



*Universidad Nacional
de Mar del Plata*

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Área Electrotecnia



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

El método de las Componentes Simétricas

Autor:

Ingeniero Electricista Gustavo L. Ferro – Prof. Adjunto – Electrotecnia

EDICION 2010

Índice

- 1** Introducción
- 2** Orden de fases y simetría
- 3** Definiciones sobre la naturaleza de los sistemas
- 4** El vector operador "a"
- 5** Teorema de Fortescue
- 6** Determinación de las componentes simétricas
- 7** Tensiones trifásicas desequilibradas en componentes simétricas
- 8** Corrientes trifásicas desequilibradas en componentes simétricas
- 9** Potencia en función de componentes simétricas
- 10** Impedancias de secuencia o secuenciales
- 11** Sistemas de tensiones y corrientes de secuencia cero
- 12** Casos elementales típicos de resolver con componentes simétricas
- 13** F.e.m.s. generadas por los alternadores trifásicos
- 14** La corriente de neutro
- 15** Ejemplos numéricos de aplicación del Método de las Componentes Simétricas

1. Introducción

El análisis de un circuito trifásico de **tensiones y corrientes perfectas** (igual magnitud en las tres fases y desplazadas entre si 120°) y en el cual **todos los elementos** del circuito, en cada una de las fases, son **simétricos y balanceados** es relativamente simple, ya que este circuito trifásico puede ser estudiado mediante el denominado **"equivalente monofásico"**, que nos lleva a la misma solución directamente.

El análisis de las leyes de Kirchhoff es mucho más difícil cuando el circuito no es simétrico, tal el caso de tratarse de cargas desbalanceadas, cortocircuitos asimétricos, etc.

Se dice que un **circuito trifásico es asimétrico o está desequilibrado**, cuando las **f.e.m. de los generadores de alimentación no están equilibradas o cuando los receptores no están simétricamente conectados a la red**. Se trate de una u otra causa, resulta que las tensiones e intensidades dejan de ser equilibradas. Esta situación se da, con frecuencia, en los sistemas de transporte y distribución de energía eléctrica cuando se producen **"cortocircuitos o fallas"**

En el año 1918, C.L. Fortescue presentó en una reunión del "American Institute of Electrical Engineers", un trabajo que constituye una de las herramientas más poderosas para el estudio de los **circuitos polifásicos desequilibrados**.

Para el análisis de estos circuitos, Fortescue, ideó el llamado **"método de las componentes simétricas"**, que consiste en descomponer un sistema asimétrico en los llamados **"sistemas simétricos"**, también denominados **"componentes simétricas"** del sistema original.

La idea del método consiste en suponer que todo circuito trifásico asimétrico y desequilibrado puede ser expresado por medio de la suma o composición de tres sistemas simétricos, los que a su vez son fácilmente solubles.

Aunque el método de las componentes simétricas se aplica al análisis de cualquier sistema polifásico, de aquí en adelante nos referiremos particularmente a sistemas trifásicos, dado que son los que más frecuentemente encontramos.

Este método de análisis hace posible la predicción, fácilmente y exactamente, del **comportamiento de los sistemas de potencia durante las condiciones de cortocircuito asimétricos o cargas desbalanceadas**.

Las componentes simétricas suministran un instrumento para determinar analíticamente el rendimiento de ciertos tipos de circuitos eléctricos no balanceados que contienen máquinas eléctricas rotatorias. Este instrumento es particularmente útil en el análisis del rendimiento de maquinaria eléctrica polifásica, cuando se hace funcionar desde sistemas de tensiones desbalanceados.

Aunque puede ser usado para resolver redes estáticas no balanceadas, esta aplicación sería en general más molesta y laboriosa que los que los métodos ya estudiados. En cambio, para **redes no balanceadas que contienen máquinas rotativas, el método de las componentes simétricas suministra el único procedimiento práctico** para computar los efectos no balanceados de estas máquinas y es ampliamente usado.

Resumiendo con este método analítico - gráfico se pueden resolver los siguientes tipos de problemas:

- Cortocircuitos monofásicos.
- Cortocircuitos bifásicos con/ sin contacto a tierra.
- Cortocircuitos trifásicos.
- Sistemas trifásicos perfectos con cargas desequilibradas.
- Sistemas trifásicos asimétricos con cargas equilibradas.
- Sistemas trifásicos asimétricos con cargas desequilibradas.

Como el cortocircuito tripolar equivale a un sistema equilibrado, su resolución se obtendrá por los métodos clásicos llegando a la conclusión de que cada fase es recorrida por igual corriente eficaz de cortocircuito.

2. Orden de fases y simetría

Al tratar con corrientes y tensiones de corriente alterna en circuitos trifásicos, se debe establecer la idea de **“orden de fases o secuencia de fases”**

Si se consideran tensiones senoidales de una frecuencia dada, la tensión de una fase del generador alcanza un cierto punto de su ciclo – por ejemplo máximo positivo – en un instante dado. Un cierto instante más tarde, la tensión de otra fase alcanza el mismo punto de su ciclo, y lo mismo sucede con la tercera fase.

Si el máximo de la tensión de la fase A, es seguido por el máximo de la fase B, y a su vez por el máximo de la fase C, se dice que el orden de fases es **“ABC”**

Por el contrario, si el máximo de la tensión de la fase A es seguido por el máximo de la fase C y luego por la fase B, se dice que el orden de fases es **“ACB”**

El sentido de rotación de los fasores giratorios en función del tiempo es en todo caso el contrario a las agujas de un reloj. Este sentido se ha definido como normal internacionalmente.

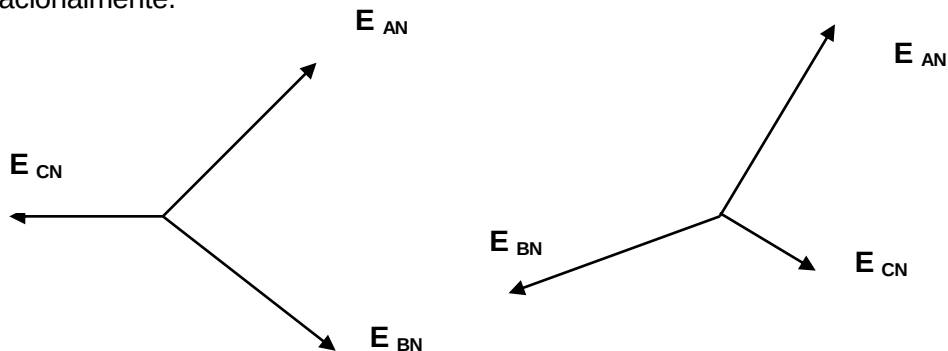


Figura 1. Tensiones trifásicas de orden de fases ABC y ACB

El orden de fases depende del sentido de rotación, de la construcción y conexiones de los devanados del generador y de la denominación de los terminales.

Si las tres tensiones o corrientes trifásicas de una frecuencia dada son de **igual magnitud y difieren uno del otro en el mismo ángulo de fase**, se dice que las tensiones y corrientes forman un **sistema simétrico**.

Evidentemente, sólo hay tres sistemas trifásicos simétricos posibles. Estos se muestran en la **Figura 2** como simétrico de secuencia positiva, cuyo orden de fases es ABC; simétrico de secuencia cero, llamada así porque las tensiones de las tres fases están representadas por fasores sin orden de fases, y simétrico de secuencia negativa cuyo orden de fases es ACB.

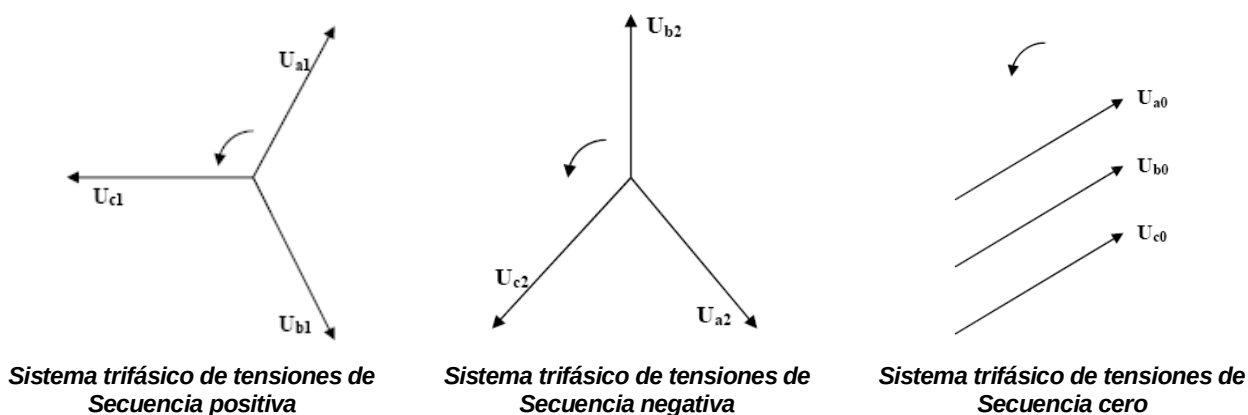


Figura 2. Sistemas simétricos de fasores de tensiones trifásicos

Conectando una carga equilibrada a una fuente de tensiones trifásicas equilibrada se obtienen corrientes equilibradas. La suma de los fasores de un sistema simétrico positivo o negativo es cero.

