $\alpha = (n+1)\omega_0$, $\beta = (n-1)\omega_0$, e $y[n] = \mathrm{sen}(n+1)\omega_0$. En efecto,

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathrm{sen}(n+1)\omega_0}_{y[n]} + \underbrace{\mathrm{sen}(n-1)\omega_0}_{y[n-2]} &= 2\cos\frac{(n+1)\omega_0-(n-1)\omega_0}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\omega_0+(n-1)\omega_0}{2}\\ &= \underbrace{2\cos\omega_0}_{-a_1}\underbrace{\mathrm{sen}\;n\omega_0}_{y[n-1]}\end{aligned}$$

En algunas aplicaciones que involucran modulación de señales portadoras en cuadratura de fase es necesario generar dos señales sinusoidales desfasadas $\pi/2$ radianes entre sí,

$$\begin{aligned}y_s[n] &= A\,\mathrm{sen}\,\omega_0 n,\\ y_c[n] &= A\,\mathrm{sen}(\omega_0 n - \pi/2) = A\cos\omega_0 n.\end{aligned}$$

Estas señales se generan con una estructura llamada *oscilador acoplado* (Fig. 8.24) que puede obtenerse a partir de las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta,\\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) &= \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta,\end{aligned}$$

donde, por definición, $\alpha = n\omega_0$, $\beta = \omega_0$, $y_s[n] = A\,\mathrm{sen}\,n\omega_0\,u[n]$ e $y_c[n] = A\cos n\omega_0\,u[n]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\underbrace{\cos(n+1)\omega_0}_{y_c[n]} &= \underbrace{\cos n\omega_0}_{y_c[n-1]}\cos\omega_0 - \underbrace{\mathrm{sen}\,n\omega_0}_{y_s[n-1]}\mathrm{sen}\,\omega_0\\ \underbrace{\mathrm{sen}(n+1)\omega_0}_{y_s[n]} &= \underbrace{\mathrm{sen}\,n\omega_0}_{y_s[n-1]}\cos\omega_0 + \underbrace{\cos n\omega_0}_{y_c[n-1]}\mathrm{sen}\,\omega_0\end{aligned}$$

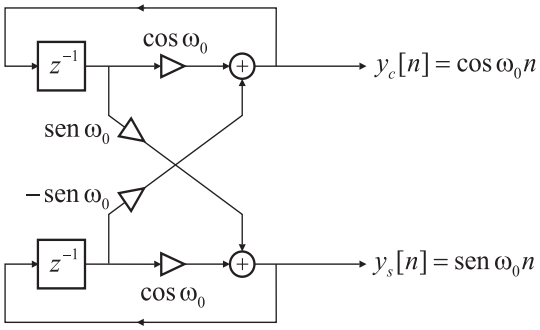


Fig. 8.24. Esquema de un oscilador sinusoidal digital.

obteniéndose las dos ecuaciones a diferencias acopladas

$$\begin{aligned} y_c[n] &= (\cos\omega_0)\, y_c[n-1] - (\operatorname{sen}\omega_0)\, y_s[n-1], \\ y_s[n] &= (\operatorname{sen}\omega_0)\, y_c[n-1] + (\cos\omega_0)\, y_s[n-1], \end{aligned}$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_c[n] \\ y_s[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 & -\operatorname{sen}\omega_0 \\ \operatorname{sen}\omega_0 & \cos\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c[n-1] \\ y_s[n-1] \end{bmatrix}.$$

En la Fig. 8.24 se muestra la estructura del oscilador senoidal acoplado: es un sistema con dos salidas sin ninguna excitación, pero que requiere condiciones iniciales $y_c[-1] = A\cos\omega_0$ e $y_s[-1] = -A\operatorname{sen}\omega_0$ para poder comenzar las oscilaciones automantenidas.

8.6. Referencias

J. F. Blinn, "NTSC: Nice technology, Super Color", *IEEE Computer Graphics & Applications*, Vol. 13, No. 2, marzo 1993, pp. 17-23.

S. G. LaJeunesse, "Composite video separation techniques", *Application Note AN 9644*, Intersil, October 1996.

S. K. Mitra, *Digital Signal Processing: a Computer-Based Approach*, McGraw-Hill Co., 1998.

S. J. Orfanidis, *Introduction to Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.

J. G. Proakis y D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, 2da. Ed., Macmillan, 1992.

P. A. Regalia, S. K. Mitra, P. P. Vaidyanathan, "The Digital All-Pass Filter: A Versatile Signal Processing Building Block", *Proc. IEEE*, Vol. 76, No. 1, enero 1988, pp. 19-37.

8.7. Ejercicios

8.7.1. Filtros pasatodo

Ejercicio 1. Calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de dos filtros pasatodo cuyo diagrama de polos y ceros es el de la Fig. 8.1, para $a = 0{,}6$, $r = 0{,}9$, y $\omega_0 = \pi/4$.