3. Definiciones sobre la naturaleza de los sistemas

Se dice que un sistema polifásico es “**perfecto**”, cuando tratándose de alternadores trifásicos se generan **tensiones idénticas en “amplitud” y con “iguales desfases entre ellas”**

Para los sistemas trifásicos podemos citar algunas definiciones interesantes:

SISTEMA EQUILIBRADO	$U_{AN} + U_{BN} + U_{CN} = 0$
SISTEMA PROPIO	$\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$
SISTEMA REGULAR	$ U_{AN} = U_{BN} = U_{CN} $

En base a estas tres definiciones podemos establecer lo siguiente:

SISTEMA TRIFÁSICO PERFECTO	es todo sistema trifásico que cumple simultáneamente las condiciones de propio y regular.
-----------------------------------	--

En base a estas definiciones. Podemos afirmar que:

Un sistema trifásico perfecto es equilibrado

4. El vector operador de giro "a"

Por conveniencia en la notación y manipulación se introduce un vector operador, se lo denomina "a" y se lo define como:

$$a = -1/2 + j\sqrt{3}/2 \quad [1]$$

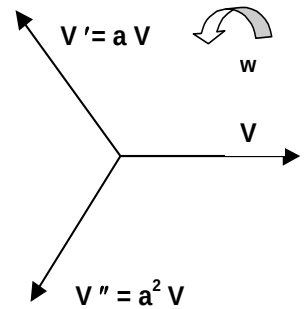
Esto significa que el vector "a" tiene magnitud unidad y está orientado a 120° en dirección positiva desde el eje de referencia.

Un vector al que se lo multiplica por "a" no cambia de magnitud pero si de ángulo, es rotado 120° hacia adelante.

Por ejemplo, $V' = a V$ es un vector que tiene la misma magnitud pero rotado 120° delante del vector V.

El cuadrado del vector "a" es otro vector unitario orientado 120° en dirección negativa desde el eje de referencia o 240° de V en dirección positiva.

Como se ve en la figura el resultado de la operación de a^2 sobre el vector V, es V'' que tiene la misma magnitud que V pero ubicado 120° en la dirección horaria de V.



Los tres vectores 1 , a^2 y a (tomados en este orden) forman un conjunto balanceado y simétrico que rota con secuencia de fase positiva, dado que los vectores son de igual magnitud, desplazados uno del otro en igual ángulo y cruzan la línea de referencia en el orden 1 , a^2 y a (siguiendo la usual convención anti horaria)

Los vectores 1 , a y a^2 (tomados en este orden) forman un conjunto balanceado y simétrico de secuencia de fase negativa, dado que los vectores cruzan la línea de referencia en el orden nombrado, conservando la misma convención de rotación anti horaria, pero ahora a^2 es seguido por 1 y a .

Algunas propiedades del vector "a" son:

$$\begin{array}{llll} a^3 = 1 & a^4 = a & a^5 = a^2 & \\ 1 + a + a^2 = 0 & 1 - a^2 = \sqrt{3} \angle 30^\circ & 1 - a = \sqrt{3} \angle -30^\circ & a - a^2 = j\sqrt{3} \end{array}$$

5. Teorema de Fortescue

Este teorema, aplicado a un conjunto de tres vectores, establece la descomposición del mismo en tres sistemas:

- ✓ **Uno, denominado "sistema directo", de la misma secuencia de fases que el original.**
- ✓ **Otro, denominado "sistema inverso", de secuencia contraria a la del sistema original.**
- ✓ **Un conjunto de tres vectores de la misma magnitud y fase, denominado "sistema homopolar"**

Sea un vector de tres componentes complejas $V = (V_1, V_2, V_3)$. Este vector puede tener distintas interpretaciones en un circuito trifásico, donde se tiene siempre tres componentes:

- Tensión en un punto del circuito respecto a un punto de referencia (que suele ser el neutro del sistema).
- Tensión entre dos puntos del circuito (tenemos tres parejas de puntos geométricos).
- Corrientes en las líneas.
- Impedancias de carga.
- Potencia eléctrica consumida por una carga (en cada fase se tiene una potencia aparente, activa y reactiva).

Podemos enunciar el Teorema de la siguiente manera:

"Cualquier sistema trifásico de fasores asimétrico puede ser descompuesto en tres sistemas de fasores a saber":

- Un sistema simétrico de fasores trifásicos que poseen la secuencia de fases del sistema primitivo, formando la terna de secuencia positiva, secuencia 1 o secuencia directa;
- Un sistema simétrico de fasores trifásicos que poseen secuencia de fases antagónica a la del sistema primitivo, formando la terna de secuencia negativa, secuencia 2 o secuencia inversa;
- Un sistema simétrico de tres fasores monofásicos de igual módulo y girando sincrónicamente en fase llamado terna de secuencia nula, secuencia cero o secuencia homopolar".

Este teorema para sistemas polifásicos es el análogo al **Teorema de Fourier** aplicado a ondas no senoidales y dado que la terna asimétrica se puede descomponer en tres (3) ternas simétricas el **procedimiento a aplicar** será, como se verá más adelante, el de resolución de sistemas equilibrados y simétricos o sea empleando el **circuito equivalente monofásico** del sistema.

Es decir que la solución de un sistema cualquiera asimétrico y desequilibrado, se puede encarar resolviendo los tres sistemas simétricos y aplicando el **principio de superposición**.

En la figura 3 hemos alimentado una carga en estrella a través de los tres sistemas señalados por el teorema de Fortescue y conectados de manera de aplicar el principio de superposición.

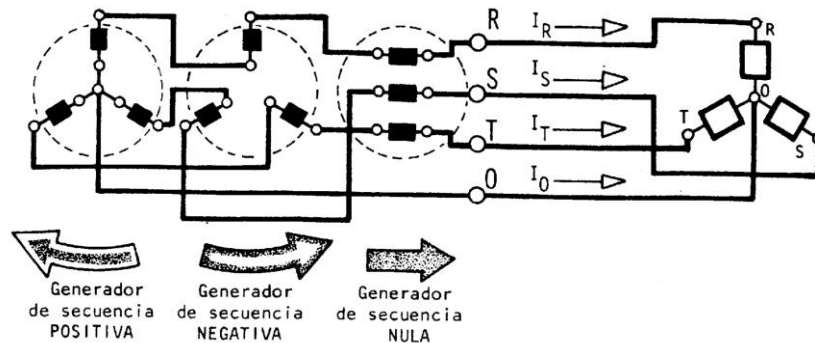
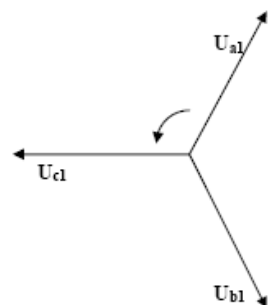


Figura 3. Representación del Teorema de Fortescue

- TERNA DE SECUENCIA POSITIVA (se indicará con subíndice 1)**

Si el sistema original posee secuencia a-b-c, esta terna poseerá la misma secuencia. Como esta es una terna perfecta solo será necesario determinar el módulo y fase de uno de los fasores, en función de los fasores originales, para ello recurrimos al operador "a", antes definido. La terna de secuencia directa queda identificada con:

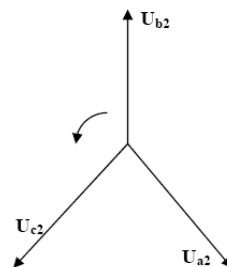
$$\begin{aligned} V_{a1} &= |V_{a1}| \angle 0^\circ \\ V_{b1} &= a^2 V_{a1} = |V_{a1}| \angle -120^\circ \\ V_{c1} &= a V_{a1} = |V_{a1}| \angle 120^\circ \end{aligned} \quad [2]$$



• **TERNA DE SECUENCIA NEGATIVA (se indicará con subíndice 2)**

Si el sistema original posee secuencia a-b-c, esta terna poseerá una secuencia de fases a-c-b y quedará expresada por:

$$\begin{aligned} V_{a2} &= |V_{a2}| \angle 0^\circ \\ V_{b2} &= a V_{a2} = |V_{a2}| \angle 120^\circ \\ V_{c2} &= a^2 V_{a2} = |V_{a2}| \angle -120^\circ \end{aligned} \quad [3]$$



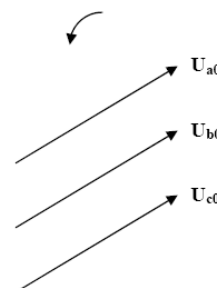
• **TERNA DE SECUENCIA NULA (se indicará con subíndice 0).**

En este caso los tres fasores forman un sistema monofásico de manera tal que:

$$V_{a0} = V_{b0} = V_{c0} = V_0 \quad [4]$$

Para que se cumpla el teorema de Fortescue, debe satisfacerse que:

$$\begin{aligned} V_a &= V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} \\ V_b &= V_{b0} + V_{b1} + V_{b2} = V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2} \\ V_c &= V_{c0} + V_{c1} + V_{c2} = V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2} \end{aligned} \quad [5]$$

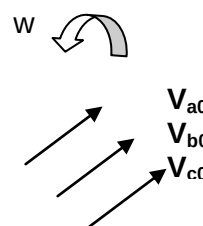
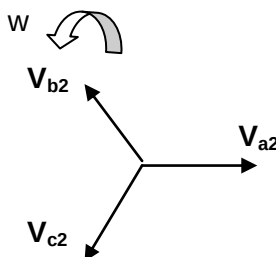
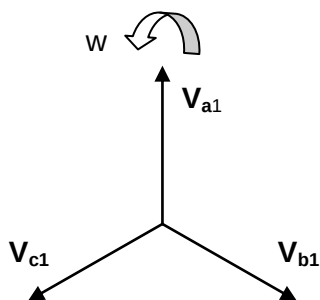


En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \quad [6]$$

A la matriz cuadrada se la llama "**matriz de transferencia directa**" [F], al miembro de la izquierda de la igualdad se lo llama "**matriz columna de valores normales**" y al factor de la derecha de la igualdad se lo suele llamar "**matriz columna de los valores en componentes simétricas**"

Los tres sistemas definidos pueden expresarse gráficamente de la siguiente forma:



- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| • Sistema de secuencia directa | • Sistema de secuencia inversa | • Sistema de secuencia homopolar |
| • Sistema de secuencia "1" | • Sistema de secuencia "2" | • Sistema de secuencia "0" |
| • Sistema de secuencia positiva | • Sistema de secuencia negativa | • Sistema de secuencia nula |

6. Determinación de las componentes simétricas

La determinación de las componentes simétricas de una terna desequilibrada de fasores puede hacerse de dos formas: **analítica o gráficamente**, ambas formas se basan en los fasores originales y solamente se apunta el cálculo hacia la determinación de las componentes de **un solo fasor original**, por costumbre la fase "a", ya que mediante el operador "a" y las propiedades del mismo, quedarán determinados los fasores que compondrán las distintas ternas.

El método algebraico evoluciona con operaciones que propenden a obtener la expresión $1 + a^2 + a$, que es igual a cero.

Sí por ejemplo el término:

$$V_b = V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2} \text{ lo multiplicamos por "a" resultará:}$$

$$a V_b = a V_{a0} + a^3 V_{a1} + a^2 V_{a2} \text{ dado que } a^3 = 1 \angle 0^\circ \text{ será:}$$

$$a V_b = a V_{a0} + V_{a1} + a^2 V_{a2} \quad [7]$$

Lo expresado por la expresión [7] es una operación de rotación en 120° del fasor original perteneciente a la fase "b". Si ahora se efectúa la rotación de la fase "c" en 240° o sea hacemos:

$$a^2 V_c = a^2 V_{a0} + a^3 V_{a1} + a^4 V_{a2}$$

$$a^2 V_c = a^2 V_{a0} + V_{a1} + a V_{a2} \quad [8]$$

Efectuando la suma de la primera ecuación del sistema [5] más las ecuaciones, [7] y [8] resultará:

$$\begin{aligned} V_a &= V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} \\ a V_b &= a V_{a0} + V_{a1} + a^2 V_{a2} \\ a^2 V_c &= a^2 V_{a0} + V_{a1} + a V_{a2} \end{aligned} \quad [9]$$

$$V_a + a V_b + a^2 V_c = 3 V_{a1} \quad [10]$$

El fasor básico de la secuencia "2" [V_{a2}] puede ser hallado mediante un proceso análogo al anterior, se tratará en este caso de eliminar los términos V_{a1} y V_{a0} y retener los términos V_{a2} del sistema [5].

Esto se logra multiplicando por " a^2 " ambos miembros de la segunda ecuación del sistema [5] y por "a" ambos miembros de la tercera ecuación del sistema anterior:

$$\begin{aligned} V_a &= V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} \\ a^2 V_b &= a^2 V_{a0} + a^4 V_{a1} + a^3 V_{a2} \\ a V_c &= a V_{a0} + a^2 V_{a1} + a^3 V_{a2} \end{aligned} \quad [11]$$

$$V_a + a^2 V_b + a V_c = (1 + 2a^3) V_{a2}$$

$$V_a + a^2 V_b + a V_c = 3 V_{a2} \quad [12]$$

El fasor básico de la secuencia nula [V_{a0}], se obtendrá por la suma directa de las ecuaciones del sistema [5], será:

$$\begin{aligned} V_a &= V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} \\ V_b &= V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2} \\ V_c &= V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2} \end{aligned} \quad [13]$$

Luego resulta:

$$V_a + V_b + V_c = 3 V_{a0} \quad [14]$$

Si resumimos las expresiones que determinan las componentes simétricas serán:

$$\begin{aligned} V_{a0} &= 1/3 (V_a + V_b + V_c) \\ V_{a1} &= 1/3 (V_a + a V_b + a^2 V_c) \\ V_{a2} &= 1/3 (V_a + a^2 V_b + a V_c) \end{aligned} \quad [15]$$

En forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad [16]$$

Analizando la matriz anterior podemos establecer la relación que existe con la definida anteriormente como matriz de transferencia directa $[F]$ será:

$$[V_s] = [F]^{-1} [V_N] \quad [17]$$

Es decir las **componentes simétricas** $[V_s]$ pueden obtenerse a partir de los **valores normales** $[V_N]$ utilizando la inversa de la **matriz de transferencia directa** $[F]$, siendo $[F]$ y $[F]^{-1}$ igual a:

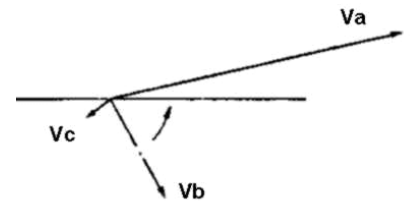
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad [18]$$

$$F^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad [19]$$

7. Tensiones trifásicas desequilibradas en componentes simétricas.

7.1. Tensiones simples o tensiones de fase.

Un conjunto de vectores de **tensiones trifásicas simples o de fase desequilibradas** cualquiera, pueden descomponerse en tres conjuntos de vectores balanceados o simétricos utilizando las siguientes ecuaciones:



$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad [20]$$

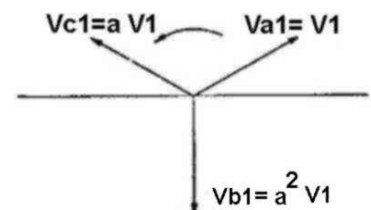
Donde:

- V_a, V_b y V_c = tensiones simples o de fase expresadas en valores normales.

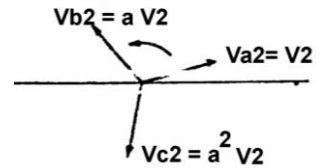
- V_{a0} = componente de secuencia cero de V_a y es igual a la componente de secuencia cero de V_b y V_c de modo que $V_0 = V_{a0} = V_{b0} = V_{c0}$



- V_{a1} = componente de secuencia positiva de V_a ; se simboliza V_{a1} (por definición: $V_{b1} = a^2 V_{a1}$ y $V_{c1} = a V_{a1}$), luego: V_{a1}, V_{b1} y V_{c1} es un conjunto de vectores trifásicos balanceados y simétricos.



- V_{a2} = componente de secuencia negativa de V_a ; se simboliza V_{a2} (por definición: $V_{b2} = a V_{a2}$ y $V_{c2} = a^2 V_{a2}$), luego: V_{a2} , V_{b2} y V_{c2} es un conjunto de vectores trifásicos balanceados y simétricos.



7.2. Tensiones compuestas en sistemas trifilares.

Las tensiones de línea o compuestas en función de las de fase resultan:

$$V_{ab} = V_{ao} - V_{bo} \quad V_{bc} = V_{bo} - V_{co} \quad V_{ca} = V_{co} - V_{ao}$$

Estas expresiones son válidas también para sistemas en triángulo “ Δ ”, ya que en este caso las tensiones simples o de fase, se refieren a una estrella equivalente.