8.7.2. Resonadores

Ejercicio 2. Para el resonador (8.7),

1. Calcule el valor de b_0 en función de r y de ω_0 para que $|H(e^{j\omega_0})| = 1$.
2. Calcule la *verdadera* frecuencia de resonancia ω_r para la cual $|H(e^{j\omega_r})|$ alcanza el máximo. Observe la relación entre ω_0 y ω_r cuando $r \to 1$.
3. Calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de resonadores con parámetros
   (a) $\omega_0 = \pi/3$, $r = 0{,}80$, (b) $\omega_0 = \pi/3$, $r = 0{,}95$.
4. Compare ambas respuestas graficándolas simultáneamente en un única figura.
5. Calcule cuál es el ancho de banda aproximado [dado por la ecuación (8.8)], y compárelo con el que se puede medir en las curvas de respuesta en frecuencia.

Ejercicio 3. Para el resonador (8.9) con ceros en $z = \pm 1$,

1. Calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de resonadores con ceros en $z = \pm 1$ con parámetros
   (a) $\omega_0 = \pi/3$, $r = 0{,}80$, (b) $\omega_0 = \pi/3$, $r = 0{,}95$.
2. Compare ambas respuestas graficándolas simultáneamente en un única figura.
3. Observe en el gráfico la verdadera frecuencia de resonancia ω_r y compárela con la frecuencia de resonancia ω_0 de diseño.
4. Mida el ancho de banda de ± 3 dB para cada caso.
5. Compare las respuestas de los resonadores con y sin ceros en el origen (el ancho de banda, corrimiento de la frecuencia de resonancia real respecto a la de diseño, etc.)

8.7.3. Filtros Notch

Ejercicio 4. Diseñe un filtro notch tipo FIR (8.10) que elimine las componentes de frecuencia $\omega_0 = \pi/4$, y calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase).

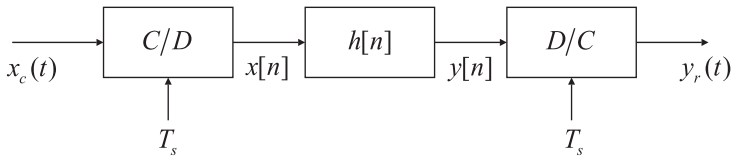
Ejercicio 5. Para un filtro notch tipo IIR (8.11):

1. Calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase) si
   (a) $\omega_0 = \pi/4$, $r = 0{,}85$, (b) $\omega_0 = \pi/4$, $r = 0{,}95$.

2. Compare la respuesta del notch tipo FIR (8.10) con la del notch tipo IIR (8.11).

(I) **Ejercicio 6.** En la figura se muestra un sistema de procesamiento discreto de señales continuas. Se debe implementar un filtor notch para eliminar las componentes de 50 Hz presentes en la señal de entrada $x_c(t)$. La frecuencia de muestreo es $f_s = 1/T_s = 500$ Hz.

1. Especifique la ubicación de los ceros del filtro discreto $H(z)$.
2. Diseñe una implementación FIR [ecuación FIR (8.10)].
3. Calcule la respuesta en frecuencia del sistema (módulo y fase) y exprésela de la manera más sencilla posible. Grafique $H(e^{j\omega})$ indicanto todos los puntos significativos.
4. Calcule el valor de la respuesta en $\omega = 0$ y en $\omega = \pi$.
5. Determine la respuesta en frecuencia del sistema continuo $H_c(f) = Y_c(f)/X_c(f)$, y grafique su módulo y su fase.
6. Calcule analíticamente la expresión de la salida de estado estacionario $y_{c(ee)}(t)$ cuando la entrada es $x_c(t) = 2\,\mathrm{sen}(2\pi \times 50t) + 3\cos(2\pi \times 100t)$.



8.7.4. Filtros Peine

Ejercicio 7. Calcule el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro peine simple (8.15) si $M = 10$.

Ejercicio 8. A partir del filtro peine simple del ejercicio anterior, construya un filtro peine reemplazando z por z^L.

1. Calcule la función de sistema del nuevo filtro peine.
2. Calcule la expresión de la respuesta en frecuencia.
3. Encuentre la ubicación de los ceros. Observe qué sucede en las frecuencias
$$\omega_n = \frac{2\pi nL}{L(M+1)} = \frac{2\pi n}{(M+1)}.$$
4. Grafique el módulo de la respuesta en frecuencia de este filtro para $L = 3$ y $M = 10$.

8.7.5. Osciladores sinusoidales digitales

Ejercicio 9. Encuentre los tres primeros términos de la respuesta impulsiva del oscilador sinusoidal digital descripto por la ecuación (8.17).