Independientemente de la magnitud de la asimetría de las tensiones compuestas, estas tensiones resultarán equilibradas ($\Sigma V_{\text{línea}} = 0$), como es sabido, para los sistemas trifilares, resultará entonces:

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 \quad [21]$$

Dado que las tensiones de secuencia cero u homopolar, poseen igual amplitud instantánea en cada una de las fases, las tensiones compuestas homopolares valen cero.

La componente de secuencia cero de una terna de tensiones compuestas, tomando la tensión V_{ab} como referencia, resulta:

$$V_0 \Delta = 1/3 [V_{ab} + V_{bc} + V_{ca}] = 0 \quad [22]$$

El subíndice “ Δ ” se usa para identificar componentes de tensiones en triángulo o corrientes que circulan en los arrollamientos del triángulo.

En muchos casos es conveniente conocer la **relación entre las componentes de secuencia negativa y positiva**, esta razón es comúnmente llamada **factor de desbalanceo**.

En virtud de lo expresado, quiere decir que estamos en presencia de una terna de tensiones compuestas equilibrada pero asimétrica, representable entonces por una terna de secuencia directa y otra inversa.

Este hecho interesa en el análisis de las máquinas trifásicas rotativas. En el caso de imprimir tensiones trifásicas asimétricas, a un motor de inducción, su comportamiento se puede analizar con una terna directa y otra inversa. En cualquier caso las tensiones a las distintas secuencias surgen de aplicar la segunda y tercera ecuación del sistema [16], en este caso:

$$\begin{aligned} V_{ab1} &= 1/3 (V_{ab} + a V_{bc} + a^2 V_{ca}) \\ V_{ab2} &= 1/3 (V_{ab} + a^2 V_{bc} + a V_{ca}) \end{aligned} \quad [23]$$

Los valores de las tensiones de fase que figuran en la expresión [21] pueden ser cualesquiera, a pesar de que la $\Sigma V_{\text{línea}} = 0$, se cumple que: $V_a + V_b + V_c \neq 0$.

Esto significa que las tensiones simples si tienen en este caso componente homopolar, como consecuencia del desequilibrio de las tensiones compuestas.

7.3. Relación entre componentes simétricas de las tensiones de fase y las tensiones compuestas.

Suponiendo una secuencia a-b-c: $U_{b1} = U_{a1} \angle -120^\circ$

La tensión compuesta U_{ab} será: $U_{ab1} = U_{a1} - U_{b1}$; reemplazando:

$$U_{ab1} = U_{a1} - U_{a1} \angle -120^\circ = U_{a1} [1 - (-0,5 + j 0,866)] = \sqrt{3} U_{a1} \angle 30^\circ$$

O sea:
$$U_{a1} = (U_{ab1} / \sqrt{3}) \angle -30^\circ$$

Análogamente para la secuencia inversa:

$U_{ab2} = U_{a2} - U_{b2}$, reemplazando:

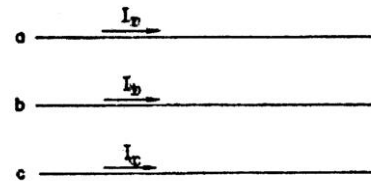
$$U_{ab2} = U_{a2} - U_{a2} \angle 120^\circ = U_{a2} [1 - (0,5 + j 0,866)] = \sqrt{3} U_{a2} \angle -30^\circ$$

Luego:
$$U_{a2} = (U_{ab2} / \sqrt{3}) \angle 30^\circ$$

8. Corrientes trifásicas desequilibradas en componentes simétricas en sistemas trifilares y tetrafilares

8.1. Corrientes de línea

Las tres corrientes de línea pueden descomponerse en tres grupos de vectores en componentes simétricas de una manera análoga a la recién dada para la resolución de tensiones:



$$\begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad [24]$$

Donde:

I_{a0} = componente de secuencia cero de la corriente I_a (por definición $I_{a0} = I_{b0} = I_{c0}$)

I_{a1} = componente de secuencia positiva de la corriente I_a

I_{a2} = componente de secuencia negativa de la corriente I_a

Las corrientes de línea en función de las respectivas C.S., valdrán:

$$\begin{aligned} I_a &= I_{a0} + I_{a1} + I_{a2} = I_0 + I_1 + I_2 \\ I_b &= I_{b0} + I_{b1} + I_{b2} = I_0 + a^2 I_1 + a I_2 \\ I_c &= I_{c0} + I_{c1} + I_{c2} = I_0 + a I_1 + a^2 I_2 \end{aligned} \quad [25]$$

En un sistema trifásico tetrafilar, la suma de las corrientes en las líneas, es igual a la corriente I_N en el retorno por el neutro.

Por tanto:
$$I_a + I_b + I_c = I_N \quad [26]$$

Comparando la ecuación para la componente simétrica I_{a0} y la expresión [26], resulta que:

$$I_N = 3 I_0 \quad [27]$$

Si no hay retorno por el neutro de un sistema trifásico I_N es cero y las corrientes en las líneas no contienen componentes de secuencia cero.

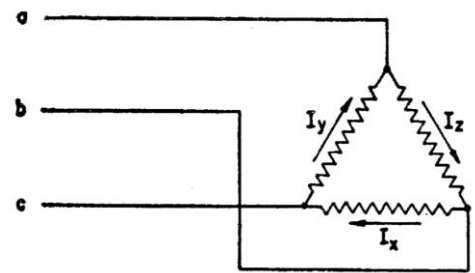
Una carga conectada en triángulo no tiene retorno por el neutro y, por lo tanto, las corrientes que van a una carga conectada en triángulo no contienen componentes de secuencia cero.

Del mismo modo, las corrientes que fluyen en una carga conectada en estrella no puede tener una componente de secuencia cero a menos que el neutro de retorno esté conectado (sistema tetrafilar) o que el centro de estrella (punto neutro) esté conectado a tierra.

8.2. Las corrientes de fase o de rama en cargas conectadas en triángulo.

Las tres corrientes de rama del triángulo pueden ser expresadas en términos de sus componentes simétricas, de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\begin{bmatrix} I_{0D} \\ I_{1D} \\ I_{2D} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} \quad [28]$$



Donde la corriente I_x ha sido elegida como la corriente de referencia (corresponde a la tensión V_{bc} como referencia)

8.3. Relación entre las corrientes de línea y las corrientes de fase.

Si consideramos ahora las corrientes de línea de un **sistema trifásico trifilar**, estas no poseen componentes homopolares ya que:

✓ **Para un sistema en estrella “Y”** se cumple que: $I_a + I_b + I_c = 0$

Luego la componente de secuencia cero “ I_{a0} ” de I_a resulta: $I_{a0} = \frac{1}{3} (I_a + I_b + I_c) = 0$

✓ **Para un sistema en triángulo “Δ”** resulta: $I_a = I_{ab} - I_{ca}$, $I_b = I_{bc} - I_{ab}$, $I_c = I_{ca} - I_{bc}$

Sumando estas corrientes de línea: $I_a + I_b + I_c = (I_{ab} - I_{ca}) + (I_{bc} - I_{ab}) + (I_{ca} - I_{bc}) = 0$

La expresión anterior nos indica que cualquiera sea el desequilibrio de las corrientes de fase las corrientes de línea cumplen que $\Sigma I_{línea} = 0$, luego no habrá componente homopolar en las corrientes de línea, o sea que no se podrá evaluar la componente homopolar de las corrientes de fase de un sistema conectado en “Δ” mediante las corrientes de línea.

Para conexión en “Δ”, las corrientes de fase, en general cumplirán que: $I_{ab} + I_{bc} + I_{ca} \neq 0$

Para una secuencia directa a-b-c- se cumple que: $I_{ab1} - I_{ca1} = I_{a1}$, siendo: $I_{ca1} = I_{ab1} \angle 120^\circ$

Reemplazando: $I_{a1} = I_{ab1} [1 - (-0,5 + j 0,866)] \Rightarrow I_{ab1} = I_{a1} / \sqrt{3} \angle 30^\circ$

Análogamente para la secuencia inversa: $I_{ab2} = I_{a2} / \sqrt{3} \angle -30^\circ$

9. Potencia en función de componentes simétricas

Si se conocen las componentes simétricas de la corriente y la tensión, puede ser calculada directamente la potencia suministrada en un circuito trifásico a partir de las componentes. La demostración de esta aseveración constituye un buen ejemplo del manejo de las componentes simétricas por medio de matrices.

La potencia total compleja transmitida en un circuito trifásico por las líneas, a, b y c, viene dada por:

$$S = P + j Q = V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^* \quad [29]$$

En la que V_a , V_b y V_c son las tensiones respecto al neutro en los terminales e I_a , I_b e I_c las corrientes que entran al circuito por las tres líneas, pudiendo o no existir neutro. Con la notación matricial:

$$S = \begin{bmatrix} V_a & V_b & V_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}^* \quad [30]$$

En la que se sobrentiende que la conjugada de una matriz tiene sus elementos que son conjugados de los elementos correspondientes de la matriz original. Para introducir las componentes simétricas de las tensiones y corrientes, haremos uso de las expresiones [6] y [18], obteniendo:

$$S = [F V]^T [F I]^* \quad \text{siendo:}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad I = \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} \quad [31]$$

La regla de la inversión del álgebra matricial establece que la traspuesta del producto de dos matrices es igual al producto de las traspuestas de las matrices en orden inverso. De acuerdo a esta regla: $[F V]^T = V^T F^T$ [32], por lo tanto:

$$S = V^T F^T [F I]^* = V^T F^T F I^* \quad [33]$$

Observando que $F^T = F$ y que a y a^2 son conjugadas, obtendremos:

$$S = \begin{bmatrix} V_{a0} & V_{a1} & V_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}^* \quad [34]$$

y como $F^T F^* = 3U$

$$S = 3 \begin{bmatrix} V_{a0} & V_{a1} & V_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}^* \quad [35]$$

La potencia compleja es por tanto:

$$S = V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^* = 3 V_0 I_0^* + 3 V_1 I_1^* + 3 V_2 I_2^* \quad [36]$$

Esta expresión indica cómo puede calcularse la potencia compleja a partir de las componentes simétricas de las tensiones y las corrientes de un circuito trifásico desequilibrado.

10. Impedancias de secuencia o secuenciales.

Examinemos el ejemplo particular de un circuito trifásico simétrico con conductor neutro e impedancias $Z_A = Z_B = Z_C = Z$ (ver figura)

Si en los bornes de entrada del circuito se aplica un **sistema simétrico de tensiones de fase de secuencia directa**:

$$V_A = V_{A1} \quad V_B = V_{B1} \quad V_C = V_{C1}$$

El sistema de **las corrientes que se establecen en el circuito también será simétrico** y su secuencia de fases será directa, luego:

$$I_A = I_{A1} \quad I_B = I_{B1} \quad I_C = I_{C1}$$

Las relaciones entre las tensiones de fase simétricas complejas, de secuencia directa, aplicadas al circuito trifásico simétrico y las correspondientes corrientes de fase simétricas complejas de secuencia directa, se llaman **impedancia compleja del circuito para las corrientes de secuencia directa** y se determinan:

$$Z_1 = V_{A1} / I_{A1} = V_{B1} / I_{B1} = V_{C1} / I_{C1} \quad [37]$$

En el ejemplo examinado se cumple que $Z_1 = Z$.

Si a los bornes de entrada se aplica un sistema simétrico de tensiones de fase de secuencia inversa:

$$V_A = V_{A2} \quad V_B = V_{B2} \quad V_C = V_{C2}$$

Entonces habrá en el circuito un sistema simétrico de corrientes que también posee una secuencia inversa de fases:

$$I_A = I_{A2} \quad I_B = I_{B2} \quad I_C = I_{C2}$$

Las relaciones entre los valores complejos: $Z_2 = V_{A2} / I_{A2} = V_{B2} / I_{B2} = V_{C2} / I_{C2}$ [38]

se llaman **impedancias complejas del circuito para las corrientes de secuencia inversa**. En el ejemplo examinado es $Z_2 = Z$.

Finalmente, si a los bornes de entrada del circuito se aplica un sistema simétrico de tensiones de fase de secuencia nula:

$$V_A = V_B = V_C = V_0$$

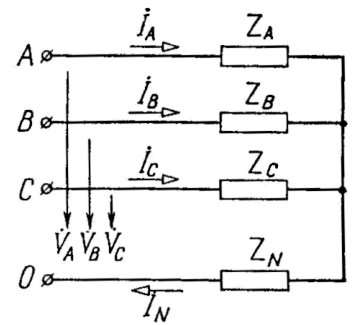
el sistema de corrientes en el circuito también será simétrico y tendrá una secuencia de fase nula $I_A = I_B = I_C = I_0$. La corriente en el conductor neutro será $I_N = 3 I_0$

La relación: $Z_0 = V_0 / I_0$ [39], se llama **impedancia compleja del circuito para las corrientes de secuencia nula**.

Para calcular la impedancia Z_0 establezcamos la ecuación, según la segunda ley de Kirchhoff, para la malla formada por una de las fases, por ejemplo la fase A y por el conductor neutro:

$$V_A = Z I_A + Z_N I_N \quad [40]$$

Sustituyendo $V_A = V_0$, $I_A = I_0$ e $I_N = 3 I_0$, obtenemos:



$$V_0 = (Z + 3 Z_N) I_0 \quad [41] \text{ de donde:}$$

$$Z_0 = V_0 / I_0 = Z + 3 Z_N \quad [42]$$

En caso de no existir el conductor neutro no habrá corrientes de secuencia nula, por lo tanto: $I_0 = 0$ y $Z = \infty$

Generalmente a Z_1 , Z_2 y Z_0 se las denominan simplemente “**impedancias de secuencia directa, inversa y nula**”

Estas impedancias son también llamadas: la **síncrona** Z_s es la presentada a las corrientes directas, la **asíncrona** Z_a la presentada a las corrientes inversas y la de **secuencia cero** Z_0 la presentada a las corrientes homopolares.

En el cálculo de los circuitos por el método de las componentes simétricas se examinan por separado los esquemas para las corrientes y tensiones de distintas secuencias.

La impedancia en el neutro no ejerce influencia sobre los sistemas simétricos de las corrientes de secuencia directa e inversa, de allí que no se indiquen las impedancias en el conductor neutro, para dichas secuencias.

En el esquema que se da para las corrientes y tensiones simétricas de secuencia nula se introducen, en lugar de la impedancia Z_N en el neutro, valores triplicados de dicha impedancia en cada fase.

Todos los cálculos se realizan para una fase llamada “**fundamental**”. Generalmente se toma como fase fundamental la **fase “a”**, y para simplificar las notaciones se omite el subíndice a.

Para el ejemplo que nos ocupa en la Figura 4 se muestran los tres esquemas monofásicos para las corrientes y tensiones de distintas secuencias. Dichos esquemas se denominan “**redes de secuencia directa, inversa y nula**”

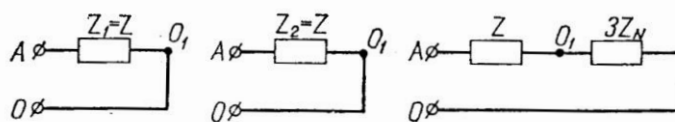


Figura 4.- Redes de secuencia directa, inversa y nula.

En los circuitos estáticos trifásicos simétricos cualesquiera (circuitos que no contienen máquinas giratorias), la inversión del ordenamiento de las fases de las tensiones simétricas no modifica la magnitud de las corrientes; de allí que las impedancias y las redes de secuencia directa e inversa son iguales. En las máquinas eléctricas no solo Z_0 se distingue de Z_1 sino que tampoco Z_2 es igual a Z_1 .

Podemos establecer algunos resultados de orden general:

- Salvo las máquinas giratorias, la impedancia presentada a corrientes equilibradas es independiente de la secuencia de fases $Z_1 = Z_2$.
- En las máquinas giratorias, el campo debido a las corrientes inversas gira en sentido contrario al producido por las corrientes directas y por la corriente de excitación: $Z_1 \neq Z_2$.
- Los valores de Z_0 dependen de la forma en que los puntos neutros están ligados a la tierra o a un conductor de retorno. En el caso en que los puntos neutros están aislados y en que la capacidad de los conductores respecto a tierra es despreciable, las impedancias de secuencia cero son infinitas, pues la corriente homopolar evidentemente no pueden cerrarse (recordar que $I_h = 1/3(I_a + I_b + I_c)$).

11. Sistemas de tensiones y corrientes de secuencia cero.

Demostraremos algunas propiedades de los sistemas de secuencia cero.

La figura que sigue muestra un generador trifásico conectado en estrella, conectado a una carga en estrella de igual impedancia en las tres fases, por medio de una línea de transmisión trifásica con neutro. La impedancia de cada conductor de la línea es Z y la impedancia de neutro es Z_n .

Los fasores E_{0na} , E_{0nb} y E_{0nc} son las fuerzas electromotrices de cada fase del generador; $V_{0a'n'}$, $V_{0b'n'}$ y $V_{0c'n'}$ las caídas de tensión en la carga y $I_{0aa'}$, $I_{0bb'}$ y $I_{0cc'}$ las corrientes de las líneas.

Según la definición de corrientes y tensiones de secuencia cero, se cumple que:

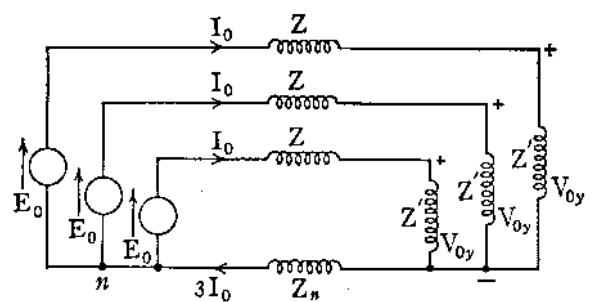
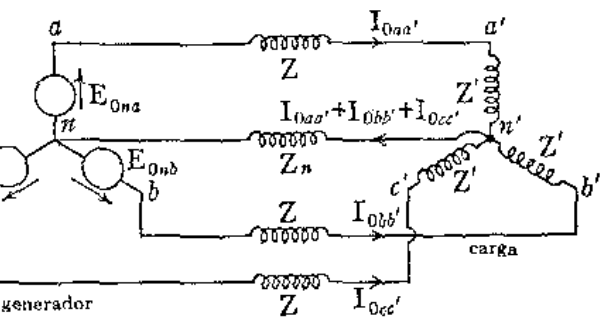
$$I_{0aa'} = I_{0bb'} = I_{0cc'}$$

$$E_{0na} = E_{0nb} = E_{0nc}$$

$$V_{0a'n'} = V_{0b'n'} = V_{0c'n'}$$

Resulta conveniente, para visualizar mejor el problema, representar el diagrama de la figura anterior en la forma mostrada en la figura siguiente, en el cual cada fuerza electromotriz de la fuente se designa por E_0 y cada tensión en la carga V_{0y} .

Se ve claro en este diagrama que si el neutro se suprime el circuito queda abierto y no puede haber corriente.



El neutro de un sistema de transmisión está implicado de una manera definida cuando hay corriente de secuencia cero.

La ecuación de una fase cualquiera del sistema conectado en estrella para cantidades de secuencia cero es, según la figura anterior

$$E_0 - I_0 Z - I_0 Z' - 3 I_0 Z_n = 0 \quad [52]$$

O bien: $E_0 = I_0 (Z + Z' + 3Z_n)$ [53], de donde:

$$I_0 = \frac{E_0}{(Z + Z' + 3Z_n)} \quad [54]$$

Si el generador y las cargas se conectan en triángulo, no hay posibilidad de que existan corrientes de secuencia cero en las líneas de transmisión, puesto que no puede haber neutro para el camino de retorno y la suma de las corrientes de la línea es por tanto cero.

Sin embargo, en las conexiones del triángulo sí hay corrientes de secuencia cero si la suma fasorial de las corrientes del triángulo no es cero.

En la conexión en estrella, las tensiones de secuencia cero entre los conductores de la línea tanto en el generador como en la carga son cero, puesto que son iguales a las diferencias entre cada dos tensiones de igual fase y magnitud E_0 .

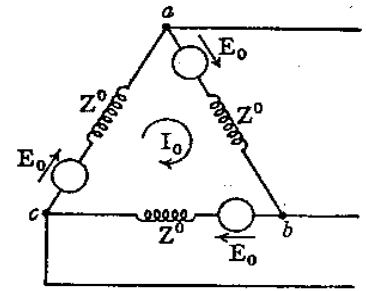
En un generador simétrico conectado en triángulo la tensión terminal de secuencia cero es también cero aunque puedan existir tensiones inducidas de secuencia cero en las fases.

En la figura, E_0 es la fuerza electromotriz de secuencia cero, generada en cada fase y la impedancia a las corrientes de secuencia cero es Z_0 por fase en los devanados del generador. La ecuación de las tensiones a través del triángulo es:

$$E_0 - I_0 Z_0 + E_0 - I_0 Z_0 + E_0 - I_0 Z_0 = 0 \quad [55], \text{ o bien:}$$

$$3 E_0 - 3 I_0 Z_0 = 0 \quad [56]$$

$$E_0 - I_0 Z_0 = 0 \quad [57]$$



El primer miembro de la ecuación [57] es la tensión terminal de secuencia cero de cualquier fase del generador, que se demuestra así es cero.

La impedancia Z_0 a las corrientes de secuencia cero es usualmente muy pequeña, y las corrientes dadas por: $I_0 = E_0/Z_0$ [58], circulan por el triángulo.

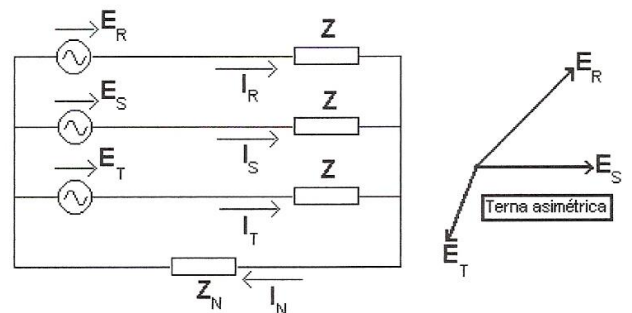
Por esta razón ha de evitarse la conexión en triángulo siempre que sea necesario suprimir las corrientes de secuencia cero en los devanados de un generador o de un transformador.

12. Caso elemental típico de resolver con componentes simétricas.

12.1. Circuitos con impedancias equilibradas conectadas en estrella con neutro sometidas a tensiones desequilibradas.

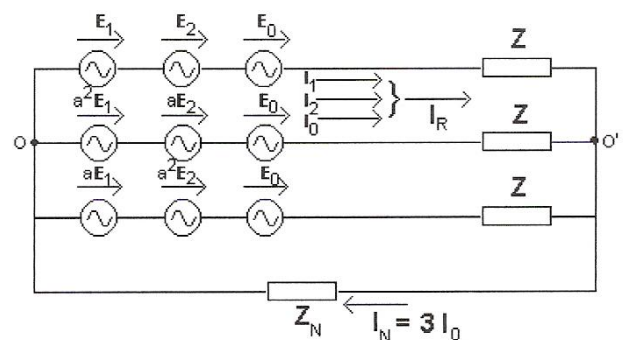
Consideremos el sistema trifásico de la figura, constituido por un generador trifásico que alimenta a una carga simétrica de valor Z .

Dicho generador entrega una terna de tensiones de fase asimétrica que denominaremos E_R , E_S y E_T



Se pretende encontrar el valor de las corrientes de línea utilizando el método de las componentes simétricas.

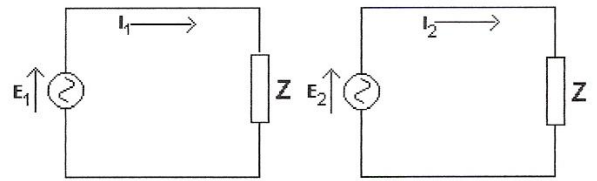
Descomponiendo las f.e.m. del generador en sus componentes simétricas, el sistema puede representarse de acuerdo a la figura que sigue.



Los pasos a seguir para su resolución de este problema en particular son:

- ✓ **1º Paso:** Se descomponen las tensiones de generación en sus componentes simétricas.
- ✓ **2º Paso:** Se determinan las componentes simétricas de la corriente de línea, tal como se hace para sistemas equilibrados.
- ✓ **3º Paso:** Se hallan las corrientes de línea en valores normales a partir de las componentes simétricas halladas en el paso anterior.

Tomando la fase “R” como referencia para el cálculo, se procede a efectuar el primer paso teniendo en cuenta la secuencia del sistema original, en este caso secuencia directa RST, aplicando las ecuaciones [16]:



$$\begin{aligned} E_{R0} &= 1/3 (E_{RN} + E_{SN} + E_{TN}) \\ E_{R1} &= 1/3 (E_{RN} + a E_{SN} + a^2 E_{TN}) \\ E_{R2} &= 1/3 (E_{RN} + a^2 E_{SN} + a E_{TN}) \end{aligned}$$

Para las f.e.m. de secuencia directa e inversa la carga es equilibrada y valen los circuitos monofásicos equivalentes (se trabaja con una fase tomada como referencia) como se representan en la figura.

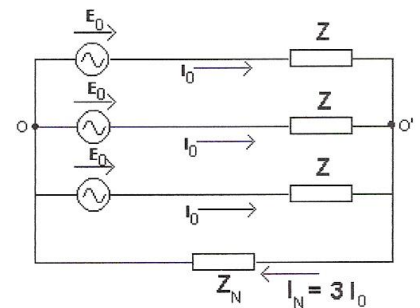
Debe aclararse, y puede demostrarse experimentalmente que las impedancias de las líneas, impedancias de carga pasivas y transformadores, no son diferentes para un sistema polifásico de f.e.m. cuando dos líneas se intercambian (secuencia contraria).

De allí que las impedancias Z de secuencia directa y secuencia inversa tengan igual valor. Esta propiedad no es extensiva a máquinas rotativas.

Las componentes simétricas de la corriente de la fase R (tomada como referencia) de secuencia directa e inversa pueden calcularse con las siguientes expresiones, deducidas de los equivalentes monofásicos:

$$I_1 = \frac{E_1}{Z} \quad [59] \quad I_2 = \frac{E_2}{Z} \quad [60]$$

Para calcular la componente de secuencia cero u homopolar, dibujamos la red de la figura que sigue.



Siendo los tres generadores de secuencia cero idénticos (en módulo y fase), resulta simple probar que las corrientes de secuencia cero también lo son, y en consecuencia la corriente de neutro es $I_N = 3 I_0$ y la tensión de neutro resulta $U_0 = 3 Z_N I_0$.

Entonces la corriente de secuencia cero valdrá:
$$I_0 = \frac{E_0}{Z + 3 Z_N} \quad [61]$$

Se notará que la corriente de retorno a tierra o neutro, es tres veces mayor que las componentes individuales de secuencia cero de las corrientes de línea. Cada conductor de la línea lleva una componente de corriente igual en magnitud y fase a las componentes similares de las otras dos líneas. Estas componentes de secuencia cero son llamadas componentes monofásicas y tienen una importante significación física con relación a la interferencia inductiva entre las líneas de potencia trifásica y las líneas de comunicaciones paralelas. Cuando las corrientes de línea tienen componentes monofásicas, ninguna forma de transposición de los conductores de la línea del sistema de potencia evitará que estas componentes establezcan interferencia inductiva en las líneas de comunicaciones paralelas y la razón es que los componentes monofásicos de los tres conductores de la línea establecerán interferencias magnéticas igualmente orientadas.

Las componentes de secuencia cero de las corrientes de línea de sistemas en estrella conectados a tierra o tetrafilares son también de importancia en el cálculo de las corrientes de cortocircuito en los sistemas de potencia.

A partir de las componentes simétricas de la corriente de la línea R tomando como referencia, podemos calcular las corrientes de línea en valores normales, utilizando la transformación de Fortescue, es decir:

$$I_R = I_1 + I_2 + I_0 = \frac{E_1}{Z} + \frac{E_2}{Z} + \frac{E_0}{Z + 3Z_N} \quad [62]$$

Las otras corrientes de línea son:

$$\begin{aligned} I_S &= I_0 + a^2 I_1 + a I_2 \\ I_T &= I_0 + a I_1 + a^2 I_2 \end{aligned} \quad [63]$$

La expresión [62] incluye a “3 Z_N”, tal que se vio en el punto 11 al tratar los sistemas de secuencia cero.

13. F.e.m.s generadas por los alternadores trifásicos.

La tensión que aparece en cada una de las fases de un generador trifásico, en circuito abierto, la denominaremos “E”. Los bobinados estáticos (de fase) pueden estar conectados en “Y” o en “Δ”, siendo la conexión “Y” la más usual por las razones ya expuestas en el tratamiento de redes trifásicas básicas.

En condiciones normales se cumple que: E_R ; $E_S = a^2 E_R$; $E_T = a E_R$

La secuencia supuesta es RST y las componentes simétricas de la terna:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{R0} \\ E_{R1} \\ E_{R2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ E_S \\ E_T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_{R0} \\ E_{R1} \\ E_{R2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ a^2 E_R \\ a E_R \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para una terna perfecta:

$$\begin{aligned} E_{R0} &= \frac{1}{3} (E_R + E_S + E_T) = \frac{1}{3} E_R (1+a^2+a) = 0 \\ E_{R1} &= \frac{1}{3} (E_R + a E_S + a^2 E_T) = \frac{1}{3} E_R (1+1+1) = E_R \\ E_{R2} &= \frac{1}{3} (E_R + a^2 E_S + a E_T) = \frac{1}{3} E_R (1+a+a^2) = 0 \end{aligned}$$

Tal como era de esperar, todo ocurre como si generara únicamente la componente positiva de secuencia, siendo las componentes negativa y cero de valor nulo.

14. La corriente de neutro.

De acuerdo a la primera ley de Kirchhoff en un sistema trifilar, la suma de corrientes de línea debe forzosamente ser cero; en caso de disponer del cuarto conductor de neutro se puede verificar que: $I_R + I_S + I_T = I_N$

Expresando las corrientes de línea en C.S. resulta:

$$I_N = (I_{R0} + I_{R1} + I_{R2}) + (I_{R0} + a^2 I_{R1} + a I_{R2}) + (I_{R0} + a I_{R1} + a^2 I_{R2}) = 3 I_{R0} + I_{R1} (1+a^2+a) + I_{R2} (1+a+a^2) = 3 I_{R0}$$

- La corriente de neutro es tres veces la corriente homopolar que circula por cada una de las líneas.
- La corriente de secuencia nula sólo podrá existir si existe el conductor neutro, en cambio para las componentes de secuencia 1 y 2 por conformar sistemas de ternas perfectas no podrán existir como componentes de corrientes de neutro.

15. Ejemplos de Aplicación del Método de las Componentes Simétricas.

15.1. Resolución de sistemas trifásicos con generación desequilibrada y carga dinámica simétrica (motor de inducción trifásico)

Un motor de inducción trifásico conectado en estrella tiene una impedancia por fase de $43,30 + j 25 \Omega$ a las corrientes de secuencia positiva y una impedancia de $5,00 + j 8,66 \Omega$ por fase a corrientes de secuencia negativa cuando están alimentando una carga mecánica determinada. El motor recibe energía de una línea trifásica que tiene una impedancia de $0,50 + j 0,866 \Omega$ por conductor. El motor no tiene neutro. Las tensiones entre fases en la fuente son: $E_{RS} = 2.000 \text{ V}$, $E_{ST} = 2.300 \text{ V}$ y $E_{TR} = 2.300 \text{ V}$

- ¿Cuáles son las corrientes de secuencia positiva y negativa, tomando E_{RS} como eje de referencia?
- ¿Cuáles son las tensiones de secuencia positiva y negativa en bornes del motor?
- ¿Cuál es la potencia suministrada al motor?

- Resolución:** Como primer paso encontraremos las C.S. de las tensiones compuestas desequilibradas aplicadas, tomando como referencia la tensión E_{RS} , es decir: $E_{RS} = 2000 \angle 0^\circ$; $E_{ST} = 2300 \angle -115,77^\circ$; $E_{TR} = 2300 \angle 115,77^\circ$

$$\begin{aligned} E_{RS0} &= 1/3 (E_{RS} + E_{ST} + E_{TR}) = 0 \\ E_{RS1} &= 1/3 (E_{RS} + a E_{ST} + a^2 E_{TR}) = 2197,14 \\ E_{RS2} &= 1/3 (E_{RS} + a^2 E_{ST} + a E_{TR}) = -195,87 \end{aligned}$$

Dado que los sistemas simétricos de secuencia 1 y 2 constituyen sistemas perfectos se cumple que la relación entre una tensión compuesta y una simple es $\sqrt{3}$ en lo que respecta al módulo y existe un desfase de 30° , en atraso o adelanto, según se considere la secuencia 1 o secuencia 2, por lo tanto:

$$E_{RS1} = 2197,14 \angle 0^\circ \Rightarrow E_{R1} = 2197,14/\sqrt{3} \angle -30^\circ = 1270,2 \angle (0^\circ - 30^\circ)$$

$$E_{RS2} = -195,87 = 195,87 \angle 180^\circ \Rightarrow E_{R2} = 113,22 \angle (180^\circ + 30^\circ)$$

Luego, conociendo las tensiones simples en C.S. aplicaremos la 2ª Ley de Kirchhoff para cada secuencia para encontrar las corrientes en términos de C.S., a saber:

$$E_{R1} = Z_{LINEA} I_{R1} + Z_1 I_{R1} \Rightarrow I_{R1} = E_{R1} / (Z_{LINEA} + Z_1) = 12,46 - j 21,6 = 24,92 \angle -60^\circ$$

$$E_{R2} = Z_{LINEA} I_{R2} + Z_2 I_{R2} \Rightarrow I_{R2} = E_{R2} / (Z_{LINEA} + Z_2) = -8,54 + j 5,13 = 9,96 \angle -211^\circ$$

Luego a partir de las C.S. de las corrientes encontramos las mismas en valores normales, es decir:

$$\begin{aligned} I_R &= I_1 + I_2 = 3,02 - j 16,47 = 16,93 \angle -76,61^\circ \\ I_S &= a^2 I_1 + a I_2 = -24,92 - j 9,96 = 26,84 \angle -158,21^\circ \\ I_T &= a I_1 + a^2 I_2 = 21,09 + j 26,56 = 33,92 \angle 51,55^\circ \end{aligned}$$

Las caídas de tensión en el motor en términos de C.S. valdrán:

$$V_{motor R1} = Z_1 \cdot I_{R1} = 1246 \angle -30^\circ$$

$$V_{motor R2} = Z_2 \cdot I_{R2} = 99,6 \angle -151^\circ$$

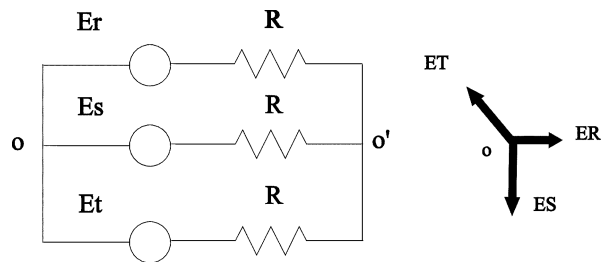
La potencia entregada al motor valdrá: $S = 3 V_{\text{motor } R1} \times I_{R1}^* + 3 V_{\text{motor } R2} \times I_{R2}^*$
Numéricamente será:

$$S = 3 \cdot 1246 \angle -30^\circ \cdot 24.92 \angle 60^\circ + 3 \cdot 99.6 \angle -151^\circ \cdot 9.96 \angle 211^\circ = 93151 \angle 30^\circ + 2976.05 \angle 60^\circ = 80671 + j 46575.5 + 1488.03 + j 2577.33 = 82159.03 + j 49152.83 = 95739.8 \angle 31^\circ$$

$$S = 95739.8 \angle 31^\circ \text{ VA}$$

15.2. Resolución de sistemas trifásicos con generación desequilibrada y carga estática equilibrada.

Una fuente trifásica en estrella constituye un sistema imperfecto de generación y de impedancias internas despreciables, se conecta mediante tres conductores a idénticos voltímetros también en conexión estrella. Cada instrumento posee una resistencia interna de $10 \text{ k}\Omega$ y reactancia despreciable. Usando el método de las componentes simétricas determinar algebraicamente la lectura del voltímetro de la fase S.



• Generación trifásica imperfecta:

$$E_{RN} = 100 \angle 0^\circ [\text{V}] \quad E_{SN} = 200 \angle 270^\circ [\text{V}] \quad E_{TN} = 100 \angle 120^\circ [\text{V}]$$

✓ Resolución:

De acuerdo a lo establecido en el punto 12.1. para determinar la lectura del voltímetro conectado en la fase S, seguiremos los siguientes pasos:

1º Paso: Se descomponen las tensiones de generación en sus componentes simétricas.

$$\begin{aligned} E_{R0} &= 1/3 (E_{RN} + E_{SN} + E_{TN}) \\ E_{R1} &= 1/3 (E_{RN} + a E_{SN} + a^2 E_{TN}) \\ E_{R2} &= 1/3 (E_{RN} + a^2 E_{SN} + a E_{TN}) \end{aligned}$$

$$\text{Donde: } E_{RN} = 100 \angle 0^\circ [\text{V}], E_{SN} = 200 \angle 270^\circ [\text{V}], E_{TN} = 100 \angle 120^\circ [\text{V}]$$

Efectuando los cálculos correspondientes:

$$\begin{aligned} E_{R0} &= 1/3 (100 \angle 0^\circ + 200 \angle 270^\circ + 100 \angle 120^\circ) = 1/3 (50 - j 113,40) = 41,31 \angle -66,21^\circ \\ E_{R1} &= 1/3 (100 \angle 0^\circ + a 200 \angle 270^\circ + a^2 100 \angle 120^\circ) = 128,79 \angle 15^\circ \\ E_{R2} &= 1/3 (100 \angle 0^\circ + a^2 200 \angle 270^\circ + a 100 \angle 120^\circ) = 41,31 \angle 173,8^\circ \end{aligned}$$

2º Paso: Se determinan las componentes simétricas de la corriente de línea, tal como se hace para sistemas equilibrados.

$$I_1 = \frac{E_1}{Z} \quad I_2 = \frac{E_2}{Z}$$

$$\text{Donde: } Z = R = 10 \text{ k}\Omega$$

Las corrientes valdrán:

$$I_1 = 128,79 \angle 15^\circ / 10.000 = 12,88 \angle 15^\circ \text{ mA}$$

$$I_2 = 41,31 \angle 173,8^\circ / 10.000 = 4,13 \angle 173,8^\circ \text{ mA}$$

Dado que no hay neutro $I_R + I_S + I_T = 0$; por lo tanto: $I_{R0} = I_{S0} = I_{T0} = 0$

3° Paso: Se hallan las corrientes de línea en valores normales a partir de las componentes simétricas halladas en el paso anterior.

$$I_R = I_0 + I_1 + I_2 = 9,15 \angle 24,41^\circ \text{ mA}$$

$$I_S = I_0 + a^2 I_1 + a I_2 = a^2 I_1 + a I_2 = 16,30 \angle -95,84^\circ \text{ mA}$$

$$I_T = I_0 + a I_1 + a^2 I_2 = a I_1 + a^2 I_2 = 14,11 \angle 118,2^\circ \text{ mA}$$

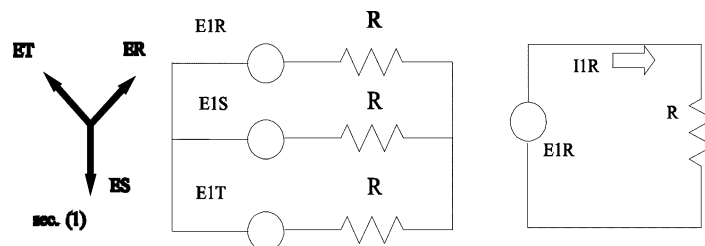
La tensión en el voltímetro en la fase “S”, será:

$$V_S = I_S \cdot R = 16,30 \text{ mA} \cdot 10 \text{ k}\Omega = 163 \text{ V}$$

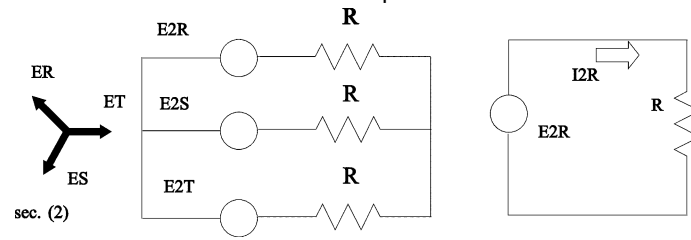
Haremos algunas consideraciones finales sobre el problema planteado:

- ❑ Dado que no existen interacciones entre las corrientes de secuencia con tensiones de diferente secuencia de fase, el problema puede ser encarado mediante el **principio de superposición**.
- ❑ Teniendo en cuenta la acción individual de cada componente de secuencia, los circuitos equivalentes correspondientes son similares al caso normal de **carga equilibrada** con la salvedad de la rotación antagónica del sistema de tensiones inversas. En ambos casos la resolución es posible usando el método normal para la resolución de redes trifásicas equilibradas, o sea considerando el **circuito equivalente monofásico**.
- ❑ Las corrientes de línea de secuencia 1 y 2 serán respectivamente: $I_{R1} = E_{R1}/R$ e $I_{R2} = E_{R2}/R$, se ha tomado como fase base la “R”. En este caso: $Z_1 = Z_2 = R$
- ❑ Como es sabido en este caso no podrá haber corriente homopolar, es así que en la red monofásica para la secuencia cero se deberá hacer constar un circuito abierto entre los dos nodos de estrella para representar una impedancia a la secuencia cero de valor infinito, ya que: $I_{R0} = 0 \therefore Z_{R0} = \infty$
- ❑ Lo expuesto es una realidad evidente y físicamente las variables tensión y corriente se pueden manejar como magnitudes que en las diversas secuencias se pueden superponer a los efectos de conformar la respuesta total.

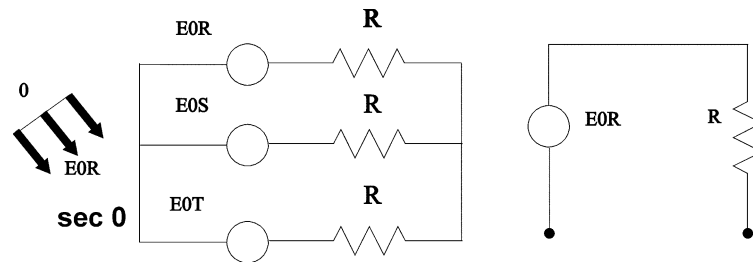
En la figura que sigue, se puede ver la acción individual de las distintas componentes.



Sistema de secuencia 1



Sistema de secuencia 2



Sistema de secuencia cero u homopolar

GI/f/2010